Iosif Aleksandrovič Vil′ner; Pavel Galajda

Схема многомерной номографической модели для выбора оптимального решения общей задачи линейного программирования

Aplikace matematiky, Vol. 18 (1973), No. 3, 188–203

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103469`

СХЕМА МНОГОМЕРНОЙ НОМОГРАФИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И. А. Вильнер, Павел Галайда

(Поступило в редакцию 3. 1. 1965, в переработанном виде 22. 6. 1972)

§ 1. В настоящей работе идет речь о построении многомерной номографической модели линейного программирования и ее обобщениях. Эта модель полезна при небольшом числе переменных и условий ввиду ее наглядности. Конечно, и в общем случае можно моделировать на электронной машине процесс оптимизации при помощи решения многомерных номограмм. Но это уже не было бы номографически наглядным решением, не отличаясь принципиально от обычного алгебраического алгорифма постепенного улучшения начального варианта.

Можно предположить, что роль номографического программирования будет увеличиваться по мере усовершенствования наглядной номографической интерпретации многомерных номограмм.

Укажем прежде всего простое применение номографии к линейному программированию.

Пусть $L(x, y, z, \ldots)$ означает линейную функцию. Пусть требуется экстремизировать

$$\Phi \equiv L(x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$x^\alpha \geqq 0\,, \quad b_{i\alpha}x^\alpha \geqq 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1.2}$$

Полагая

$$b_{i\alpha}x^\alpha = z_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,, \tag{1.3}$$

находим из этой системы m уравнений

$$x^i = L_1^i(x^{m+1}, \ldots, x^n; z_1, \ldots, z_m)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{1.4}$$

Подставляя x_i из (1.4) в (1.1.), получим

$$\Phi \equiv L_2(x^{m+1}, \ldots, x^n; z_1, \ldots, z_m)\,. \tag{1.5}$$

Для системы $(m + 1)$ уравнений (1.4), (1.5) с n независимыми переменными

$$x^{m+1}, \ldots, x^n; z_1, \ldots, z_m \tag{1.6}$$

и с $(m + 1)$ ответными переменными

$$x^1, x^2, \ldots, x^m, \Phi \tag{1.7}$$

строим, вообще говоря, в n-мерном пространстве номограмму нулевого жанра на $(n + m + 1)$ прямолинейных равномерно-проективных, в частности равномерно параллельных шкалах

$$x^1, x^2, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n, z_1, z_2, \ldots, z_m, \Phi\,. \tag{1.8}$$

Градуируем только неотрицательные части $(n + m)$ первых шкал, называя их рабочими частями этих шкал, и только в допустимых пределах.

Для использования номограммы пересекаем гиперплоскостью выравнивания рабочие части первых $(n + m)$ шкал (1.8).

Затем, непрерывно перемещая гиперплоскость выравнивания, „на глаз" легко добиваемся нужного экстремального положения точки встречи плоскости выравнивания со шкалой Φ, если такое положение существует, либо легко „на глаз" устанавливаем отсутствие предполагаемого экстремума, если он не существует.

Если $n = 1$, $n = 2$ или $n = 3$, – все легко осуществляется. Но при $n \geqslant 3$ желательно усовершенствование номографической модели, т. к. обычные составные номограммы из выравненных точек не с одним или двумя, а со многими выравниваниями, в обычной двумерной плоскости, неудобны в виду сложности и утомительности наблюдения за движением точки пересечения последнего индекса выравнивания со шкалой Φ, когда другие индексы выравнивания, в числе, равном числу звеньев составной номограммы, перемещаясь, описывают рабочие участки шкал x^α во всех остальных звеньях составной номограммы.

В числе других возможных интерпретаций можно указать номограммы с прямолинейными бинарными полями на плоскости или с плоскостными тернарными полями в постранстве, позволяющими, пользуясь одним выравниванием, существенно увеличить число n переменных до четырех, в случае плоскости, и до $n = 6$ в случае пространства.

Для понижения размерности пространства интерпретации при сохранении легкости наблюдения за перемещением точки пересечения гиперплоскости выравнивания со шкалой Φ, можно еще поступить следующим образом:

По свойству линейной функции имеем всегда (а, если речь идет о нелинейном программировании, то в исключительных случаях) в силу (1.4), (1.5).

$$(1.4') \qquad x^i = L^i_{11}(x^{m+1}, \ldots, x^n) + L^i_{12}(z_1, \ldots, z_m)\,,$$

$$(1.5') \qquad \Phi = L_{21}(x^{m+1}, \ldots, x^n) + L_{22}(z_1, \ldots, z_m)\,.$$

Полагая

$$(1.4'') \qquad L^i_{11}(x^{m+1}, \ldots, x^n) = u^i,\ i = 1, 2, \ldots, m\,,$$

$$(1.5'') \qquad L_{21}(x^{m+1}, \ldots, x^n) = z\,,$$

заменим системы (1.1), (1.4), (1.5) следующей

$$(1.9) \qquad \begin{gathered} x^\alpha \geqq 0\,, \quad u^i \geqq 0\,, \quad u^i = L^i_{11}(x^{m+1}, \ldots, x^n)\,, \quad z = L_{21}(x^{m+1}, \ldots, x^n)\,, \\ x^i = u^i + L^i_{12}(z_1, \ldots, z_m)\,, \quad \Phi = z + L_{22}(z_1, \ldots, z_m) \\ \alpha = 1, 2, \ldots, n \quad u^i = 0 \quad \text{при} \quad m = n\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \end{gathered}$$

В пространстве $(n - m)$ измерений строим номограмму с $(n - m)$ совмещенными шкалами $x^{m+1}, \ldots, x^n$, с ответными $(m + 1)$ шкалами u^i и z, $i = 1, 2, \ldots, m$. В пространстве $(m + 1)$ измерения строим номограммы для пятого и шестого уравнений (1.9) с совмещенными шкалами для переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Номограммы надо строить так, чтобы все одноименные шкалы были обязательно совмещены, т. е. чтобы была одна шкала z, — по одной шкале для u^i, x^α для каждого i и каждого α и по одной шкале $z_1, \ldots, z_m$.

Таким образом, размерность пространства интерпретации равна max $[n - m, m]$ и решение задачи программирования требует лишь двух выравниваний, если $m \neq n$, и одного выравнивания, если $m = n$. Заметим, что m может быть и меньше и больше и равно n.

Приведенный метод удачен при решении задач линейного, а иногда и нелинейного программирования и теории игр при небольших значениях n и m, а потому его полезно знать лицам сталкивающимся с такими задачами.

Модель эта практически удобна при n (число основных и вспомогательных*) переменных) и m (число линейных условий), удовлетворяющих неравенству $(n - m) \leqq 3$ и особенно проста при $n - m = 1$ и $n - m = 2$, когда модель осуществляется в одной плоскости. При $n - m = 3$ требуется пространственная номограмма.

В случае простой геометрической осуществимости, т.е. при $n - m \leqq 3$, решение оптимальной задачи с помощью номограмм на совмещенных одноименных шкалах не представляет труда.

*) Не считая той вспомогательной переменной, которая обозначает экстремизуемую функцию.

Что касается проблемы построения модели для задач программирования вообще (не обязательно линейного), важную роль может сыграть и новая область номографии: номографирование неравенств (а не уравнений).

В том частном случае, вообще говоря, нелинейного программирования, когда система неравенств имеет вид

$$f_i(x; y; z) \geqq 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,,$$

а экстремизуемой функцией является $f(x; y; z)$, и когда после введения $(m + 1)$ — ой вспомогательной переменной $t_1, t_2, \ldots, t_m, t$ соответствующая система $(m + 1)$ — го уравнения $f_i(x; y; z) = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $f(x; y; z) = t$ с аргументом $n + 1 = m + 3 + 1$ допускает пространственную номограмму с тремя параллельными совмещеными шкалами x, y, z и с $(m + 1)$, вообще говоря, криволинейной шкалой $t_1, t_2, \ldots, t_m, t$, формулы для построения соответствующей номограммы даны на стр. 126—130 (особенно (2.7), (2.7′), (2.8)—(2.11)) работы [4].

Удобство модели заключается в наглядности, освобождающей от утомительных матричных пересчетов; однако это верно только при малом числе аргументов. Такие вопросы как — определяет ли система условий (2.2) ограниченный многогранник или нет, что очень существенно знать, ибо в первом случае оптимальная задача разрешима всегда, а во втором — не всегда, — приобретает на модели очевидное решение, если модель не очень сложна, т. е. если n и m невелики и $n - m \leqq 3$.

Разумеется, не только метод выравненных точек применим к оптимальным задачам, но и другие методы (номограммы с транспарантами и т. п.)

§ 2. Многомерные номограммы с одним выравниванием для уравнений с $(n + 1)$ аргументом

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n = f \tag{2.1}$$

и их составные плоские эквиваленты, состоящие из $(n - 1)$-го звена с таким же числом выравниваний и $(n - 2)$ вспомогательными (немыми) шкалами могут быть применены для получения алгоритмов для решения задач линейного и динамического программирования, а также и для нелинейного программирования, когда соответствующие зависимости допускают многомерную анаморфозу [1], [2].

Пусть наряду с линейной формой (2.1) заданы ограничения, которые, как известно, всегда с помощью введения вспомогательных неотрицательных неизвестных, могут быть записаны в виде точных равенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.2}$$

Называя решением системы (2.2) совокупность неотрицательных значений неизвестных, удовлетворяющих системе (2.2), ищем те решения, которые минимизируют (максимизируют) линейную форму, определенную равенством (2.1)*). Заметим, что, если бы мы взяли вместо линейной формы f линейную неоднородную функцию, решение, конечно, не изменилось бы.

Как известно, все решения заполняют некоторое выпуклое ограниченное или бесконечное многогранное тело, расположенное в положительном гипероктанте, причем минимальное оптимальное решение дается одной из вершин этого многогранника, а возможно и всеми точками этого тела, заполняющими те ребра многогранного тела, которым принадлежит указанная вершина и которые принадлежат проходящей через указанную вершину опорной гиперплоскости, параллельной гиперплоскости (2.1) и впервые встречающей многогранное тело в указанной вершине, если рассматривать опорную плоскость как мгновенное состояние первого соприкосновения с многогранным телом геперплоскости, превращающейся в этот момент в опорную плоскость при параллельном ее перемещении в направлении вектора $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$.

Мы будем предполагать, что $m < n$ и что уравнения системы (2.2) независимы, хотя это предположение для нашего решения совершенно несущественно.

§ 3. Введя вспомогательные переменные $t_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ для построения определителя Массо уравнения (2.1),

(3.1) $$x_1 = t_1, \quad x_2 = t_2, \ldots, x_j = t_j, \ldots, x_n = t_n,$$

получим с помощью (2.1) линейную систему

(3.2) $$\begin{array}{llllll} c_1 t_1 + & c_2 t_2 + \ldots + & c_j t_j + \ldots + & c_n t_n & = f \\ 1 \,.\, t_1 & & & & = x_1 \\ & 1 \,.\, t_2 & & & = x_2 \\ & & 1 \,.\, t_j & & = x_j \\ & & & t_n & = x_n, \end{array}$$

условие совместности которой дает определитель Массо $(n + 1)$-го порядка

(3.3) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & x_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & c_n & f \end{vmatrix} = 0.$$

*) Напомним, что линейная форма f и линейная функция $f + d$ во всем пространстве не ограничены из снизу ни сверху и не имеют точек относительного экстремума.

Умножая k-ый столбец на произвольное постоянное α_k причем $\alpha_k \neq 0$, прибавляем 2-ой, 3-ий, ..., n-ные столбцы к первому, затем умножаем на произвольные постоянные $\beta_2, \ldots, \beta_n$, неравные нулю, а $(n+1)$-ый столбец на произвольное $\gamma \neq 0$, получим аффинно-преобразованный определитель Массо

$$(3.4)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & & \ldots 0 & 0 & \gamma x_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \ldots 0 & 0 & \gamma x_2 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_3 & \ldots 0 & 0 & \gamma x_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n & & & \ldots 0 & \beta_n & \gamma x_n \\ \sum_1^n c_k\alpha_k & \beta_2 c_2 & \beta_3 c_3 & \ldots\ \beta_{n-1}c_{n-1} & \beta_n c_n & \gamma f \end{vmatrix} = 0$$

определяющий в системе аффинных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, номограмму на $(n+1)$ параллельных и равномерных шкалах $x_1, x_2, \ldots, x_n, f$:

$$(3.5)\qquad {}_1x_1 = 0, \quad {}_1x_2 = 0, \ \ldots, \ {}_1x_{n-1} = 0, \quad {}_1x_n = \frac{\gamma}{\alpha_1}x_1,$$

$${}_2x_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \ {}_2x_2 = 0, \ \ldots, \ {}_2x_{n-1} = 0, \quad {}_2x_n = \frac{\gamma}{\alpha_2}x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_nx_1 = 0, \quad {}_nx_2 = 0, \ \ldots, \ {}_nx_{n-1} = \frac{\beta_n}{\alpha_n}, \ {}_nx_n = \frac{\gamma}{\alpha_n}x_n$$

$$(3.6)\qquad {}_fx_1 = \frac{\beta_2 c_2}{\sum_1^n \alpha_k c_k}, \ {}_fx_2 = \frac{\beta_3 c_3}{\sum_1^n \alpha_k c_k}, \ \ldots, \ {}_fx_{n-1} = \frac{\beta_n c_n}{\sum_1^n \alpha_k c_k}, \ {}_fx_n = \frac{\gamma f}{\sum_1^n \alpha_k c_k}$$

причем предполагается, что α_k выбранны так, что

$$(3.7)\qquad \sum_1^n \alpha_k c_k \neq 0\,.$$

Если выбрать все α_k одного знака с γ, то все шкалы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут направлены параллельно оси координат x_n — в сторону роста этой координаты.

Ясно, что если не все c_k отрицательные, то можно распорядиться выбором абсолютных величин α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы и f было направлено в ту же сторону, но в общем случае этого сделать нельзя.

Для каждого из m уравнений (2.2) мы получим аналогичную номограмму с прямолинейно-проективно-равномерными шкалами для $x_1, x_2, \ldots, x_n, b_i$ $(i =$

$= 1, 2, \ldots, m$). Выбрав везде те же самые произвольные коэффициенты α_k, β_k, γ, мы можем совместить все шкалы x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), а для координат точек, соответствующих значениям b_i (если они заданы), получим выражения

$$(3.8)\quad {}_{b_i}x_1 = \frac{\beta_2 a_{i2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik}}, \quad {}_{b_i}x_2 = \frac{\beta_3 a_{i3}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik}}, \ldots, \quad {}_{b_i}x_{n-1} = \frac{\beta_n a_{in}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik}}, \quad {}_{b_i}x_n = \frac{\gamma b_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik}}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$

Если b_i не фиксировано, то получаем еще m параллельных равномерных шкал $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m$ с одним выравниванием на $(n + m + 1)$ равномерных прямолинейных параллельных шкалах.

Всего имеем $(n + 1)$ параллельных и равномерно прямолинейных шкал и m фиксированных точек. Выбирая еще с помощью (3.5) $(n - m)$ нулевых точек шкал $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. $n - m$ строк из квадратной матрицы n-го порядка

$$(3.9)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \frac{\beta_2}{\alpha_2} & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_3}{\alpha_3} & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \frac{\beta_n}{\alpha_n} & 0 \end{vmatrix},$$

которую мы назовем матрицей нулевых точек или значений данных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или их шкал, мы пишем уравнения гиперплоскостей, проходящих через m точек (3.7) и $(n - m)$ из n точек (3.8).

Затем ищем пересечения каждой из этих $c_n^{n-m} = c_n^m$ плоскостей с остальными m шкалами (3.5), т. е. с теми, которым не принадлежат взятые $(n - m)$ нулевых точек, а также со шкалой f, определяемой уравнениями (5.6). И отбираем те гиперплоскости, которые пересекают эти шкалы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в точках с неотрицательными пометками значений соответствующих переменных (остальные, нерабочие части шкал $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не должны быть вычерчены и тогда терминология, очевидно, упрощается, так как вместо того, чтобы говорить »пересекают в точках с неотрицательными пометками«, можно говорить »пересекают рабочие части соответствующих шкал« или даже короче — »пересекают соответствующие шкалы«.

В итоге получаем допустимые решения, содержащие заведомо не менее, чем $(n - m)$ нулей некоторых $(n - m)$ переменных из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и не более m

положительных значений остальных $(n - m)$ из этих переменных. Наименьшее (наибольшее) значение f соответствующее этим допустимым решениям и будет оптимальным. Существует ли оно и чему оно равно, узнается с помощью номограммы*).

Напишем схему матрицы производящей уравнения этих c_n^m гиперплоскостей из n столбцов и m строк (3.8) и n строк (3.9) и одной верхней строки из текущих координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и, наконец, из столбца единиц слева, соответственно преобразованию определителя (3.3) к виду (3.4) с отличным от нуля левым столбцом.

Получим следующую производящую матрицу из $(n + 1)$ столбца и $(1 + m + n)$ строк (последнюю ее строку назовем добавленной):

(3.10)
$$\left\| \begin{array}{cccccc}
1 & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots\ x_{n-1} & x_n \\
1 & \dfrac{\beta_2 a_{12}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{1k}} & \dfrac{\beta_3 a_{13}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{1k}} & \dfrac{\beta_4 a_{14}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{1k}} & \ldots\ \dfrac{\beta_n a_{1n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{1k}} & \dfrac{\gamma b_1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{1k}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & \dfrac{\beta_2 a_{m2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\beta_3 a_{m3}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\beta_4 a_{m4}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{mk}} & \ldots\ \dfrac{\beta_n a_{mn}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\gamma b_m}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_{mk}} \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 & 0 \\
1 & \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} & 0 & 0 & \ldots\ 0 & 0 \\
1 & 0 & \dfrac{\beta_3}{\alpha_3} & 0 & \ldots\ 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} & 0 \\
\hline
1 & \dfrac{\beta_2 c_2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k c_k} & \dfrac{\beta_3 c_3}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k c_k} & \dfrac{\beta_4 c_4}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k c_k} & \ldots\ \dfrac{\beta_n c_n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k c_k} & \dfrac{\gamma f}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k c_k}
\end{array} \right\| .$$

В определитель $n + 1$ порядка уравнений каждой разрешающей гиперплоскости войдут первые $m + 1$ строка и $n - m$ из n остальных строк этой матри-

*) В задачу этой заметки не входит рассмотрение всевозможных частных случаев и деталей, которые здесь могут иметь место.

цы. Приравнив нулю каждый такой определитель, находим уравнение разрешающей гиперплоскости. Остается последовательно заменить в этом уравнении текущие координаты первой строки правыми частями равенств, стоящих в каждой из тех m строк (3.5), которые не использованы при образовании этого определителя, т. е. были взяты в числе $(n - m)$ из последних n строк матрицы (3.10).

Это же надо сделать и с правыми частями равенств (3.6). На это указывает добавочная отделенная чертой $(n + m + 2)$-ая строка матрицы (3.10). Получим в результате $(m + 1)$ уравнение с одним неизвестным каждое (эти неизвестные — это m из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, остальные $(n - m)$ были приняты равными нулю) и неизвестная f.

Описанный метод легко запрограммировать для вычислительной машины. При небольших m и n его легко провести вручную.

Это и есть решение задачи номографического моделирования линейного программирования первым многомерным номографическим методом авторов.

4 §. Суть второго многомерного метода заключается в упрощении модели посредством исключения из (2.1) каких нибудь m из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тем самым понижается размерность пространства на m единиц, т. е. приходится оперировать в пространстве не n, а лишь $(n - m)$ измерений.

При надлежащей перенумерации неизвестных, после исключения из формы (2.1) m неизвестных можно переписать системы (2.1) и (2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(4.1) \qquad & x_{n-m+1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(n-m)}x_{n-m}\\
&& x_{n-m+2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2(n-m)}x_{n-m}\\
&& \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&& x_{n-m+i} &= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i(n-m)}x_{n-m}\\
&& x_n &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m(n-m)}x_{n-m}\\
&(4.2) & f &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{n-m}x_{n-m}\,.
\end{aligned}$$

Систему (4.1) можно переписать короче

$$(4.3) \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i(n-m)}x_{n-m} = x_{(n-m)+i}$$

Но тогда сразу видно, что система (2.1) и (2.2) при замене n на $(n - m)$ превращается в систему (4.2) и (4.3), если только еще заменить b_{i+1} на $x_{(n-m)+i}$. Но надо помнить, что b_i были постоянными, знак которых не подчинялся ограничению, а $x_{(n-m)+i}$ — это неотрицательные неизвестные. Поэтому номограмма системы (2.1), (2.2), определенная формулами (3.5) и (3.6), (3.8) превратится в номограмму системы уравнений (4.2) и (4.3), если вместо n подставить $n - m$ а в (3.8) b_i заменить на $x_{(n+m)+i}$, причем шкалы $x_1, x_2, \ldots, x_{(n-m)}$ будут направлены в одну сторону, а шкала f может быть направлена и в противоположную. При этом m уравнений (3.8) определяет уже не m фиксированных точек, как в первом методе, а m равномерных прямолинейных шкал, параллельных шкалам $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ для переменных $x_{(n-m)+i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, направления которых в общем виде нельзя предсказать. Это отличие создает и различие в использовании полученной $(n - m)$-мерной номограммы, по сравнению с использованием n-мерной номограммы в первом методе.

Так как пространство анаморфозы теперь лишь $(n - m)$-мерное, то разрешающая гиперплоскость определяется $(n - m)$ точками, а не n точками, как раньше. Зато теперь уже у нас нет фиксированных точек (3.8).

Допустимые решения даются точками пересечения разрешающей гиперплоскости выравнивания, пересекающей рабочие части всех без исключения шкал $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а, следовательно, шкалу f.

Оптимальным решением будет такое допустимое решение которому соответствует либо наименьшее либо наибольшее из найденых значений.

Наша номограмма состоит из $n - m + 1 + m = (n + 1)$ шкал в $(n - m)$-мерном пространстве, в то время как в первом методе была $(n + 1)$ шкала и m фиксированных точек в n-мерном пространстве.

Пусть какая-нибудь разрешающая плоскость проходит через $k < (n - m)$ нулей шкал $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Возьмем тогда на одной из остальных шкал точку встречи с разрешающей гиперплоскостью и будем иметь изменение f в одном направлении при непрерывном переходе через эту точку при неподвижных k нулях и еще $n - m - k$ ненулевых значений на других шкалах. Значит, значение не будет экстремальным.

Итак, оптимально разрешающая гиперплоскость должна проходить через такие точки шкал $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в числе которых должно быть не менее чем $(n - m)$ нулевых точек.

Остается провести c_n^{n-m} гиперплоскостей в пространстве $(n - m)$ измерений и определить точки пересечения каждой из этих разрешающих гиперплоскостей с рабочими участками m остальных шкал и со шкалой f, отбрасывая те случаи, в которых та или иная из гиперплоскостей не пересекает рабочие участки хотя бы одной из шкал $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (т. е. пересекает эти шкалы для отрицательных значений соответствующих аргументов).

Полученные решения будут допустимы.

Остается выбрать то из них (оптимальное), которому соответствует наименьшее (наибольшее) значение f, если оно существует.

Построим одну из разрешающих гиперплоскостей, а именно, гиперплоскость, проходящую через нули шкал.

Для этого опять-таки служит мартица (3.10) с заменой n на $n - m$ и b_i на $x_{(n-m)+i}$, имеющая, следовательно, $(n - m + 1)$ столбцов и $1 + m + (n - m) = n + 1$ строк.

Получаем производящую матрицу, к которой мы присоединим еще добавочную $(n + 2)$-ую строку для определения точки пересечения гиперплоскости со шкалой f.

$$(4.4)\qquad \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-m+1} & x_{n-m} \\ 1 & \dfrac{\beta_2 a_{12}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{1k}} & \dfrac{\beta_3 a_{13}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{1k}} & \dots & \dfrac{\beta_{n-m} a_{1(n-m)}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{1k}} & \dfrac{\gamma x_{n-m+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{1k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dfrac{\beta_2 a_{m2}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\beta_3 a_{m3}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{mk}} & \dots & \dfrac{\beta_{n-m} a_{m(n-m)}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\gamma x_n}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k a_{mk}} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{\beta_3}{\alpha_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{\beta_{n-m}}{\alpha_{n-m}} & 0 \\ \hline 1 & \dfrac{\beta_2 c_2}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k c_k} & \dfrac{\beta_3 c_3}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k c_k} & \dots & \dfrac{\beta_n c_n}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k c_k} & \dfrac{\gamma f}{\sum\limits_{k=1}^{n-m}\alpha_k c_k} \end{matrix} \right\| .$$

Приравнивая нулю определитель $(n - m + 1)$-го порядка, образованный первой и $(n - m)$ последними строками матрицы (4.4), получим уравнение соответствующей разрешающей гиперплоскости.

Последовательно заменяя в этом определителе первую строку второй, третьей, четвертой, ..., $(m + 1)$-ой строками, получим уравнения первой степени с одним неизвестным $x_{(n-m+1)}$, ..., x_n — каждое, и определим допустимые значения этих неизвестных; заменяя первую строку добавочной, отделенной чертой $(n + 2)$-ой строкой матрицы (4.4), найдем соответствующее значение f.

Матрица (4.4) — это одна из c_n^{n-m} матриц для определения c_n^{n-m} гиперплоскостей и соответствующих им допустимых решений.

Общую производящую матрицу, как компактную схему всех вычислений, которые придется провести, если воспользоваться вторым методом, в матрице (4.4) заменим $(m + 2)$-ую, $(m + 3)$-ую, ... $(n + 1)$-ую строки, соответствующие нулевым значениям переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ их общими формами, определяемыми равенствами (3.5) с заменной n на $(n - m)$.

Таким образом, мы получим разрешающую матрицу

$$
(4.5) \qquad \left\|\begin{array}{ccccccc}
1 & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{n-m+1} & x_{n-m} \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\gamma}{\alpha_1} x_1 \\
1 & \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\gamma}{\alpha_2} x_2 \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{\beta_{n-m}}{\alpha_{n-m}} & \dfrac{\gamma}{\alpha_{n-m}} x_{n-m} \\
1 & \dfrac{\beta_2 a_{m2}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{1k}} & \dfrac{\beta_3 a_{13}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{1k}} & 0 & \ldots & \dfrac{\beta_{n-m} a_{1(n-m)}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{1k}} & \dfrac{\gamma x_{n-m+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{1k}} \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
1 & \dfrac{\beta_2 a_{m2}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\beta_3 a_{m3}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\beta_4 a_{m4}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{mk}} & \ldots & \dfrac{\beta_{n-m} a_{m(n-m)}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{mk}} & \dfrac{\gamma x_n}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k a_{mk}} \\
\hline
1 & \dfrac{\beta_2 c_2}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k c_k} & \dfrac{\beta_3 c_3}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k c_k} & \dfrac{\beta_4 c_4}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k c_k} & \ldots & \dfrac{\beta_{n-m} c_{n-m}}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k c_k} & \dfrac{\gamma f}{\sum\limits_{k=1}^{n-m} \alpha_k c_k}
\end{array}\right\| .
$$

Если второй, третий, ..., $(n - m + 1)$-ый элементы $(n - m + 1)$-го столбца обратить в нуль, положив $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-m} = 0$, то получим (с точностью до расположения строк) частную матрицу (4.4). Для полного решения вопроса надо $c_n^{n-m} = c_n^m$ способами обращать в нули $(n - m)$ элементов последнего столбца расположенных на пересечении, второй, третьей, ..., $(n + 1)$-ой строк и последнего $(n - m + 1)$-го столбца матрицы (4.5) и для каждого такого выбора находить допустимые решения, получаемые в пересечении соответствующей указанному выбору $(n - m)$ нулей разрешающей гиперплоскостями с рабочими частями всех шкал, соответствующих всем остальным строкам (кроме первой текущей, конечно) матрицы (4.5), отбрасывая как недопустимые, те случаи, когда разрешающая гиперплоскость не пересекает рабочую часть хотя бы одной из шкал неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Нахождение оптимальных решений среди допустимых уже не представляет затруднений, если они существуют; тоже можно легко убедиться, что требуемого оптимального решения нет.

Не исключено, в частности, совпадение одной (или даже нескольких) из шкал x_α со шкалой значений линейной формы (функции) f (имеется в виде случай совпадения номограммы одного из уравнений (4.1) с номограммой (4.2) при совпадении шкал $x_{(n-m+k)}$ $(1 \leqq k \leqq m)$ со шкалой f. Тогда совокупность значений $x_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, (n-m))$, для которых достигается экстремум, становится неопределенной, за исключением значения вспомогательной переменной $x_{(n-m+k)}$, нуль которой указывает экстремальное значение f. Проходящая через эту точку гиперплоскость дает в пересечении со шкалами $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ любые допустимые значения, поскольку при этом $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ не делаются отрицательными.

Так как решение системы линейных неравенств или смешанной системы таких равенств и неравенств с добавлением, быть может, и экстремизуемой линейной функции, при помощи добавочных неотрицательных неизвестных приводится к рассмотренной задаче, то, тем самым, дана номографическая модель для решения и этих задач.

§ 5. Наконец, существует и третья модель, умещающаяся в одной плоскости; если выполнены условия совместности, которые для линейных систем вида (4.1) всегда выполнены. Пусть $n - m \geqq 2$ для i-того уравнения системы (4.1) существует, как известно, односвязная номограмма на параллельных равномерных шкалах $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}, x_{n-m+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, состоящая из $n - m + 1$ градуированной шкалы и $n - m - 2$ немых шкал и из $(n - m - 1)$-го трехшкального звена.

Каждое среднее звено состоит из двух немых и одной градуированной шкал. Последнее и первое звенья содержат по две градуированные шкалы и по одной немой шкале. При этом направления, масштабы и положения начал отсчетов шкал $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут быть заданы произвольно и, следовательно, одинаково для всех m уравнений системы (4.1). Остальные шкалы, т. е. шкалы x_{n-m+2} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $(n - m - 2)$ немых шкал этим однозначно определяются.

К этой конструкции без повторения одноименных шкал добавится шкала f для уравнения (4.2) и еще $(n - m - 2)$ немые шкалы, соответствующие этому уравнению.

Таким образом, вся модель будет состоять из $(n + 1)$ градуированной шкалы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $(n - m - 2)(m + 1)$ немых шкал. Если $n - m < 3$, то решение задач на этой модели очень просто, так как нет немых шкал.

Если $n - m = 3$, число немых шкал равно $m + 1$. При небольшом m оно также не сложно. В этих двух случаях модель сразу без вычислений отвечает на вопрос разрешима ли задача, нет ли противоречий в условиях, ограниченный ли многогранник определяется в $(n-m)$-мерном пространстве m неравенствами, которые соответствуют m равенствам (4.1), если заменить x_{n-m+i} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ нулями и знак равенства знаком $\leqq$ во всех m равенствах (4.1). Во введении к настоящей статье мы указали, что задача номографирования в этом случае практически решается с помощью работы [4].

§ 6. В качестве конкретного примера можно рассмотреть простейший случай транспортной задачи, скажем при двух предприятиях A_1, A_2, производящих некоторый продукт в количествах a_1 и a_2 и двух потребителях B_1 и B_2, полностью потребляющих этот продукт в количествах b_1 и b_2 соответственно, при цене доставки единицы груза из $A_iB_j(i, j = 1, 2)$, равной $c_{ij} \geqq 0$, и при количестве продукта $x_{ij} \geqq 0$.

Получаем систему

(6.1) $$x_{11} + x_{12} = a_1\,,$$

(6.2) $$x_{21} + x_{22} = a_2\,,$$

(6.3) $$x_{11} + x_{21} = b_1\,,$$

(6.4) $$x_{12} + x_{22} = b_2\,,$$

определяющую класс допустимых решений, в которой имеется лишь три независимых уравнения, так как

(6.5) $$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

Требуется найти оптимальное решение, минимизирующее форму

(6.6) $$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}\,.$$

В даном случае $n = 4$ и в силу (6.5) $m = 3$. Значит, пространство анаморфозы одномерно, так как $(n - m) = 1$.

Вторым методом исключения получим из (6.1)–(6.4) в силу (6.5)

(6.7) $$x_{12} = a_1 - x_{11}\,, \quad x_{21} = b_1 - x_{11}\,, \quad x_{22} = a_2 - b_1 + x_{11}\,.$$

Форма (6.6) примет вид

(6.8) $$(c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22})\,x_{11} + (c_{12}a_1 + c_{21}b_1 + c_{22}a_2 - c_{22}b_1)\,.$$

Номограмма уравнения (6.8) одномерна – это двойная шкала. В силу (6.8), в соответствии с общими нашими выводами все $m = 3$ номограммы (6.7) также принадлежат пространству одного измерения – той же прямой. Получаем пятистороннюю шкалу $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, f$ которую можно осуществить, если направить шкалу x_{11} вверх. Тогда в силу (6.7) шкалы x_{12}, x_{21} пойдут вниз, а x_{22} также вверх.

Получим (см. схему).

Нерабочие участки шкал, обозначенные нами на схеме через a, b, c, d, вычеркнуты.

Проводим горизонтали (1), (2), (3), (4), через нули шкал $x_{11}, x_{22}, x_{12}, x_{21}$. Допустимыми будут те горизонтали, которые пересекают рабочие части всех четырех шкал.

Это будут горизонтали (2) и (3), определяющие точки II и III на шкале значений f.

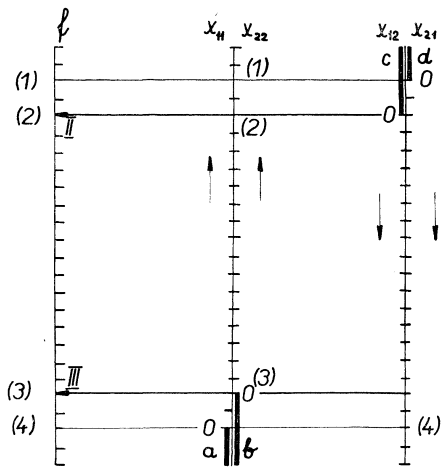

Схема.

То из значений II или III, которое меньше, определит минимизирующее решение, а то, которое больше, максимизирующее. Конечно, это самый примитивный пример, но в задачу заметки входит лишь построение модели, а не исследование задач.

Мы представляем читателю рассмотреть общую транспортную задачу. Разумеется изложенное можно рассматривать как номографический метод решений неравенств, в частности и особенно линейных, так как каждая такая задача введением вспомогательных неотрицательных переменных приводится к рассмотренным выше всегда совместно номографируемым системам.

Литература

[1] *И. А. Вильнер* — „О линейной зависимости функций". Сборник статей ВЗПИ, в. 7, (1954), 105—128.

[2] *И. А. Вильнер* — „Бесквадратурное представление в виде определителя Массо в многомерном пространстве недифференцируемых и дифференцируемых функций многих переменных в инвариантной форме". Сборник статей ВЗПИ 9 (1955), 84—115.

[3] *И. А. Вильнер* — „Стереоскопическая номография и решение проблемы общей анаморфозы в N-мерном пространстве". УМН т. XI, в. 4 (70), (1956), 123—130.
[4] *И. А. Вильнер* — „Стереоскопическая номография и пространственная анаморфоза с наперед заданной шкалой". Украинский математический журнал т. IX, № 2 (1957), изд. АН УССР, 121—133.

Súhrn

SCHÉMA VIACROZMERNÉHO NOMOGRAFICKÉHO MODELU PRE VÝBER OPTIMÁLNEHO RIEŠENIA VŠEOBECNEJ ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

I. A. VIĽNER, PAVEL GALAJDA

Práca sa zaoberá zostrojením nomografického modelu pre lineárne programovanie, ktorý je veľmi výhodný, ak je daný nie veľký počet premenných a podmienok. Dokazuje sa, že aj vo všeobecnom prípade je možné modelovať na elektronkovom počítacom stroji, ale v tomto prípade proces optimalizácie spočíva v riešení viacrozmerných nomogramov, kde riešenie je už nomograficky neprehľadné.

Sú odvodené vzťahy pre zostrojenie viacrozmerných nomogramov nulového rodu na rovnomerných priamočiarych stupniciach v N rozmernom priestore. Uvažujú sa rôzne varianty nomogramov na priamočiarych rovnomerných stupniciach v závislosti od tej alebo inej analytickej interpretácie danej úlohy lineárneho programovania.

V práci sú uvedené aj použitia nomogramov pri riešení t.zv. optimálnych úloh v porovnaní s druhými metódami. Táto praktická možnosť pri hľadaní optimálneho riešenia na navrhovanom nomografickom modeli umožňuje prehľadne za krátku dobu vybrať kontinuum možnosti a jednoduchým spôsobom určiť aj optimálne riešenie.

Адреса авторов: † Prof. *I. A. Viľner,* Moskva, Doc. Dr. *Pavel Galajda,* CSc., Katedra matematiky a výpočtovej techniky EF — VŠT, Zbrojnícka 7, 040 00 Košice.