Aplikace matematiky

Libuše Grygarová

Lösungsbereich von Optimierungsproblemen mit Parametern in den Koeffizienten der Matrix der linearen Restriktionsbedingungen

*Aplikace matematiky*, Vol. 17 (1972), No. 5, 388–400

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103429`

# LÖSUNGSBEREICH VON OPTIMIERUNGSPROBLEMEN MIT PARAMETERN IN DEN KOEFFIZIENTEN DER MATRIX DER LINEAREN RESTRIKTIONSBEDINGUNGEN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen am 7. October 1971)

Die bisherigen Untersuchungen in der Theorie der linearen parametrischen Optimierung gehen überwiegend diejenige Probleme an, wo entweder die Zielfunktion, oder die rechten Seiten der linearen Restriktionsbedingungen von einem oder mehreren Parametern linear abhängen (bzw. Probleme, in denen die Parameter zugleich in der Zielfunktion sowohl auch in den rechten Seiten der Restriktionen unabhängig oder abhängig auftreten) an. Es gibt einige Arbeiten, wo lineare Optimierungsprobleme mit linear auftretenden Parametern in der Koeffizientenmatrix des Systems linearer Restriktionsbedingungen betrachtet werden[1]). Diese Untersuchungen gehen jedoch von dem Simplexverfahren aus und bieten keine Möglichkeit einer qualitativen Beschreibung des ganzen Problems.

Die vorgelegte Arbeit beschäftigt sich mit einer Klasse von parametrischen linearen Optimierungsproblemen mit den Parametern in den Koeffizientenmatrix, wobei in jeder Reihe derselbe Parameter vorkommt. Dieser Arbeit liegt die Arbeit [3] zugrunde und wir werden uns im Laufe unserer Untersuchungen auf die Ergebnisse der zitierten Arbeit [3] wiederrufen.

Die in der Arbeit [3] entwickelte Theorie führte zu einer hinreichenden Charakteristik des Lösbarkeitsbereichs $\mathfrak{A}$ des Problems

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}(\lambda,\mu)} \{f(\mathbf{x})\}! \tag{1.1}$$

mit

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha\,, \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{M}(\lambda, \mu) = \{\mathbf{x} \in E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r,\ \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha = \mu,\ x_\alpha \geqq 0 \quad (r = 1, \dots, m;\ \alpha = 1, \dots, n)\} \tag{1.3}$$

[1]) Sieh z. B. [1], [2].

und zwar unter den Voraussetzungen

1) $\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r\,,\ x_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\} \neq \emptyset\,,$

2) $1 \leqq m < n,$

3) der Rang der Matrix $\|a_{r\alpha}\|_{m,n}$ ist gleich $m$.

Das zu dem Problem (1.1) duale Problem

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathfrak{N}(\lambda)} \{g_\mu(\mathbf{u})\}! \tag{1.4}$$

mit

$$g_\mu(\mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r + \mu u_{m+1}\,, \tag{1.5}$$

$$\mathfrak{N}(\lambda) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha\ (\alpha = 1, \ldots, n)\} \tag{1.6}$$

besitzt dann nach dem Dualitätsprinzip denselben Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}$ wie das obige Problem (1.1). Für den Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}$ des Problems (1.4) ergibt sich daher nach [3], Satz 8 entweder

a)

$$\mathfrak{A} = S \tag{1.7}$$

im Falle, wo das Problem

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\}! \tag{1.8}$$

mit $f(\mathbf{x})$ aus (1.2) und mit die Restriktionsmenge

$$\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha = b_r,\ x_\alpha \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\} \tag{1.9}$$

lösbar ist, oder

b)

$$\mathfrak{A} = \{(\lambda, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid (\lambda, \mu) \in S,\ \lambda \in T\} \tag{1.10}$$

im Falle der Unlösbarkeit des Problems (1.8).

Nach [3] ist

$$S = {}'E_n - (U_1 \cup U_2)\,, \tag{1.11}$$

$$U_1 = \{\lambda \in {}'E_n \mid \lambda \in \mathfrak{A}_1,\ \varphi_1(\lambda) > \mu\} = \{\lambda \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0 \quad (\nu = 1, \ldots s)\,,$$
$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_i x_\alpha \lambda_\alpha - \mu > 0 \quad (i = 1, \ldots, N)\}\,,$$

$$U_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2,\ \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) < \mu\} = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0\ (\nu = 1, \ldots, s),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_{i}x_\alpha \lambda_\alpha - \mu < 0\ (i = 1, \ldots, N)\},$$

wo

(1.12) $$\mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha\}!\ \text{ist lösbar}\} =$$

$$= \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0\ (\nu = 1, \ldots, s)\},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha\}!\ \text{ist lösbar}\} =$$

$$= \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0\ (\nu = 1, \ldots, s)\},$$

(1.13) $$\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha\} = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{i}x_\alpha \lambda_\alpha \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(1)}\mathfrak{A}_i \quad (i = 1, \ldots, N),$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}} \{\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha\} = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{i}x_\alpha \lambda_\alpha \quad \text{für} \quad \boldsymbol{\lambda} \in {}^{(2)}\mathfrak{A}_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

und $({}^{\nu}h_1, \ldots, {}^{\nu}h_n)$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ Komponenten eines beliebigen Vektors in der Richtung der entsprechenden unbeschränkten Kante des Polyeders $\mathfrak{M}$, ${}_{i}\mathbf{x}$ $(i = 1, \ldots, N)$ alle Ecken des Polyeders $\mathfrak{M}$ sind, die Mengen ${}^{(1)}\mathfrak{A}_i$, ${}^{(2)}\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ stellen Einteilungen der Mengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ aus [3] dar.

Für die Menge $T$ aus (1.10) gilt

(1.14a) $$T = T' \cup T'',$$

(1.14b) $$T' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha < 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_2\},$$

(1.14c) $$T'' = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha > 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha \lambda_\alpha \geqq 0 \quad \text{für} \quad \nu \in I_2\},$$

wo $({}^{\nu}k_1, \ldots, {}^{\nu}k_n)$ $(\nu = 1, \ldots, \varrho)$ Komponenten eines Vektors in der Richtung einer Kante des Kegels ${}^{*}T_1$ sind und

(1.15) $$^{*}T_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \lambda_\alpha \leqq 0,\ \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} \lambda_\alpha = 0,\ \lambda_\alpha \leqq 0,\ (r = 1, \ldots, m;$$

$$\alpha = 1, \ldots, n)\},$$

(1.16) $$I_1 = \{\nu \in \{1, \ldots, \varrho\} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha c_\alpha < 0\},$$

$$I_2 = \{\nu \in \{1, \ldots, \varrho\} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha c_\alpha = 0\}$$

ist.

Wir wollen nun einige parametrische Optimierungsprobleme betrachten, bei denen die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in der Koeffizientenmatrix der linearen Restriktionsbedingungen auftreten und wo man unmittelbar die theoretische Ergebnisse der Arbeit [3] anwenden kann.

## SPEZIALFALL I

Ein Optimierungsproblem der Art

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}! \tag{2.1}$$

mit

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r \,, \tag{2.2}$$

$$\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\} \tag{2.3}$$

stellt ein parametrisches Optimierungsproblem derjenigen Teilmenge von Problemen der Art (1.4), die durch die Wahl $\mu = 0$ aus (1.5) entsteht, dar. Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}_0$ den Lösbarkeitsbereich des Problems (2.1), so folgt aus (1.7), (1.10) nach [3]

$$\mathfrak{A}_0 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda} \in S_0 \cap T\} \,, \tag{2.4}$$

wobei

$$S_0 = {}'E_n - ({}_0U_1 \cup {}_0U_2) \,,$$

$${}_0U_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1,\ \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) > 0\} \,, \quad {}_0U_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2,\ \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) < 0\}$$

gilt und die Mengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ die Bedeutung aus (1.12), die Funktion $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$, $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ die Bedeutung aus (1.13) haben. Für die Menge $T$ gilt

a) $T = {}'E_n$
im Falle der Lösbarkeit des Problems (1.8),

b) $T$ ist die Menge aus (1.14a,b,c)
im Falle der Unlösbarkeit des Problems (1.8). Die Menge $\bar{T}$ stellt im Falle b) nach [3], Satz 6 einen polyedrischen Doppelkegel in ${}'E_n$, $\dim \bar{T} = \dim T = n$ dar. Die Menge $S_0$ stellt offenbar den Durchschnitt der Menge $S$ aus (1.11) mit der Hyperebene

$$R_0 = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in {}'E_{n+1} \mid \mu = 0\}$$

dar. Ähnlich gilt für die Mengen ${}_0U_1$, ${}_0U_2$

$${}_0U_1 = R_0 \cap U_1 \,, \quad {}_0U_2 = R_0 \cap U_2 \,.$$

Die Mengen ${}_0\overline{U}_1$, ${}_0\overline{U}_2$ sind daher – wie die Mengen $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ aus [3] – polyedrische Kegel mit einem Scheitel im Koordinatenursprung in $'E_n$ und mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{\lambda} \in {}_0\overline{U}_1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{\lambda} \in {}_0\overline{U}_2 \;;$$

daher ist ${}_0\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2$ ein polyedrischer Doppelkegel in $'E_n$, der im Grenzfall sich auf einen einzigen Punkt $O = (0, \ldots, 0)$ reduzieren kann.

Ist nun ein parametrisches Problem der Art

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathfrak{N}'(\boldsymbol{\omega})} \{g(\mathbf{u})\}!$$

mit $g(\mathbf{u})$ aus (2.2) und mit

$$\mathfrak{N}'(\boldsymbol{\omega}) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + (a_{m+1\alpha} + \omega_\alpha)\, u_{m+1} \geqq c_\alpha$$
$$(\alpha = 1, \ldots, n)\}$$

gegeben, so gilt nach den obigen Überlegungen für den Lösbarkeitsbereich $A$ dieses Problems

$$A = \{\boldsymbol{\omega} \in {}'E_n \mid \omega_\alpha = \lambda_\alpha - a_{m+1\alpha},\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_0\}\,,$$

wo $\mathfrak{A}_0$ die Bedeutung aus (2.4) hat. Die geometrische Charakteristik der Menge $A$ ist durch die der Menge $\mathfrak{A}_0$ festgelegt, da durch die Transformationsvorschrift

$$\omega_\alpha = \lambda_\alpha - a_{m+1\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

nur eine Translation in $'E_n$ beschrieben ist.

## SPEZIALFALL II

Betrachten wir ein Problem

$$\min_{\mathbf{u} \in N(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}! \tag{3.1}$$

mit $g(\mathbf{u})$ aus (2.2) und mit der von $\boldsymbol{\lambda}$ abhängigen Restriktionsmenge

$$N(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_\alpha)\, u_r \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\}\,.$$

Setz man

$$u_{m+1} = \sum_{r=1}^{m} u_r\,,$$

$$\tilde{N}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha\ (\alpha = 1, \ldots, n),\ \sum_{r=1}^{m} u_r - u_{m+1} = 0\}\,,$$

dann ist offenbar der Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}$ des Problems (3.1) gleich dem des Problems

$$(3.2) \qquad \min_{\mathbf{u}\in \tilde{N}(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}!\,.$$

Definieren wir

$$\tilde{N}(\boldsymbol{\lambda}, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{r=1}^{m} u_r + \lambda_{n+1} u_{m+1} \geqq 0, \sum_{r=1}^{m} - u_r + \lambda_{n+2} u_{m+1} \geqq 0\}$$

und stellen wir das folgende Optimierungsproblem

$$(3.3) \qquad \min_{\mathbf{u}\in \tilde{N}(\boldsymbol{\lambda}, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2})} \{g(\mathbf{u})\}!$$

auf. Das zu dem Problem (3.3) duale Problem ist das Problem

$$(3.4) \qquad \max_{\mathbf{x}\in M(\boldsymbol{\lambda}, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2})} \{f(\mathbf{x})\}!$$

mit $f(\mathbf{x})$ aus (1.2) und mit

$$M(\boldsymbol{\lambda}, \lambda_{n+1}\ \lambda_{n+2}) = \{\mathbf{x} \in E_{n+2} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha + x_{n+1} - x_{n+2} = b_r \ (r = 1, \ldots, m),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+2} \lambda_\alpha x_\alpha = 0,\ x_\alpha \geqq 0 \ (\alpha = 1, \ldots, n+2)\}\,.$$

Falls die am Anfang der Arbeit angeführten Voraussetzungen 1) bis 3) erfüllt sind, so hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & -1 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ebenfalls den Rang $m$, die Menge

$$M = M(0, \ldots, 0) = \{\mathbf{x} \in E_{n+2} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha + x_{n+1} - x_{n+2} = b_r$$

$$(r = 1, \ldots, m),\ x_\alpha \geqq 0 \ (\alpha = 1, \ldots, n+2)\}$$

ist nicht leer und $1 \leqq m < n + 2$, so dass auf das Problem (3.4) die theoretischen Ergebnisse der Arbeit [3] angewendet werden können. Da das Problem (3.3) der unter dem Spezialfall I betrachteten Art ist, so kann der Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}_0$ des Optimierungsproblem (3.3) im Sinne des oben behandelten Spezialfalles I bestimmt werden. Für den Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}$ des fraglichen Problems (3.1) gilt dann offenbar

$$\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid (\boldsymbol{\lambda}, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}) = (\boldsymbol{\lambda}, -1, 1) \in \mathfrak{A}_0\}$$

und der geometrische Charakter der Menge $\mathfrak{A}$ ergibt sich aus dem der Menge $\mathfrak{A}_0$.

Falls ein parametrisches Problem

$$(4.1) \qquad \min_{\mathbf{u}\in N(\lambda)} \{g(\mathbf{u})\}!$$

mit $g(\mathbf{u})$ aus (2.2) und mit

$$N(\lambda) = \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_\alpha)\, u_r = c_\alpha\,, \quad u_r \geqq 0 \;(r = 1, \ldots, m;\; \alpha = 1, \ldots, n)\}$$

vorliegt, wobei die Voraussetzungen

1) $1 \leqq n < m$,

2) der Rang der Matrix $\|a_{r\alpha}\|_{m,n}$ ist $n$ gleich,

3) die Menge

$$N = \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r = c_\alpha,\; u_r \geqq 0 \;(r = 1, \ldots, m;\; \alpha = 1, \ldots, n)\}$$

ist nicht leer,

erfüllt sind, so setzen wir wie im Spezialfall II

$$u_{m+1} = \sum_{r=1}^{m} u_r\,.$$

Wegen $u_r \geqq 0\,(r = 1, \ldots, m)$ gilt dann ebenfalls $u_{m+1} \geqq 0$. Bezeichnet man wiederum mit $\mathfrak{A}$ den Lösbarkeitsbereich des Problems (4.1), so ist dieser offenbar gleich dem Lösbarkeitsbereich des Problems

$$(4.2) \qquad \min_{\mathbf{u}\in \tilde{N}(\lambda)} \{g(\mathbf{u})\}!$$

mit

$$\tilde{N}(\lambda) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} = c_\alpha,\; \sum_{r=1}^{m} u_r - u_{m+1} = 0\,,\; u_r \geqq 0$$
$$(r = 1, \ldots, m+1;\; \alpha = 1, \ldots, n)\}\,.$$

Die Menge $\tilde{N}(\lambda)$ kann auch in der Form

$$(4.3\text{a}) \quad \tilde{N}(\lambda) = \{\mathbf{u} \in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha,\; \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha} u_r - \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq -c_\alpha\,,$$
$$\sum_{r=1}^{m} u_r - u_{m+1} \geqq 0,\; \sum_{r=1}^{m} -u_r + u_{m+1} \geqq 0,\; u_r \geqq 0 \;(r = 1, \ldots, m+1;$$
$$\alpha = 1, \ldots, n)\}$$

geschrieben werden. Ordnen wir der Menge $\tilde{N}(\boldsymbol{\lambda})$ die Menge

$$\text{(4.3b)} \quad {}^*N(\boldsymbol{\lambda}) = \Big\{\mathbf{u} \in E_{m+1} \,\Big|\, \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha,\ \sum_{r=1}^{m} -a_{r\alpha} u_r + \lambda_{n+\alpha} u_{m+1} \geqq -c_\alpha,$$

$$\sum_{r=1}^{m} u_r + \lambda_{2n+1} u_{m+1} \geqq 0,\ \sum_{r=1}^{m} -u_r + \lambda_{2n+2} u_{m+1} \geqq 0,\ u_r + \lambda_{2n+2+r} u_{m+1} \geqq 0\,,$$

$$\lambda_{2n+m+3} u_{m+1} \geqq 0 \ (r = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, n)\Big\}$$

zu. Das zu dem Problem

$$\min_{\mathbf{u} \in {}^*N(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}!$$

duale Problem ist das Problem

$$\text{(4.4)} \qquad \max_{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, x^+_{n+1}, x^-_{n+1}, \mathbf{y}) \in {}^*M(\boldsymbol{\lambda})} \{F(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-)\}!$$

mit

$$F(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x^+_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} -c_\alpha x^-_\alpha\,,$$

$${}^*M(\boldsymbol{\lambda}) = \Big\{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, x^+_{n+1}, x^-_{n+1}, \mathbf{y}) \in E_{2n+m+3} \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x^+_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} -a_{r\alpha} x^-_\alpha +$$

$$+ x^+_{n+1} - x^-_{n+1} + y_r = b_r \ (r = 1, \ldots, m),\ \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha x^+_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{n+\alpha} x^-_\alpha +$$

$$+ \lambda_{2n+1} x^+_{n+1} + \lambda_{2n+2} x^-_{n+1} + \sum_{r=1}^{m} \lambda_{2n+2+r} y_r + \lambda_{2n+m+3} y_{m+1} = 0\,,$$

$$x^+_\alpha \geqq 0,\ x^-_\alpha \geqq 0,\ x^+_{n+1} \geqq 0,\ x^-_{n+1} \geqq 0,\ y_r \geqq 0 \ (r = 1, \ldots, m+1;\ \alpha = 1, \ldots, n)\Big\}\,.$$

Die Anzahl der Restriktionsgleichungen in dieser Beschreibung der Menge ${}^*M(\boldsymbol{\lambda})$ ist $m + 1$ gleich und die der Menge

$$\text{(4.5)} \qquad {}^*M = {}^*M(0, \ldots, 0) =$$

$$= \Big\{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, x^+_{n+1}, x^-_{n+1}, \mathbf{y}) \in E_{2n+m+3} \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x^+_\alpha +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} -a_{r\alpha} x^-_\alpha + x^+_{n+1} - x^-_{n+1} + y_r = b_r \ (r = 1, \ldots, m)\,,$$

$$x^+_\alpha, x^-_\alpha, x^+_{n+1}, x^-_{n+1}, y_r \geqq 0 \ (r = 1, \ldots, m+1;\ \alpha = 1, \ldots, n)\Big\}$$

gleicht $m$, wobei die Anzahl der Variablen gleich $2n + m + 3$, also grösser als $m$ ist. Der Rang der Koeffizientenmatrix der Gleichungsrestriktionen in der Definition (4.5) der Menge ${}^*M$ ist offenbar gleich $m$. Die Menge ${}^*M$ kann offenbar in der Gestalt

$$\text{(4.6)} \qquad {}^*M = \Big\{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in E_{n+1} \,\Big|\, \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha + x_{n+1} \leqq b_r \ (r = 1, \ldots, m)\Big\}$$

beschrieben werden. Daraus ergibt sich, dass $^*M \neq \emptyset$ ist, da in der Beschreibung (4.6) der Menge $^*M$ die Variablen $x_\alpha$, die gleich $x_\alpha^+ - x_\alpha^-$, und die Variable $x_{n+1}$, die gleich $x_{n+1}^+ - x_{n+1}^-$ ist, vorzeichen-unbeschränkt sind und der Punkt mit $x_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, $x_{n+1} = \min_{r=1,\ldots,m} \{b_r\}$ der Menge $^*M$ angehört.

Die in der Arbeit [3] entwickelte Theorie kann nun an das Problem (4.4) angewendet werden, da für das Problem (4.4) alle auferlegten Voraussetzungen erfüllt sind. Ausgehend also von dem Problem (4.4), berechnet man nach den theoretischen Ergebnissen aus [3] den Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}_0$ dieses Problems (die zugleich den geometrischen Charakter der Menge $\mathfrak{A}_0$ liefern).

Den Zusammenhang zwischen dem Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}$ des ursprünglichen Problem (4.1) und der Menge $\mathfrak{A}_0$ ergibt sich aus der oben erwähnten Tatsache, dass der Lösbarkeitsbereich des Problems (4.2) ebenfalls gleich $\mathfrak{A}$ ist und aus den Beschreibungen (4.3a,b) der Mengen $\tilde{N}(\boldsymbol{\lambda})$, $^*N(\boldsymbol{\lambda})$ erhält man

$$(4.7) \qquad \mathfrak{A} = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+m+3}) \in \mathfrak{A}_0,\ \lambda_{n+\alpha} = -\lambda_\alpha\ (\alpha = 1, \ldots, n)\,,$$
$$\lambda_{2n+1} = -1,\ \lambda_{2n+2} = 1,\ \lambda_{2n+2+r} = 0\ (r = 1, \ldots, m),\ \lambda_{2n+m+3} = 1\}\,.$$

## BEISPIEL

Betrachten wir ein konkretes Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{u} \in N(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}!$$

mit

$$g(\mathbf{u}) = u_1 - 2u_2 + u_3\,,$$
$$N(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u} \in E_3 \mid (2 + \lambda_1)\, u_1 + (-1 + \lambda_1)\, u_2 + (1 + \lambda_1)\, u_3 = 6,$$
$$u_1, u_2, u_3 \geqq 0\}\,.$$

Die Voraussetzungen 1) bis 3), Spezialfall III, sind da offenbar erfüllt. Der Lösbarkeitsbereich $\mathfrak{A}$ dieses Problems ist, nach [3] gleich dem Lösbarkeitsbereich des Problems

$$\max_{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \in {}^*M(\boldsymbol{\lambda})} \{F(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-)\}!$$

mit

$$F(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-) = 6x_1^+ - 6x_1^-$$
$$^*M(\boldsymbol{\lambda}) = \{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \in E_8 \mid 2x_1^+ - 2x_1^- + x_2^+ - x_2^- + y_1 = 1\,,$$
$$-x_1^+ + x_1^- + x_2^+ - x_2^- + y_2 = -2,\ x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- + y_3 = 1\,,$$
$$\lambda_1 x_1^+ + \lambda_2 x_1^- + \lambda_3 x_2^+ + \lambda_4 x_2^- + \lambda_5 y_1 + \lambda_6 y_2 + \lambda_7 y_3 + \lambda_8 y_4 = 0\,,$$
$$x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, y_1, y_2, y_3, y_4 \geqq 0\}\,.$$

Das Polyeder *M

$$*M = \{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \in E_8 \mid 2x_1^+ - 2x_1^- + x_2^+ - x_2^- + y_1 = 1\,,$$
$$-x_1^+ + x_1^- + x_2^+ - x_2^- + y_2 = -2\,,\ x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^- + y_3 = 1\,,$$
$$x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, y_1, y_2, y_3, y_4 \geqq 0\}$$

besitzt zwei Ecken $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 2, 3, 0, 3, 0)$ und die Vektoren in der Richtung der unbeschränkten Kanten $*M$ sind hier die Vektoren $(0, 1, 0, 1, 3, 0, 2, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 2, 0, 3, 1, 0)$. Daher, nach (1.11), (1.12),

$$\text{(5.1)} \qquad \mathfrak{A}_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_8 \mid \lambda_2 + \lambda_4 + 3\lambda_5 + 2\lambda_7 \geqq 0\,,\ \lambda_3 + \lambda_4 \geqq 0\,,$$
$$\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 \geqq 0\,,\ \lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0\,,\ \lambda_1 + 2\lambda_4 + 3\lambda_6 + \lambda_7 \geqq 0\}\,,$$

$$\text{(5.2)} \qquad \mathfrak{A}_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_8 \mid \lambda_2 + \lambda_4 + 3\lambda_5 + 2\lambda_7 \leqq 0\,,\ \lambda_3 + \lambda_4 \leqq 0\,,$$
$$\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 \leqq 0\,,\ \lambda_1 + \lambda_2 \leqq 0\,,\ \lambda_1 + 2\lambda_4 + 3\lambda_6 + \lambda_7 \leqq 0\}\,.$$

$$\text{(5.3)} \qquad U_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_1 \mid 2\lambda_4 + 3\lambda_5 + 3\lambda_7 > 0\,,\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_7 > 0\}\,,$$
$$U_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{A}_2 \mid 2\lambda_4 + 3\lambda_5 + 3\lambda_7 < 0\,,\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_7 < 0\}\,,$$

$$\text{(5.4)} \qquad S = {}'E_8 - (U_1 \cup U_2)\,.$$

Es bleibt noch übrig die Menge $T$ aus (1.14a,b,c) zu bestimmen um die Menge $\mathfrak{A}_0$ laut (1.10) zu beschreiben. Das Problem

$$\max_{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \in *M} \{F(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-)\}!$$

ist unlösbar (denn die Summe $\sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}h_\alpha c_\alpha$, $\nu = 1, 2$ liefer $-6 < 0$, $6 > 0$, voraus nach [3], Satz 7 die Unlösbarkeit folgt). Daraus und aus [3], Satz 5, folgt $T \neq {}'E_8$. Für die Mengen $*T_1$, $*T_2$ aus (1.15) erhalten wir

$$*T_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_8 \mid 6\lambda_1 - 6\lambda_2 \leqq 0,\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 = 0,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6 = 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_7 = 0,$$
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_8 \leqq 0\}\,,$$
$$*T_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_8 \mid 6\lambda_1 - 6\lambda_2 \geqq 0,\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 = 0,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6 = 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_7 = 0,$$
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_8 \geqq 0\}\,.$$

Die Vektoren in Richtung den Kanten des Kegels $*T_1$ sind

$${}^1\mathbf{k} = (0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 0)\,,\quad {}^2\mathbf{k} = (0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0)\,,$$
$${}^3\mathbf{k} = (-1, 0, 0, -2, 0, -3, -1, 0)\,,\quad {}^4\mathbf{k} = (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\,.$$

Die Formel (1.16) liefert

$$0 = 0 \Rightarrow 1 \in I_2\,, \quad 0 = 0 \Rightarrow 2 \in I_2\,, \quad -6 < 0 \Rightarrow 3 \in I_1\,,$$
$$-6 + 6 = 0 \Rightarrow 4 \in I_2\,.$$

Nach (1.14a,b,c) ist

$$T = T' \cup T''\,, \tag{5.5}$$

wo

$$T' = \{\lambda \in {}'E_8 \mid -\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 \leqq 0\,, \ -\lambda_3 - \lambda_4 \leqq 0\,,$$
$$-\lambda_1 - 2\lambda_4 - 3\lambda_6 - \lambda_7 < 0, \ -\lambda_1 - \lambda_2 \leqq 0\}\,,$$

$$T'' = \{\lambda \in {}'E_8 \mid -\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 \geqq 0\,, \ -\lambda_3 - \lambda_4 \geqq 0\,,$$
$$-\lambda_1 - 2\lambda_4 - 3\lambda_6 - \lambda_7 > 0, \ -\lambda_1 - \lambda_2 \geqq 0\}\,.$$

Die Menge $T$ aus (5.5) und $S$ aus (5.4) bestimmen nach (1.10) die Menge $\mathfrak{A}_0$. Nach (4.7) folgt für $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ aus (5.1), (5.2)

$$\mathfrak{A}_1 = \{\lambda_1 \in {}'E_1 \mid -2 \leqq \lambda_1 \leqq 1\}\,, \quad \mathfrak{A}_2 = \emptyset\,,$$

für $U_1$, $U_2$ aus (5.3)

$$U_1 = \{\lambda_1 \in {}'E_1 \mid -1 < \lambda_1 \leqq 1\}\,, \quad U_2 = \emptyset\,,$$

für $S$ aus (5.4)

$$S = \{\lambda_1 \in {}'E_1 \mid \lambda_1 \leqq -1,\ \lambda_1 > 1\}$$

und für $T$ (5.5)

$$T = \{\lambda_1 \in {}'E_1 \mid \lambda_1 > -2\}\,.$$

Daraus und aus (4.7) folgt

$$\mathfrak{A} = \{\lambda_1 \in {}'E_1 \mid -2 < \lambda_1 \leqq -1,\ \lambda_1 > 1\}\,.$$

*Literatur*


[1] *Sommermeier K.:* Koeffizientenänderung in der linearen Optimierung. Mathematische Operationsforschung und Statistik. Band 2/72, Berlin.

[2] *Gál T., Nedoma J.:* Systematische lineare Parametrisierung des Vektors der rechten Seiten, beziehungsweise des Preise-Vektors mit beliebiger (endlicher) Anzahl von Parametern in der Aufgabe der linearen Programmierung. EML ČSAV, Praha 1969.

[3] *Grygarová L.:* Die Lösbarkeit eines linearen Optimierungsproblems unter Zufügung einer weiteren Restriktionsbedingung. Aplikace matematiky 5, 17 (1972) 352—387.

Souhrn

# OBOR ŘEŠITELNOSTI PROBLÉMU LINEÁRNÍHO PARAMETRICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ S PARAMETRY V KOEFICIENTECH MATICE LINEÁRNÍCH OMEZENÍ

LIBUŠE GRYGAROVÁ

Předložená práce se zabývá problémem lineárního parametrického programování s parametry v matici koeficientů lineárních omezení, přičemž v koeficientech každého řádku matice se vyskytuje stejný parametr. Tato práce je založena na práci „Obor řešitelnosti problému lineárního programování s přidáním další omezující podmínky".

V práci je popsán obor řešitelnosti tří speciálních problémů:

$$(1) \qquad \min_{\mathbf{u}\in\mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}!\,,$$

kde

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r\,, \quad \mathfrak{N}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u}\in E_{m+1} \mid \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha}u_r + \lambda_\alpha u_{m+1} \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\}\,.$$

Označíme-li obor řešitelnosti tohoto problému (1) jako $\mathfrak{A}_0$, potom platí

$$\mathfrak{A}_0 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda} \in S_0 \cap T\}\,,$$

kde

$$S_0 = {}'E_n - ({}_0U_1 \cup {}_0U_2)\,,$$

$${}_0U_1 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{A}_1,\ \varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) > 0\}\,, \quad {}_0U_2 = \{\boldsymbol{\lambda} \in {}'E_n \mid \boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{A}_2,\ \varphi_2(\boldsymbol{\lambda}) < 0\}\,,$$

$$T = T' \cup T''\,,$$

$$T' = \{\boldsymbol{\lambda}\in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha\lambda_\alpha < 0 \ \ \nu\in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha\lambda_\alpha \leqq 0 \ \ \nu\in I_2\}\,,$$

$$T'' = \{\boldsymbol{\lambda}\in {}'E_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha\lambda_\alpha > 0 \ \ \nu\in I_1,\ \sum_{\alpha=1}^{n} {}^{\nu}k_\alpha\lambda_\alpha \geqq 0 \ \ \nu\in I_2\}\,.$$

$$(2) \qquad \min_{\mathbf{u}\in N(\boldsymbol{\lambda})} \{g(\mathbf{u})\}!\,,$$

kde

$$N(\boldsymbol{\lambda}) = \{\mathbf{u}\in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_\alpha)\, u_r \geqq c_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n)\}\,.$$

Pro obor řešitelnosti $\mathfrak{A}$ tohoto problému (2) platí

$$\mathfrak{A} = \{\boldsymbol{\lambda}\in {}'E_n \mid (\boldsymbol{\lambda}, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}) = (\boldsymbol{\lambda}, -1, 1) \in \mathfrak{A}'_0\}$$

kde $\mathfrak{A}_0'$ odpovídá množině $\mathfrak{A}_0$ v prostoru $E_{n+2}$ .

$$\min_{\mathbf{u} \in N(\lambda)} \{g(\mathbf{u})\}!\,, \tag{3}$$

kde

$$N(\lambda) = \{\mathbf{u} \in E_m \mid \sum_{r=1}^{m} (a_{r\alpha} + \lambda_\alpha)\, u_r = c_\alpha\,, \quad u_r \geqq 0 \;(r = 1, \ldots, m;\; \alpha = 1, \ldots, n)\}\,.$$

Obor řešitelnosti $\mathfrak{A}$ tohoto problému (3) je dán vztahem

$$\mathfrak{A} = \{\lambda \in {}'E_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n+m+3}) \in \mathfrak{A}_0'',\; \lambda_{n+\alpha} = -\lambda_\alpha \;(\alpha = 1, \ldots, n)\,,$$
$$\lambda_{2n+1} = -1,\; \lambda_{2n+2} = 1,\; \lambda_{2n+2+r} = 0 \;(r = 1, \ldots, m),\; \lambda_{2n+m+3} = 1\}\,,$$

kde $\mathfrak{A}_0''$ odpovídá množině $\mathfrak{A}_0$ v prostoru $E_{2n+m+3}$.

*Anschrift des Verfassers:* RNDr. *Libuše Grygarová*, CSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Malostranské nám. 25, Praha 1.