Julius Csontó; Jindřich Spal

Numerische Lösung algebraischer Gleichungen mittels Anwendung eines Wurzelortverfahrens

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 2, 113–123

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103400`

NUMERISCHE LÖSUNG ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN MITTELS ANWENDUNG EINES WURZELORTVERFAHRENS

JULIUS CSONTÓ und JINDŘICH SPAL

(Eingegangen am 11. Januar 1971)

I. GRUNDGEDANKE DER METHODE

Das im weiteren angeführte Verfahren zur numerischen Lösung algebraischer Gleichungen beruht auf den Gesetzmässigkeiten der Veränderlichkeit von Wurzeln einer algebraischen Gleichung bei der Änderung ihrer Koeffizienten [1, 2].

Bei der Lösung wird aus einer frei wählbaren Schätzungsgleichung derselben Ordnung wie die zu lösende Gleichung ausgegangen. Die Wurzeln der Schätzungsgleichung sind bekannt, oder lassen sich auf eine einfache Weise berechnen.

Die eigentliche Berechnung wendet ein Iterationsverfahren an, wobei die Werte der Koeffizienten der Schätzungsgleichung an diejenigen der zu lösenden Gleichung genähert werden. Gleichzeitig werden die Werte aller veränderlichen Wurzeln der Schätzungsgleichung inkrementell mitberechnet.

Beim vollständigen Ausgleich der Koeffizienten beider Gleichungen stimmen auch deren Wurzeln überein. Soweit die Wurzeln stetige Funktionen der Gleichungskoeffizienten darstellen, geben die auf iterativem Wege gewonnenen Wurzelwerte beim Ausgleich der Koeffizienten angenäherte Werte von Wurzeln der zu lösenden Gleichung an, die nachträglich noch korrigiert werden können.

II. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Die algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten:

$$M(p) = \sum_{k=0}^{n} c_k p^k = 0 \tag{1}$$

wird im weiteren in normierter Form mit $c_n = 1$ vorausgesetzt. Die Einführung einer Wurzel p_j nach (1) ergibt grundsätzlich eine implizite Schreibweise der Abhängigkeit dieser Wurzel von den Koeffizienten:

(2) $$p_j = p_j(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$$

Die Änderung eines Koeffizienten c_m um den Betrag Δc_m:

(3) $$c_m^* = c_m + \Delta c_m$$

hat eine Änderung der Werte aller Wurzeln zur Folge. Die Wurzel p_j nehme dabei den Wert

(4) $$p_j^* = p_j + \Delta p_j$$

an. Der Einsatz von (3), (4) nach (1) anstelle von c_m, p gibt:

(5) $$\Delta c_m(p_j + \Delta p_j)^m = -\sum_{k=0}^{n} c_k(p_j + \Delta p_j)^k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{M^{(k)}(p_j)}{k!}(\Delta p_j)^k .$$

Der letzte Ausdruck stellt die Entwicklung des Polynoms $M(p_j + \Delta p_j)$ in die Taylor-Reihe dar, unter Rücksichtnahme, dass p_j der ursprünglichen Gleichung genügeleistet.

Die Beziehung (5) setzt keine Begrenzung für die Werte der Zuwächse Δp_j, Δc_m voraus. Es ist jedoch die Forderung zu berücksichtigen, dass Δc_m reell sein soll.

Für die weitere Anwendung sind besonders Beziehungen von Wichtigkeit, die durch den Grenzübergang $\Delta p_j \to 0$, $\Delta c_m \to 0$ gewonnen werden.

Im Falle einer einfachen Wurzel p_j sind sämtliche $M^{(k)}(p_j)$ in (5) von Null verschieden. Der Grenzübergang liefert eine Wurzelempfindlichkeitsfunktion:

(6) $$V_{mj}(p_j; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = \lim_{c_m \to 0} \frac{\Delta p_j}{\Delta c_m} = \frac{\partial p_i}{\partial c_m} =$$
$$= \lim_{p_j \to 0} \frac{-(p_j + \Delta p_j)^m}{\sum_{k=1}^{n} \frac{M^{(k)}(p_j)}{k!}(\Delta p_j)^{k-1}} = \frac{-p_j^m}{M'(p_j)} .$$

Aus (6) folgt für die Empfindlichkeiten derselben Wurzel p_j in bezug auf verschiedene Koeffizienten der Gleichung die Rekurrentformel:

(7) $$V_{m+1,j} = p_j V_{m,j} .$$

Ist p_j eine r-fache Wurzel der Gleichung (1), dann sind die ersten $(r-1)$ Ableitungen $M^{(k)}(p_j)$ gleich Null. Die Formel (5) ergibt in diesem Falle:

(8) $$\left(\frac{\Delta p_j}{|\sqrt[r]{(\Delta c_m)}|}\right)^r = \frac{-(p_j + \Delta p_j)^m}{\sum_{k=r}^{n} \frac{M^{(k)}(p_j)}{k!}(\Delta p_j)^{k-r}} .$$

Diese Beziehung lässt auch einen Grenzübergang zu, welcher wiederum eine Wurzelempfindlichkeitsfunktion besonderer Art liefert:

$$W_{mj} = \lim_{\Delta c_m \to 0} \frac{\Delta p_j}{\left|\sqrt[r]{(\Delta c_m)}\right|} = \left(\mp \frac{r!\, p_j^m}{M^{(r)}(p_j)}\right)^{1/r}. \tag{9}$$

Das negative Vorzeichen bezieht sich auf positive Zuwächse Δc_m, das positive Vorzeichen auf negative Zuwächse Δc_m.

Die Bezeichnung

$$N_m(p_j) = |N_m|\, e^{i\varphi_m} = \frac{-r!\, p_j^m}{M^{(r)}(p_j)} \tag{10}$$

führt zur Formel:

$$W_{mj} = \left|\sqrt[r]{N_m}\right| e^{i\psi}\,. \tag{11}$$

wobei für positive Δc_m:

$$\psi = \frac{1}{r}\left(\varphi_m + (2k + 1)\,\pi\right), \tag{12a}$$

für negative Δc_m:

$$\psi = \frac{1}{r}\left(\varphi_m + 2k\pi\right), \tag{12b}$$

mit $k = 0, 1, 2, \ldots, r - 1$ ist.

Die Analyse der Empfindlichkeit einer Nullwurzel der Gleichung (1) erfordert eine Sonderbehandlung. In diesem Falle ergeben nämlich die Formeln (6), bzw. (9) unbestimmte Ausdrücke.

Eine algebraische Gleichung mit einer s-fachen Nullwurzel hat die Form

$$\sum_{k=s}^{n} c_k p^k = 0 \tag{13}$$

und lässt eine direkte Beurteilung zu.

Eine Nullwurzel erreicht genau dann einen von Null verschiedenen Wert, wenn irgendeiner der Koeffizienten c_m für $m < s$, der ursprünglich den Wert Null besass, einen endlichen Wert $\Delta c_m \neq 0$ annimmt. Die Änderung dieses Koeffizienten c_m ruft die Entstehung von $(s - m)$ von Null unterschiedlichen Wurzeln hervor. Die übrigen m Nullwurzeln behalten auch weiterhin den Wert Null.

Die Änderung eines beliebigen Koeffizienten c_k mit $k \geqq s$ beeinflusst nicht die Werte der Nullwurzeln.

Der Zuwachs der ursprünglichen Nullwurzel ist allerdings mit ihrem endgültigen Wert identisch, so dass es zweckmässig erscheint, den endgültigen Wert direkt durch p_{0m} zu bezeichnen. Für $m < s$ gilt

$$\Delta c_m\, p_{0m}^m + \sum_{k=s}^{n} c_k\, p_{0m}^k = 0\,. \tag{14}$$

Daraus folgt für endliche Werte von Δc_m

$$\left(\frac{p_{0m}}{\left|\sqrt[s-m]{(\Delta c_m)}\right|}\right)^{s-m} = \frac{-1}{\sum\limits_{k=s}^{n} c_k \cdot p_{0m}^{k-s}}\,. \tag{15}$$

Der Grenzübergang ergibt

$$W_{m0} = \left(\frac{\partial p_{0m}}{\partial \Delta c_m}\right)_{p_{0m}\to 0} = \lim_{\Delta c_m \to 0} \frac{p_{0m}}{\left|\sqrt[s-m]{(\Delta c_m)}\right|} = \frac{1}{\left|\sqrt[s-m]{c_s}\right|}\, e^{i\psi}\,. \tag{16}$$

Dabei ist für positive Δc_m:

$$\psi = \frac{2k+1}{s-m}\,\pi \tag{17a}$$

für negative Δc_m:

$$\psi = \frac{2k}{s-m}\,\pi \tag{17b}$$

$k = 0, 1, \ldots, s - m - 1$.

Aufgrund der vorgehenden Analyse lassen sich Gesetzmässigkeiten der Wurzeländerungen, d. h. der Wurzelbewegung in der komplexen Wurzelebene, formulieren, die durch die Änderung von Koeffizienten einer algebraischen Gleichung hervorgerufen werden. Es seien nur diejenigen Resultate angeführt, die im weiteren benutzt werden:

Regel 1. Die Bewegung einer einfachen reellen Wurzel, die durch eine genügend kleine reelle Änderung eines beliebigen Koeffizienten der Gleichung hervorgerufen wird, geschieht immer der reellen Achse entlang.

Regel 2. Benachbarte einfache reelle Wurzeln bewegen sich bei der Änderung eines beliebigen Koeffizienten der Gleichung immer in entgegengesetzten Richtungen.

Regel 3. In der Umgebung einer r-fachen Wurzel gibt es $(2r)$ Richtungen, in denen die elementare Veränderung dieser Wurzel bei einer elementaren Änderung eines Koeffizienten c_m vor sich geht. Diese Richtungen bilden einen regelmässigen Stern, der weiterhin in zwei regelmässige Sterne zerlegt werden kann. Einer dieser Sterne entspricht positiven Zuwächsen, der andere negativen Zuwächsen dieses Koeffizienten. Die Absolutwerte der elementaren Wurzeländerungen sind für alle Richtungen gleich gross und haben die Ordnungsgrösse $\left|\sqrt[r]{(\Delta c_m)}\right|$.

Regel 4. Die Änderung einer s-fachen Nullwurzel geht bei der Änderung des Koeffizienten c_m, wobei m kleiner als s ist, in insgesamt $2(s - m)$ Richtungen vor sich, die wiederum einen regelmässigen Doppelstern bilden, wobei ein Stern den positiven, der andere den negativen Zuwächsen des ursprünglichen Nullkoeffizienten entspricht. Die Änderung betrifft $(s - m)$ Nullwurzeln. Die übrigen m Nullwurzeln bleiben durch die Änderung des Koeffizienten c_m unangetastet. Die Absolutwerte der elementaren Wurzelzuwächse sind für alle Richtungen gleich gross und besitzen die Ordnungsgrösse $|\sqrt[s-m]{(\Delta c_m)}|$. Durch die Änderung von Koeffizienten, deren Ordnungszahl gleich oder grösser als s ist, werden die Nullwurzeln nicht beeinflusst.

Regel 5. Der Übergang reeller Wurzeln in komplexe oder rein imaginäre Wurzelpaare und umgekehrt geschieht immer über eine zwei- oder mehrfache Wurzel gerader Ordnung.

Die Problematik der Regel 5 wird im weiteren noch näher angegangen.

III. WURZELBAHNEN

Zur Feststellung von Wurzelbahnen reeller oder komplexer Wurzeln ist es möglich, ein auf der Beziehung (6) beruhendes iteratives Verfahren anzuwenden. Dabei erfordern die Übergänge durch eine mehrfache Wurzel eine besondere Aufmerksamkeit. Mehrfache Wurzeln kommen bei der numerischen Lösung aus zwei Gründen vor:

1. Bei der Wahl einer mehrfachen Wurzel in der Schätzungsgleichung .
2. Durch die Bildung einer mehrfachen Wurzel im Verlaufe des Iterationsverfahrens. In diesem Falle sind weiter folgende Fälle zu unterscheiden:
   - 2a) Die Bildung einer reellen mehrfachen Wurzel.
   - 2b) Die Bildung komplexer mehrfacher Wurzelpaare.

Im Fall 1) wird für den Anfang des iterativen Verfahrens die Regel 3 angewendet. Nach dem Zerfall der mehrfachen Wurzel wird die Iteration nach dem für einfache Wurzeln anwendbaren Verfahren fortgesetzt.

Der Fall 2a) stellt die einzige Möglichkeit gegenseitiger Übergänge von reellen Wurzeln und komplexen Wurzelpaaren und kann in den meisten Fällen nicht umgangen werden.

Der Fall 2b) kann durch eine kleine Verstimmung eines beliebigen Koeffizienten, mit Ausnahme desjenigen, nach dem das Iterationsverfahren vor sich geht, ausgeschieden werden. Dabei werden zwar stark gebogene, jedoch glatte Wurzelbahnen gebildet [2] und die Iteration kann ungestört nach den für einfache Wurzeln gültigen Prinzipien durchgeführt werden.

IV. WAHL DER SCHÄTZUNGSGLEICHUNG

Aus dem Grundgedanken der Methode ergeben sich nur zwei Anforderungen an die Schätzungsgleichung:

1. Dieselbe Ordnung wie die zu lösende Gleichung.

2. Die Kenntnis oder eine leichte Bestimmbarkeit ihrer Wurzeln.

Durch eine geeignete Wahl der Schätzungsgleichung kann der Verlauf der Lösung beeinflusst werden. Dies betrifft Begrenzung, oder sogar Minimalisierung der Anzahl der Übergänge durch mehrfache Wurzeln; eine Verminderung notwendiger Iterationsschritte usw. Die Analyse derartiger zusätzlicher Gesichtspunkte überschreitet den Rahmen dieser Abhandlung.

Als Beispiel sei ein für algebraische Gleichungen beliebiger Ordnung anwendbares Verfahren angeführt, wenn auch es die angedeuteten zusätzlichen Gesichtspunkte nicht berücksichtigt.

Bei der numerischen Lösung der algebraischen Gleichung (1) kann folgende Schätzungsgleichung gewählt werden:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot p^k = 0 \tag{18}$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad \text{für alle} \quad 0 \leqq k \leqq n-3 \\ a_k &= c_k \quad \text{für} \quad n-2 \leqq k \leqq n \end{aligned}$$

Eine solche Schätzunggleichung besitzt eine $(n-2)$-fache Nullwurzel. Die übrigen zwei Wurzeln sind mit den Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$c_n p^2 + c_{n-1} p + c_{n-2} = 0 \tag{19}$$

gleichwertig.

Das Iterationsverfahren geht derart vor sich, dass zuerst der Nullkoeffizient a_{n-3} an den Wert c_{n-3} genähert wird, was eine Verminderung der Vielfachtkeit der Nullwurzel um Eins zur Folge hat. Bei der Iteration werden die Werte aller drei Wurzeln, die durch das Verfahren betroffen sind, laufend inkrementell berechnet. Nach dem Erreichen des endgültigen Wertes des Koeffizienten, d. h. wenn

$$a_{n-3} = c_{n-3} \tag{20}$$

werden anschliessend alle folgenden Nullkoeffizienten der Schätzungsgleichung auf dieselbe Weise behandelt, bis schliesslich nach dem Erreichen

$$a_0 = c_0 \tag{21}$$

der Berechnungsgang abgebrochen wird.

Die endgültigen Wurzelwerte stellen eine angenäherte Lösung der zu lösenden algebraischen Gleichung dar. Die Möglichkeit einer Verfeinerung des Resultates ist im Abschnitt VI. erwähnt.

V. DURCHGANG DURCH EINE MEHRFACHE WURZEL

Beim Durchgang durch eine mehrfache Wurzel sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Knoten ungerader Ordnung, in dem eine ungerade Anzahl von Wurzeln zusammentrifft
2. Knoten gerader Ordnung, in dem eine gerade Anzahl von Wurzeln zusammentrifft.

In Knoten ungerader Ordnung gibt es im $(2r)$-schenkeligen Stern für jede durchlaufende Wurzel eine glatte Bahn, der entlang der Durchgang ohne sprunghafte Änderung der Richtung vor sich geht. Beim Durchgang durch einen solchen Knoten ändert sich weder die Anzahl reeller Wurzeln, noch die Anzahl komplexer Wurzeln. Dieser Fall vermittelt deshalb keine Umwandlung von reellen Wurzelpaaren in komplexe konjugierte Wurzelpaare. Es ist nicht notwendig die Iteration zu unterbrechen. Der Durchgang einer derartigen mehrfachen Wurzel ungerader Ordnung macht sich nur durch einen vorübergehenden Anstieg der Wurzelempfindlichkeit, d. h. durch eine Beschleunigung der Wurzelbewegung, bemerkbar.

Ein Knoten gerader Ordnung ist der einzige Fall, wo tatsächlich die Umwandlung eines Paares reeller Wurzeln in ein Paar komplexer konjugierter Wurzeln, oder der umgekehrte Vorgang, stattfindet. Dabei ist eine besondere Behandlung erforderlich.

Die Problematik der Iteration in der Nähe einer mehrfachen Wurzel gerader Ordnung besteht aus zwei Aufgaben:

1. Die Anzeige einer solchen Wurzel in den Grenzen des letzten iterativen Schrittes.
2. Die Bearbeitung des Durchganges durch die Wurzel.

Für die Anzeige des Durchganges einer reellen Wurzel durch eine mehrfache Wurzel gerader Ordnung kann der Umstand benutzt werden, dass dieser Durchgang mit einer Änderung des Vorzeichens der Ableitung des Gleichungspolynoms verbunden ist.

Eine Gleichung mit einer r-fachen reellen Wurzel p_h kann in folgender Form geschrieben werden:

$$M(p) = (p - p_h)^r \,.\, R(p) = 0 \tag{22}$$

Dabei ist $R(p_j) \neq 0$.

Die Ableitung des Polynoms $M(p)$ hat die Form:

$$M'(p) = (p - p_h)^{r-1} \,.\, [r \,.\, R(p) + (p - p_h) \,.\, R'(p)] \,. \tag{23}$$

Wenn der letzte iterative Schritt eine mehrfache Wurzel p_h durchgeht, kommt es dabei zum Vorzeichenwechsel der Differenz $(p - p_h)$. Das Polynom $R(p)$ behält dagegen in einer gewissen Umgebung der mehrfachen Wurzel p_h sein Vorzeichen. Für sehr kleine $(p - p_h)$ ist das andere Glied in der Klammer, d. h.

$$(p - p_h) \, . \, R'(p)$$

wenigstens in einer kleinen Umgebung der Wurzel p_h ordnungsmässig kleiner als das Glied $r \, . \, R(p)$ und beeinflusst nicht das Vorzeichen des Ausdruckes in der Klammer. Der Vorzeichenwechsel hängt daher vom Vorzeichenwechsel des Faktors

$$(p - p_h)^{r-1}$$

ab. Bei ungeradem r ist $(r - 1)$ gerade und die Ableitung (23) behält in einer gewissen Umgebung der Wurzel p_h das Vorzeichen. Bei geradem r ist $(r - 1)$ ungerade und die Ableitung (23) ändert beim Durchgang dieser Wurzel das Vorzeichen infolge der Änderung des Vorzeichens der Differenz $(p - p_h)$.

Die Änderung des Vorzeichens der ersten Ableitung des Gleichungspolynoms während der Iteration ist deshalb eine Anzeige, dass während des letzten iterativen Schrittes ein Übergang eines reellen Wurzelpaares in ein Paar komplexer konjugierter Wurzeln stattgefunden hat und dass deshalb eine Sonderbehandlung erforderlich ist.

Diese Sonderbehandlung besteht aus drei Schritten:

a) Bestimmung des Wertes der mehrfachen Wurzel.

b) Bestimmung der Vielfachheit der Wurzel.

c) Anfang einer neuen Iteration nach dem Zerfall der mehrfachen Wurzel.

Die numerische Bestimmung des Wertes der mehrfachen reellen Wurzel ist mit Schwierigkeiten verbunden. Es genügt jedoch diesen Wert abzuschätzen. Zu diesem Zwecke ist zum Beispiel die lineare Interpolationsformel anwendbar:

$$p_h = p_0 + \frac{M'(p_0)}{M'(p_0) - M'(p_0 + \Delta p)} \Delta p \,, \tag{24}$$

wobei

p_0 den Wurzelwert vor der Vorzeichenänderung

und Δp den iterativen Schritt der Wurzel, welcher die Vorzeichenänderung begleitete,

bedeutet.

Die Formel (24) ergibt allgemein als Resultat eine komplexe Grösse, deren reeller Teil als der geschätzte Wert der mehrfachen Wurzel angenommen werden kann.

Die Mehrfachheit der Wurzel kann derart bestimmt werden, dass alle ungeraden Ableitungen des Gleichungspolynoms auf die vorangeführte Weise auf Vorzeichenwechsel geprüft werden. Die Ordnung der letzten Ableitung, bei der der Vorzeichenwechsel stattgefunden hat, erhöht um Eins, gibt die gesuchte Mehrfachheit der Wurzel.

VI. KORREKTION DES RESULTATES

Die Anwendung endlicher iterativer Schritte, sowie die Abschätzung der Werte der mehrfachen Wurzeln, haben Ungenauigkeiten der numerischen Lösung zur Folge. In den meisten Fällen ist es empfehlenswert, oder sogar notwendig, das Resultat zu korrigieren.

Eine Korrektur kann so vollzogen werden, dass aus dem gefundenen Resultat durch Multiplikation der Wurzelfaktoren das entsprechende Polynom errechnet wird:

$$M_0(p) = \prod_{k=1}^{n} (p - p_k) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot p^k . \tag{25}$$

Die Koeffizienten b_k dieses Polynoms stimmen allgemein nicht mit den Koeffizienten der zu lösenden Gleichung (1) überein. Die Korrektur geschieht durch nochmalige Anwendung des Iterationsverfahrens, das meistens ohne Schwierigkeiten nach wenigen Schritten zum genügend genauen Ergebnis führt.

VII. BLOCKSCHEMA DER BERECHNUNG

Ein grobes Blockschema der Berechnung ist im Bild 1 angegeben. Die Funktion einzelner Blöcke wurde im vorgehenden behandelt. Die folgende Beschreibung beschränkt sich auf kurze Hinweise. Block 4 berechnet auf iterativem Wege inkrementell unter Anwendung der Formel (6) neue Werte sämtlicher n Wurzeln der Schätzungsgleichung bei der Änderung der Beiwerte. Im Block 5 wird untersucht, ob innerhalb des letzten Iterationsschrittes eine mehrfache Wurzel gerader Ordnung vorgekommen ist. Block 7 führt die Sonderbehandlung der mehrfachen Wurzel gerader Ordnung durch. Dieser Vorgang liefert wieder eine Gesamtheit von einfachen Wurzeln, die zum Eingang des Blockes 4 zur Fortsetzung des iterativen Verfahrens gelangen. Block 6 schliesst die Abstimmung eines Koeffizienten c_h ab. Block 8 vermittelt einen rückwertigen Schritt beim Überschreiten des Wertes c_h im letzten iterativen Schritt. Block 11 sichert abschliessend die Korrektur des Resultates.

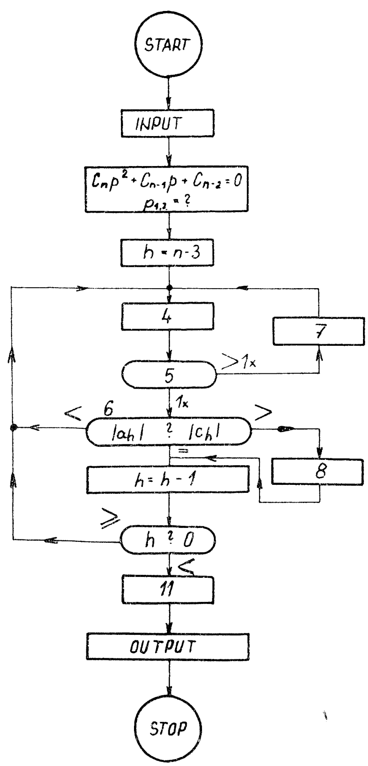

Abb. 1.

Die praktische Lösung sei am Beispiel der numerischen Gleichung

$$p^3 + 7p^2 + 12p + 10 = 0$$

mit den Wurzeln

$$p_1 = -5\,, \quad p_{2,3} = -1 \pm i$$

vorgeführt.

Als Schätzungsgleichung wurde die Gleichung

$$p^3 + 7p^2 + 12p = 0$$

mit den Wurzeln

$$p_{10} = -3\,, \quad p_{20} = -4\,, \quad p_{30} = 0$$

gewählt.

Im Bild 2 sind theoretische Wurzelbahnen der Annäherung des absoluten Gliedes eingezeichnet. Die zweifache Wurzel, die während der Iteration durchlaufen wird, besitzt den Wert

$$p_d = -1{,}13146\ldots$$

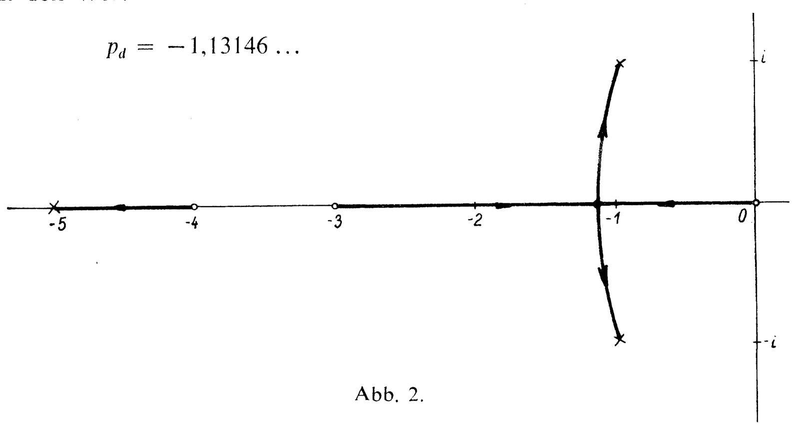

Abb. 2.

Tatsächliche Wurzelbahnen, die bei der Iteration durchlaufen werden, unterscheiden sich nur unwesentlich von den theoretischen und führen zur approximierten zweifachen Wurzel

$$p_{dapr} = -1{,}13532\,.$$

Die numerische Lösung ergab als Ergebnis

$$p_{1n} = -5{,}0042\,, \quad p_{2,3n} = -0{,}9972 \pm 1{,}0198i$$

und nach der Korrektur des Resultates

$$p_{1k} = -5{,}00002\,, \quad p_{2,3k} = -1{,}00013 \pm 0{,}99863i\,.$$

Die Lösung führte in 104 Iterationsschritten zum Ergebnis. Die Korrektur des Resultates bestand aus 3 Iterationsschritten.

Literatur

[1] *Spal J.:* Algebraic approach of the root-loci method Kybernetika (Praha) *6*, No. 5 (1970).
[2] *Csontó J.:* Das Verhalten dynamischer Systeme mit mehrfachen komplexen Wurzeln deren charakteristischer Gleichungen. Kybernetika (Praha) *7*, No 5 (1971).

Souhrn

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC POUŽITÍM KOŘENOVÝCH TRAJEKTORIÍ

JULIUS CSONTÓ, JINDŘICH SPAL

Uvádí se základní myšlenka, teoretický základ a některá hlediska praktického provedení pro novou metodu numerického řešení algebraických rovnic. Řešení vychází z odhadové rovnice a je založeno na iteračním postupu, při němž se vyrovnávají hodnoty součinitelů odhadové a řešené rovnice za současného inkrementálního určování hodnot kořenů přizpůsobované rovnice. Teoretickým základem jsou některé souvislosti součinitelů a kořenů algebraické rovnice. Zvláštní pozornost se věnuje vícenásobným kořenům se sudou násobností, které zprostředkují přechod mezi dvojicemi reálných kořenů a dvojicemi sdružených komplexních kořenů. Uvádí se blokové schéma výpočtu a použití se ilustruje na číselném příkladu.

Anschrift der Verfasser: Prof. Ing. *Jindřich Spal,* CSc., Ing. *Julius Csontó,* Vysoká škola technická, Švermova 3A, Košice.