Miloslav Nekvinda

Einige Fragen der Theorie der Luftschmierung

Aplikace matematiky, Vol. 17 (1972), No. 1, 56–68

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103393

EINIGE FRAGEN DER THEORIE DER LUFTSCHMIERUNG

MILOSLAV NEKVINDA

(Eingegangen am 19. Januar 1971)

Im folgenden Beitrag wird die Druckverteilung in einem radialen Luftlager von unendlicher Länge untersucht. Es wird der Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Reynoldsschen Gleichung bewiesen.

Formelzeichen

e	Entfernung der Zapfenmitte von der Lagermitte (Exzentrizität);
h	Höhe des Lagerspaltes;
p	Gasdruck im Lager;
r	Radius der Lagerwelle;
R	Radius des Lagers;
U	Umfangsgeschwindigkeit der Lagerwelle;
t	Zeit;
y, z	Koordinaten;
α	Winkel;
$\delta = R - r$;	
η	dynamische Gasviskosität;
$\Phi = 6\eta U r$	Lagerparameter.

1. EINLEITUNG

Ist ein Querlager endlicher Länge vorhanden, so genügt der Gasdruck p im Spalt zwischen dem rotierenden Zapfen und dem Lager der Reynoldsschen Gleichung (siehe z. B. [1]):

$$(1.1) \qquad 12\eta \frac{\partial}{\partial t}(hp) = \frac{6\eta U}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha}(hp) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Die Bedeutung der Variablen geht aus Abb. 1 hervor, wo das Lager und der Zapfen in einem zur Lagerachse senkrechten Schnitt dargestellt werden, sowie aus Abb. 2, die eine Gesamtansicht des Lagers gibt. Es wird vorausgesetzt, dass die Lagerachse mit der Zapfenachse parallel verläuft. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Exzentrizität e und somit auch die Höhe des Lagerspaltes h so gegeben sind, dass sich die resultierende Kraft des auf den Zapfen wirkenden aerodynamischen Gasdruckes im Gleichgewicht mit seiner äusseren Belastung befindet.

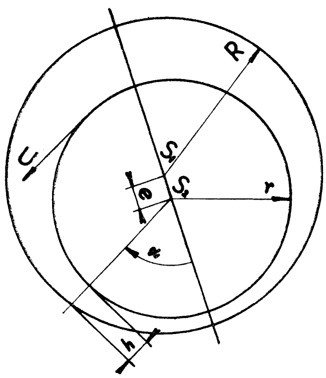

Abb. 1.

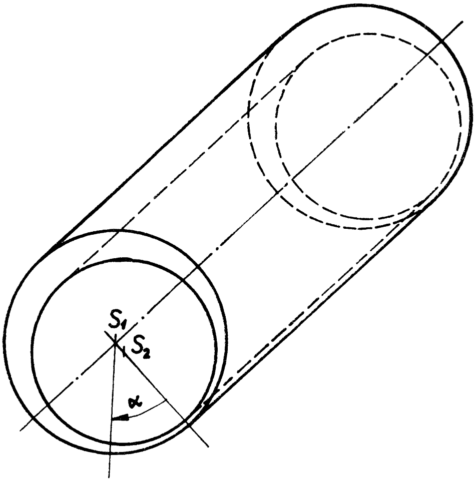

Abb. 2.

Im weiteren Verlauf unserer Untersuchungen werden wir zu gewissen vereinfachenden Voraussetzungen greifen. So werden wir vor allem ein Lager von unendlicher Länge untersuchen; ferner werden wir voraussetzen, dass es sich um einen stationären Vorgang handelt, d. h. dass sich die Lage der Zapfenachse (auf Abb. 1 ist die Lagerachse mit Hilfe des Punktes S_2 dargestellt) nicht mit der Zeit ändert und dass der Druck p ebenfalls vor der Zeit unabhängig ist. Diese Voraussetzungen ergeben, dass der Druck p ausschliesslich Funktion der Veränderlichen α und unabhängig von t und z sein wird, dass also $p = p(\alpha)$ und analogisch $h = h(\alpha)$ ist. Deshalb verschwindet in der Gleichung (1.1) das Glied mit der partiellen Ableitung nach t sowie das Glied mit der Ableitung nach z. So erhalten wir die Gleichung

$$\frac{6\eta U}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(hp) + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(h^3 p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha}\right) = 0 .$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir die Beziehung

$$6\eta U r h p + h^3 p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha} = 6\eta U r C ,$$

wo C eine Integrationskonstante ist. Nach weiterer Umformung erhalten wir die Reynoldssche Gleichung für ein unendliches Querlager (im stationären Fall)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha} = 6\eta U r \left(\frac{C}{ph^3} - \frac{1}{h^2}\right). \tag{1.2}$$

Diese Differentialgleichung ersten Grades wird Gegenstand unserer weiteren Erwägungen sein. Vor allem ist ersichtlich, dass die Funktion $p(\alpha)$ notwendingerweise periodisch mit der Periode 2π sein muss, falls $p(\alpha)$ eine Druckverteilung im Lager beschreiben soll. Weiter muss offensichltich die Gasmenge im Lager unabhängig von den Zapfendrehungen sein, denn es handelt sich um ein beiderseitig unendliches Lager. Wenn wir voraussetzen, dass im Falle des Ruhestandes des Lagers das Gas darin mit dem Druck P (z. B. mit atmosphärischem Druck) verteilt ist, dann folgt aus der Zustandsgleichung $p = k\varrho$, mit deren Hilfe die Gleichung (1.1) abgeleitet wurde, dass die auf eine Längeneinheit des Lagers bezogene Gasmenge durch $M = 2\pi r\delta\varrho = 2\pi r\delta P/k$ gegeben ist. Falls die Dichte ϱ eine Funktion der Veränderlichen α (nicht jedoch der Veränderlichen z) ist, wird die auf die Längeneinheit des Lagers bezogene Gasmenge aus der Formel

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} \varrho r h \,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{k} r \int_{-\pi}^{\pi} ph \,\mathrm{d}\alpha$$

berechnet. Durch Vergleich beider Ausdrücke für die Masse M erhalten wir die Bedingung

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\alpha)\, h(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi\delta P.$$

Um also die Gasdruckverteilung p im Lager zu bestimmen, muss eine solche Lösung $p(\alpha)$ der Gleichung (1.2) gefunden werden, welche folgende zwei Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} &1. \quad p(\alpha + 2\pi) = p(\alpha) \quad \text{für beliebiges} \quad \alpha\,; \\ &2. \quad \int_{-\pi}^{\pi} p(\alpha)\, h(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi\delta P. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Die Gleichung (1.2) hängt von der Integrationskonstante C ab. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung wird von einer weiteren Integrationskonstante abhängen, die wir D bezeichnen. Diese Lösung p kann also in der Form

$$p = p(\alpha; C, D) \tag{1.4}$$

geschrieben werden, wobei die Integrationskonstanten C, D bestimmt werden müssen. Es wird sich zeigen, dass sie eindeutig durch die Forderung bestimmt sind, dass die Funktion $p(\alpha)$ beide Bedingungen (1.3) erfüllt.

Im zweiten Kapitel wird die Existenz und Eindeutigkeit der periodischen Lösung der Differentialgleichung (1.2) für die gegebene Konstante $C > 0$ bewiesen, im nächsten Kapitel wird dann die Existenz und Eindeutigkeit der Aufgabe (1.2)–(1.3) bewiesen.

2. SATZ ÜBER DIE EXISTENZ DER PERIODISCHEN LÖSUNG

Anstelle der Gleichung (1.2) werden wir die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha} = f(\alpha, p) \tag{2.1}$$

untersuchen. Zuerst führen wir die bereits bekannte Behauptung von der Existenz der periodischen Lösung an. Die Formulierung dieses Satzes sowie einige weitere verwandte Behauptungen dieses Abschnittes sind in [3] zu finden.

Satz 2.1. *Die Funktion $f(\alpha, p)$ erfülle folgende Bedingungen*: 1. *f ist stetig im geschlossenen streifenartigen Bereich $F = \{(\alpha, p);\ C_1 \leqq p \leqq C_2\}$, wo C_1, C_2 Konstanten sind, $C_1 < C_2$.*

2. *f ist periodisch im Bezug zur Veränderlichen α mit der Periode 2π im Bereich F, d. h. für jeden Punkt $(\alpha, p) \in F$ gilt $f(\alpha + 2\pi, p) = f(\alpha, p)$.*

3. *Für jedes α gilt $f(\alpha, C_1) > 0$, $f(\alpha, C_2) < 0$.*

Dann gibt es mindestens eine Lösung $p(\alpha)$ der Gleichung (2.1), *wobei für jedes beliebige α folgende zwei Beziehungen*

a) $p(\alpha + 2\pi) = p(\alpha)$;

b) $C_1 < p(\alpha) < C_2$

gelten.

Beweis. Zur Vereinfachung sei vorausgesetzt, dass die Gleichung (2.1) eine Gleichung mit Eindeutigkeit ist, d. h. dass es zu einer beliebigen Anfangsbedingung eben nur eine Lösung der Gleichung (2.1) gibt, welche dieser Anfangsbedingung entspricht. Im Falle einer Verletzung der Eindeutigkeit der Lösung wird die Beweisführung etwas komplizierter.

Es sei α_0 eine beliebige feste Zahl und x eine Zahl, die die Bedingung $C_1 \leqq x \leqq C_2$ erfüllt. Wird mit dem Symbol $p(\alpha, x)$ die die Anfangsbedingung $p(\alpha_0) = x$ erfüllende Lösung der Gleichung (2.1) bezeichnet, so gilt mit Rücksicht auf die dritte Voraussetzung des Satzes offensichtlich für alle $\alpha > \alpha_0$

$$C_1 < p(\alpha, C_1) \leqq p(\alpha, x) \leqq p(\alpha, C_2) < C_2\,. \tag{2.2}$$

Auf Abb. 3 ist das Richtungsfeld der Differentialgleichung (2.1) sowie die entsprechenden, in (2.2) auftretenden Lösungen dargestellt. Es sei die Funktion $f(x)$ durch

$$f(x) = p(\alpha_0 + 2\pi, x) \tag{2.3}$$

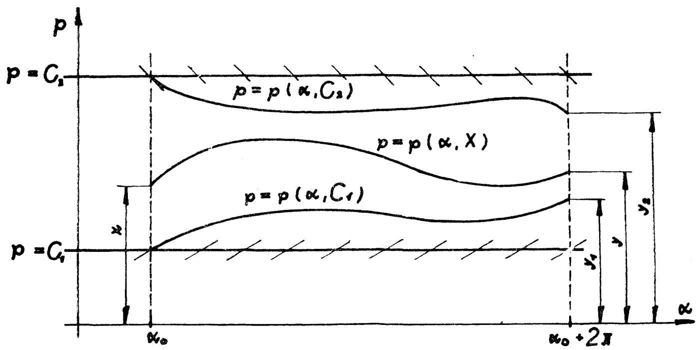

Abb. 3.

definiert, mit $x \in \langle C_1, C_2 \rangle$. Da $p(\alpha, x)$ eindeutig durch den Wert x bestimmt ist, ist $f(x)$ wachsend und stetig im Intervall $\langle C_1, C_2 \rangle$ und bildet also das Intervall $\langle C_1, C_2 \rangle$ auf das Intervall $\langle y_1, y_2 \rangle$ ab, wo $y_1 = p(\alpha_0 + 2\pi, C_1)$, $y_2 = p(\alpha_0 + 2\pi, C_2)$ ist. Mit Rücksigkeit auf (2.2) gilt $C_1 < y_1 < y_2 < C_2$, siehe Abb. 4. Aus diesen Eigenschaften folgt die Existenz der Stelle $\hat{x} \in (C_1, C_2)$, die $\hat{x} = f(\hat{x})$ erfüllt, was mit Rücksicht auf (2.3) bedeutet, dass

$$\hat{x} = p(\alpha_0 + 2\pi, \hat{x})$$

gilt. Diese Gleichung bedeutet jedoch, dass die Lösung $p(\alpha, \hat{x})$ 2π-periodisch ist. Aus (2.2) kann dann im Hinblick auf die Periodizität der Lösung leicht auch die zweite Behauptung des Satzes gefolgert werden. Damit ist der Satz bewiesen.

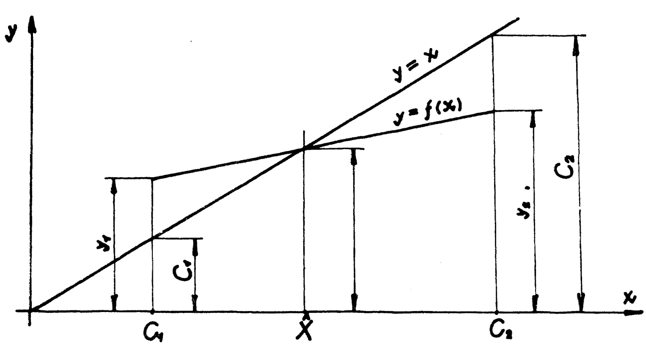

Abb. 4.

A n m e r k u n g. Der Satz 2.1 behält offensichtlich seine Geltung, wenn seine dritte Voraussetzung durch die Voraussetzung

3'. *Für jedes* α *gilt* $f(\alpha, C_1) < 0, f(\alpha, C_2) > 0$

ersetzt wird.

Satz 2.2. *Die Funktion* $f(\alpha, p)$ *sei stetig im rechteckigen Bereich G. Ferner sei* $f(\alpha, p)$ *für jedes feste* α *eine monoton fallende Funktion der Veränderlichen p. Dann ist die Differentialgleichung* (2.1) *eine Gleichung mit Eindeutigkeit „nach vorwärts", d. h. für jede Anfangsbedingung* $p(\alpha_0) = p_0$ *mit* $(\alpha_0, p_0) \in G$ *gilt: Sind* $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$ *zwei Lösungen der Gleichung* (2.1), *welche die Bedingung* $p_i(\alpha_0) = p_0$, $i = 1, 2$ *erfüllen, so ist*

$$p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$$

für alle $\alpha \geqq \alpha_0$.

B e w e i s. Setzen wir voraus, der Satz gelte nicht. Dann existiert ein $\alpha_1 > \alpha_0$, für das $p_1(\alpha_1) \neq p_2(\alpha_1)$ ist. Bei entsprechender Bezeichnung gilt also $p_1(\alpha_1) < p_2(\alpha_1)$. Wir können offensichtlich noch voraussetzen, dass im Intervall $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ die Ungleichung $p_1(\alpha) \leqq p_2(\alpha)$ gilt. Im entgegengesetzten Fall definieren wir die Zahl $\bar{\alpha}$ als Infimum solcher Zahlen $x \in \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$, dass im Intervall $\langle x, \alpha_1 \rangle$ $p_1(\alpha) \leqq p_2(\alpha)$ gilt, und wir nehmen dann das Intervall $\langle \bar{\alpha}, \alpha_1 \rangle$ statt des Intervalls $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ in Betracht. Sei nun die Funktion $y(\alpha)$ durch

$$y(\alpha) = p_2(\alpha) - p_1(\alpha) \tag{2.4}$$

definiert. Offensichtlich gilt $y(\alpha_0) = 0$, $y(\alpha_1) > 0$. Wenn wir den Mittelwertsatz anwenden, erhalten wir

$$y(\alpha_1) = y(\alpha_1) - y(\alpha_0) = y'(\hat{\alpha})(\alpha_1 - \alpha_0),$$

wo $\hat{\alpha} \in (\alpha_0, \alpha_1)$ ist. Infolgedessen ist die Ungleichung $y'(\hat{\alpha}) > 0$ erfüllt. Das heisst, dass $p_2'(\hat{\alpha}) - p_1'(\hat{\alpha}) > 0$ ist, so dass $f(\hat{\alpha}, p_2(\hat{\alpha})) > f(\hat{\alpha}, p_1(\hat{\alpha}))$ gilt. Da aber $p_1(\hat{\alpha}) \leqq p_2(\hat{\alpha})$ gilt, folgt aus der vorigen Ungleichung die Beziehung $p_1(\hat{\alpha}) < p_2(\hat{\alpha})$, was im Widerspruch mit der Voraussetzung des Satzes steht. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2.3. *Die Funktion* $f(\alpha, p)$ *erfülle die Voraussetzungen des Satzes* 2.1. *Ferner sei* $f(\alpha, p)$ *für jedes feste* α *eine fallende Funktion der Veränderlichen p*, $C_1 \leqq p \leqq C_2$. *Sind* $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$ *zwei beliebige Lösungen der Gleichung* (2.1), *die die Bedingung* $C_1 \leqq p_1(\alpha_0) < p_2(\alpha_0) \leqq C_2$ *erfüllen, so ist die Funktion* $p_2(\alpha) - p_1(\alpha)$ *stetig und monoton fallend im Intervall* $\langle \alpha_0, +\infty)$; *dabei gilt*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} (p_2(\alpha) - p_1(\alpha)) = 0.$$

Beweis. Die Funktion $y(\alpha)$ sei durch (2.4) für $\alpha \geqq \alpha_0$ definiert. Da die Funktion $y(\alpha)$ stetig im Intervall $\langle\alpha_0, +\infty)$ ist und $y(\alpha_0) > 0$ ist, so ergibt sich unmittelbar, dass entweder für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ die Beziehung $y(\alpha) > 0$ gilt, oder es gibt ein solches $\alpha_1 > \alpha_0$, dass $y(\alpha_1) = 0$ ist. In diesem Falle ist $p_1(\alpha_1) = p_2(\alpha_1)$; auf Grund des vorhergehenden Satzes gilt dann $p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$ für alle $\alpha \geqq \alpha_1$, d. h. $y(\alpha) = 0$ für $\alpha \geqq \alpha_1$. In beiden Fällen ergibt sich aus der Voraussetzung $y(\alpha_0) \geqq 0$, dass die Beziehung $y(\alpha) \geqq 0$ für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ gilt.

Nun werden wir zeigen, dass die Funktion $y(\alpha)$ in jeder Stelle α fallend ist, in der $y(\alpha) > 0$ ist. Wenn nämlich $y(\alpha) > 0$ ist, dann ist $p_1(\alpha) < p_2(\alpha)$ und wir erhalten für die Ableitung $y'(\alpha)$ die Ungleichung $y'(\alpha) < 0$, denn $y'(\alpha) = p_2'(\alpha) - p_1'(\alpha) = f(\alpha, p_2(\alpha)) - f(\alpha, p_1(\alpha))$ und gemäss der Voraussetzung des Satzes ist $f(\alpha, p)$ eine fallende Funktion der Veränderlichen p.

Aus den vorhergehenden Erwägungen folgt, dass für die Funktion $y(\alpha)$ genau einer der folgenden zwei Fälle zutrifft:

1. $y(\alpha)$ ist im Intervall $\langle\alpha_0, +\infty)$ fallend und positiv.
2. Es gibt ein solches $\alpha_1 > \alpha_0$, dass $y(\alpha)$ im Intervall $\langle\alpha_0, \alpha_1)$ positiv und fallend ist und im Intervall $\langle\alpha_1, +\infty)$ gleich Null ist.

In beiden Fällen ist die Funktion $y(\alpha)$ im Intervall $\langle\alpha_0, +\infty)$ nichtnegativ, stetig und monoton fallend, woraus folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{\alpha\to+\infty} y(\alpha) = A \geqq 0 \tag{2.5}$$

existiert. Nun genügt es zu zeigen, dass $A = 0$ ist. Es sei das Gegenteil vorausgesetzt, d. h. es gelte $A > 0$. Aus (2.2) ergibt sich unmittelbar $C_1 < p_i(\alpha) < C_2$ für $\alpha > \alpha_0$, $i = 1, 2$, woraus sich für die Konstante A die Abschätzung $A < C_2 - C_1$ ergibt. Da $y(\alpha)$ im Intervall $\langle\alpha_0, +\infty)$ monoton fallend ist, muss die Ungleichung $y(\alpha) \geqq A$ für alle $\alpha \in \langle\alpha_0, +\infty)$ gelten, woraus sich für alle $\alpha \geqq \alpha_0$

$$p_2(\alpha) \geqq p_1(\alpha) + A \tag{2.6}$$

ergibt. Es sei die Funktion $g(\alpha, p)$ durch

$$g(\alpha, p) = f(\alpha, p) - f(\alpha, p + A) \tag{2.7}$$

für $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $C_1 \leqq p \leqq C_2 - A$ definiert. Es sei ein beliebiges Intervall der Länge 2π gegeben, z. B. das Intervall $\langle\alpha_1, \alpha_1 + 2\pi\rangle$, wo α_1 eine beliebige Zahl ist. Da die Funktion $g(\alpha, p)$ stetig und positiv im geschlossenen Rechteck $G = \{(\alpha, p); \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_1 + 2\pi, C_1 \leqq p \leqq C_2 - A\}$ ist, existiert also eine solche Zahl $B > 0$, dass für alle $(\alpha, p) \in G$ die Ungleichung $g(\alpha, p) \geqq B$ gilt. Da aber die Funktion $g(\alpha, p)$ eine 2π-perodische Funktion der Veränderlichen α ist, ist ersichtlich, dass die Beziehung

$$g(\alpha, p) \geqq B > 0 \tag{2.8}$$

im unendlichen Streifen $F = \{(\alpha, p);\ C_1 \leqq p \leqq C_2 - A\}$ gilt. Da $f(\alpha, p)$ für jedes α eine fallende Funktion der Veränderlichen p ist, gilt mit Bezug auf (2.6) und (2.7) die Beziehung $f(\alpha, p_1(\alpha)) - f(\alpha, p_2(\alpha)) \geqq f(\alpha, p_1(\alpha)) - f(\alpha, p_1(\alpha) + A) = g(\alpha, p_1(\alpha))$, woraus sich gemäss (2.8) für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ die Beziehung $f(\alpha, p_1(\alpha)) - f(\alpha, p_2(\alpha)) \geqq \geqq B > 0$ ergibt. Für die Ableitung $y'(\alpha)$ erhalten wir somit für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ die Abschätzung

$$y'(\alpha) = p_2'(\alpha) - p_1'(\alpha) = f(\alpha, p_2(\alpha)) - f(\alpha, p_1(\alpha) \leqq -B < 0\,.$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich (durch Integration in den Grenzen von α_0 bis α) für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ die Ungleichung $y(\alpha) - y(\alpha_0) \leqq -B(\alpha - \alpha_0)$, woraus ferner $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} y(\alpha) = -\infty$ folgt. Dies steht jedoch in Widerspruch zu der bereits früher bewiesenen Beziehung (2.5). Hiermit ist der Beweis erbracht, dass die Voraussetzung $A > 0$ zum Widerspruch führt. Es ist also $A = 0$ und der Satz ist bewiesen.

Satz 2.4. *Die Funktion $f(\alpha, p)$ erfülle die Voraussetzungen des Satzes* 2.1. *Für jedes α sei $f(\alpha, p)$ eine fallende Funktion der Veränderlichen p, $p \in \langle C_1, C_2 \rangle$. Dann gibt es genau eine periodische Lösung $\hat{p}(\alpha)$ der Gleichung* (2.1). *Ist $p(\alpha)$ eine beliebige andere Lösung der Differentialgleichung* (2.1), *dann ist die Funktion $p(\alpha) - \hat{p}(\alpha)$ monoton in ihrem Definitionsbereich; dabei gilt*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} (p(\alpha) - \hat{p}(\alpha)) = 0\,. \tag{2.9}$$

Beweis. Die Existenz der 2π-periodischen Lösung folgt aus dem Satz 2.1. Es genügt also die Eindeutigkeit zu zeigen. Es seien $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$ zwei periodische Lösungen der Gleichung (2.1). Falls $p_1(\alpha_1) = p_2(\alpha_1)$ für ein α_1 gilt, dann muss notwendig nach Satz 2.2 die Gleichung $p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$ für alle $\alpha \geqq \alpha_1$ gelten. Aus der Periodizität beider Funktionen $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$ folgt dann unmittelbar, dass $p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$ für alle α gilt.

Wenn also $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$ zwei verschiedene periodische Lösungen der Gleichung (2.1) sind (wir setzen nicht voraus, dass sie dieselbe Periode haben), muss notwendig $p_1(\alpha) \neq p_2(\alpha)$ für alle α gelten. Bei entsprechender Bezeichnung gilt also $p_1(\alpha) < p_2(\alpha)$ für alle α. Die durch (2.4) definierte Funktion $y(\alpha)$ ist dann (entsprechend dem Beweis des Satzes 2.3) fallend im Intervall $(-\infty, +\infty)$. Da die Funktionen $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$ periodisch sind, ist ihre Differenz $p_2(\alpha) - p_1(\alpha) = y(\alpha)$ eine fastperiodische Funktion von α ($y(\alpha)$ ist sogar eine periodische Funktion im Falle der Gleichmessbarkeit der Perioden). Auf der anderen Seite kann die stetige und im Intervall $(-\infty, +\infty)$ fallende Funktion nicht fastperiodisch sein. Dieser Widerspruch beweist, dass zwei verschiedene periodische Lösungen der Gleichung (2.1) nicht existieren können. Die letzte Behauptung des Satzes ist im Satz 2.3 enthalten.

3. LÖSUNG DER GRUNDLEGENDEN AUFGABE DER THEORIE DER LUFTSCHMIERUNG

Kehren wir nun zur Gleichung (1.2) zurück, die wir nun in der Form

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha} = \Phi\left(\frac{C}{ph^3} - \frac{1}{h^2}\right) \tag{3.1}$$

schreiben werden, wobei $\Phi = 6\eta U r > 0$, $C > 0$ ist. Die Funktion $h(\alpha)$ wird als stetige, positive und 2π-periodische Funktion der Veränderlichen α vorausgesetzt. Daraus ergibt sich dann die Existenz solcher Konstanten h_1, h_2, dass für alle α die Beziehung $0 < h_1 \leqq h(\alpha) \leqq h_2$ gilt; diese Konstanten können z. B. durch die Formel

$$h_1 = \min_\alpha h(\alpha)\,, \quad h_2 = \max_\alpha h(\alpha)\,. \tag{3.2}$$

definiert werden. Nun soll gezeigt werden, dass die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes auf die Gleichung (3.1) angewendet werden können.

Satz 3.1. *Es sei $\Phi > 0$, $C > 0$, $h(\alpha)$ sei eine 2π-periodische positive stetige Funktion. Dann hat die Gleichung (3.1) eine einzige periodische Lösung $p(\alpha)$ im Bereich $G = \{(\alpha, p);\ p > 0\}$, wobei diese Lösung notwendig 2π-periodisch ist. Sind die Konstanten h_1, h_2 durch (3.2) definiert, so gilt*

$$\frac{C}{h_2} \leqq p(\alpha) \leqq \frac{C}{h_1}\,. \tag{3.3}$$

Beweis. Es seien A_1, A_2 zwei beliebige positive Zahlen, welche die Beziehungen

$$0 < A_1 < \frac{C}{h_2}\,, \quad \frac{C}{h_1} < A_2 \tag{3.4}$$

erfüllen. Es ist ersichtlich, dass die Funktion $f(\alpha, p) = \Phi(C/(ph^3) - 1/h^2)$ folgende Bedingungen erfüllt:

1. $f(\alpha, p) > 0$ falls $0 < p \leqq A_1$; $f(\alpha, p) < 0$ falls $p \geqq A_2$;
2. $f(\alpha, p)$ ist für jedes α eine fallende Funktion der Veränderlichen p im Intervall $(0, +\infty)$.

Nach Satz 2.1 gibt es eine 2π-periodische Lösung $p(\alpha)$ der Gleichung (3.1), wobei für alle α

$$A_1 < p(\alpha) < A_2 \tag{3.5}$$

gilt. Nach Satz 2.4 ist dies die einzige Lösung. Da die Konstante A_1 beliebig nahe der

Zahl C/h_2 und die Konstante A_2 beliebig nahe der Zahl C/h_1 gewählt werden kann, folgt also aus (3.5) die Beziehung (3.3). Damit ist der Satz bewiesen.

Nun werden wir untersuchen, wie die periodische Lösung der Gleichung (3.1) von der Konstante C bei gegebenem festen Φ abhängt. Mit dem Symbol $p(\alpha; C, \Phi)$ wird im weiteren Verlauf die periodische Lösung der Gleichung (3.1) bezeichnet werden. Aus dem Satz 3.1 folgt, dass diese Lösung durch die Konstanten C und Φ (und natürlich durch die Funktion $h(\alpha)$) eindeutig bestimmt ist.

Satz 3.2. *Es sei $\Phi > 0$, $h(\alpha)$ sei eine 2π-periodische stetige positive Funktion. Wenn $0 < C_1 < C_2$ ist, dann gilt für die entsprechenden periodischen Lösungen $p(\alpha; C_1, \Phi)$ und $p(\alpha; C_2, \Phi)$ für alle α die Beziehung*

$$p(\alpha; C_1, \Phi) < p(\alpha; C_2, \Phi)\,. \tag{3.6}$$

Beweis. Es sei $p_1(\alpha) = p(\alpha; C_1, \Phi)$, $p_2(\alpha) = p(\alpha; C_2, \Phi)$, die Funktion $y(\alpha)$ sei durch (2.4) definiert, d. h. $y(\alpha) = p_2(\alpha) - p_1(\alpha)$. Um (3.6) zu beweisen, genügt es offensichtlich, wenn man beweist, dass für alle α $y(\alpha) > 0$ gilt. Berechnen wir zuerst die Ableitung $y'(\alpha)$. Da

$$p_i'(\alpha) = \Phi\left(\frac{C_i}{p_i(\alpha)\,h^3} - \frac{1}{h^2}\right), \quad i = 1, 2,$$

ist, erhalten wir durch Subtrahieren die Gleichung

$$y'(\alpha) = \frac{\Phi}{h^3}\left(\frac{C_2}{p_2(\alpha)} - \frac{C_1}{p_1(\alpha)}\right). \tag{3.7}$$

Nun ist ersichtlich, dass $y'(\alpha_0) > 0$ ist, wenn $y(\alpha_0) = 0$ ist. Ist nämlich $y(\alpha_0) = 0$, dann ist $p_1(\alpha_0) = p_2(\alpha_0)$, woraus sich die Ungleichung

$$y'(\alpha_0) = \frac{\Phi}{h^3(\alpha_0)\,p_1(\alpha_0)}(C_2 - C_1) > 0$$

ergibt. Wir werden nun zeigen, dass die Funktion $y(\alpha)$ keine Nullstelle haben kann. Setzen wir das Gegenteil voraus, d. h. es gelte für ein gewisses α_0 die Beziehung $y(\alpha_0) = 0$. Der eben bewiesenen Behauptung entsprechend gilt notwendig $y'(\alpha_0) > 0$, die Funktion $y(\alpha)$ ist also wachsend an der Stelle α_0. Es existiert also eine solche Stelle $\alpha_1 < \alpha_0$, dass $y(\alpha_1) < 0$ ist, und eine solche Stelle $\alpha_2 > \alpha_0$, dass $y(\alpha_2) > 0$ gilt. Man kann offensichtlich voraussetzen, dass $\alpha_2 < \alpha_1 + 2\pi$ ist. Da $y(\alpha)$ als Differenz zweier 2π-periodischen Funktionen auch eine 2π-periodische Funktion ist, gilt für die Stelle $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\pi$ die Ungleichung $y(\alpha_3) < 0$. Damit wurde bewiesen, dass zwei Stellen α_2, α_3 existieren, für die $\alpha_2 < \alpha_3$, $y(\alpha_2) > 0$, $y(\alpha_3) < 0$ gilt. Da $y(\alpha)$ stetig ist, muss also eine solche Stelle $\alpha_4 \in (\alpha_2, \alpha_3)$ existieren, für die $y(\alpha_4) = 0$ und gleichzeitig für alle $\alpha \in (\alpha_4, \alpha_3)$ die Beziehung $y(\alpha) \leqq 0$ gilt. Das widerspricht jedoch der davor bewiesenen Behauptung, dass die Funktion $y(\alpha)$ in jeder ihren Nullstelle wachsend ist. Hiermit ist also bewiesen, dass für alle α $y(\alpha) \neq 0$ ist. Da $y(\alpha)$ im Intervall $(-\infty, +\infty)$ stetig ist, muss genau einer der beiden folgenden Fälle eintreten: 1. für alle α gilt $y(\alpha) > 0$; 2. für alle α gilt $y(\alpha) < 0$. Wir werden nun zeigen, dass der zweite Fall nicht eintreten kann. Setzen wir das Gegenteil voraus, d. h. für alle α sei $y(\alpha) < 0$. Daraus folgt $p_2(\alpha) < p_1(\alpha)$, also $C_2/(p_2(\alpha)) > C_1/(p_2(\alpha))$ für alle α, denn es ist $C_1 < C_2$. Das bedeutet aber, dass die rechte Seite von (3.7) positive ist, und deshalb gilt für alle α $y'(\alpha) > 0$. Die Funktion $y(\alpha)$ ist also wachsend im Intervall $(-\infty, +\infty)$. Das widerspricht jedoch der Periodizität der Funktion $y(\alpha)$. Damit ist bewiesen, dass die Funktion $y(\alpha)$ positiv im Intervall $(-\infty, +\infty)$ ist, was zu beweisen war.

Im weiteren werden wir zeigen, dass die periodische Lösung der Gleichung (3.1) stetig von der Konstante C abhängt.

Satz 3.3. *Es sei $\Phi > 0$, $0 < C_1 < C_2$, $h(\alpha)$ sei eine 2π-periodische stetige positive Funktion. Wird die Zahl h_1 durch die Formel (3.2) definiert, so gilt die Abschätzung*

$$\max_{\alpha} \left(p(\alpha; C_2, \Phi) - p(\alpha; C_1, \Phi)\right) \leqq (C_2 - C_1)/h_1 . \tag{3.8}$$

Beweis. Wir wenden die Bezeichung $p_i(\alpha) = p(\alpha; C_i, \Phi)$ an, $i = 1, 2$; die Funktion $y(\alpha)$ sei durch die Formel (2.4) definiert. Gemäss dem Satz 3.1 und Satz 3.2 ist $y(\alpha)$ eine 2π-periodische positive Funktion. Die Ableitung $y'(\alpha)$ kann (siehe (3.7)) in der Form

$$y'(\alpha) = \frac{\Phi}{h^3(\alpha)\, p_1(\alpha)\, p_2(\alpha)} \left((C_2 - C_1)\, p_1(\alpha) - C_1\, y(\alpha)\right) \tag{3.9}$$

geschrieben werden. Wenn nun die Funktion $y(\alpha)$ ihr relatives Extremum an Stelle $\hat{\alpha}$ erreicht, muss notwendig $y(\hat{\alpha}) = ((C_2 - C_1)/C_1)\, p_1(\hat{\alpha})$ gelten. Da die Funktion $y(\alpha)$ stetig und 2π-periodisch ist, muss sie ihren Maximumwert in einer solche Stelle erreichen, in der sie ihr relatives Extremum hat. Daraus folgt dann, dass die Abschätzung $\max y(\alpha) \leqq ((C_2 - C_1)/C_1) \max p_1(\alpha)$ gilt. Nach (3.3) erhalten wir für $p_1(\alpha)$ die Abschätzung $\max_{\alpha} p_1(\alpha) \leqq C_1/h_1$. Aus diesen Abschätzungen ergibt sich unmittelbar (3.8). Damit ist der Satz bewiesen.

Wir werden nun zeigen, dass die im ersten Abschnitt formulierte Aufgabe der Theorie der Luftschmierung eine einzige Lösung hat. Es sei bemerkt, dass es sich darum handelt, eine solche Lösung der Differentialgleichung (1.2) zu finden, welche die Bedingungen (1.3) erfüllt. Da die Gleichung (1.2) (bzw. (3.1)) für ein gegebenes C genau eine 2π-periodische Lösung hat, handelt es sich eingentlich darum, den Wert der Konstante C so zu bestimmen, dass für die entsprechende Lösung $p(\alpha; C, \Phi)$ die zweite Bedingung in (1.3) erfüllt ist.

Satz 3.4. *Es seien $\Phi > 0$, $K > 0$ beliebige Konstanten und $h(\alpha)$ eine beliebige positive stetige 2π-periodische Funktion. Dann gibt es genau eine Zahl $C > 0$, dass für die entsprechende periodische Lösung $p(\alpha; C, \Phi)$ der Gleichung (3.1) die Beziehung*

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\alpha; C, \Phi)\, h(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = K \tag{3.10}$$

gilt.

Bemerkung. Die der Beziehung (3.10) entsprechende periodische Lösung $p(\alpha; C, \Phi)$ ist also von den Konstanten Φ und K abhängig, denn der Wert C ist nach Satz 3.4 durch diese Konstanten eindeutig bestimmt, also $C = C(\Phi, K)$, woraus sich

$$p(\alpha; C, \Phi) = p(\alpha; C(\Phi, K), \Phi)$$

ergibt.

Beweis des Satzes 3.4. Es sei die Funktion F der Veränderlichen C (bei festem $\Phi > 0$) durch

$$F(C) = \int_{-\pi}^{\pi} p(\alpha; C, \Phi)\, h(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \tag{3.11}$$

definiert. Nach Satz 3.2 ist $F(C)$ wachsend im Intervall $(0, +\infty)$. Wir werden zeigen, dass $F(C)$ im Intervall $(0, +\infty)$ stetig ist. Es sei $0 < C_1 < C_2$. Wird $p_i(\alpha) = p(\alpha; C_i, \Phi)$, $i = 1, 2$, bezeichnet und die Funktion $y(\alpha)$ durch (2.4) definiert, so erhalten wir unmittelbar die Beziehung

$$0 < F(C_2) - F(C_1) = \int_{-\pi}^{\pi} y(\alpha)\, h(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\,. \tag{3.12}$$

Sind die Zahlen h_1, h_2 durch (3.2) definiert, so ergibt sich aus (3.8) und (3.12)

$$0 < F(C_2) - F(C_1) \leqq 2\pi \frac{h_2}{h_1} (C_2 - C_1)\,,$$

woraus unmittelbar folgt, dass die Funktion $F(C)$ im Intervall $(0, +\infty)$ gleichmässig stetig ist. Nun werden wir zeigen, dass

$$\lim_{C \to 0+} F(C) = 0\,; \quad \lim_{C \to +\infty} F(C) = +\infty \tag{3.13}$$

gilt. Aus (3.3) ergibt sich offensichtlich, dass die Beziehungen $\lim_{C \to 0+} p(\alpha; C, \Phi) = 0$, $\lim_{C \to +\infty} p(\alpha; C, \Phi) = +\infty$ gleichmässig für alle α gelten, woraus unmittelbar (3.13) folgt.

Hiermit wurde der Beweis erbracht, dass die Funktion $F(C)$ stetig und wachsend im Intervall $(0; +\infty)$ ist und somit nach (3.13) das Intervall $(0; +\infty)$ wieder auf das Intervall $(0; +\infty)$ abbildet. Daraus folgt, dass es zu jedem $K > 0$ gerade ein einziges $C > 0$ gibt, so dass $F(C) = K$ gilt. Das bedeutet jedoch, dass die Beziehung (3.10) erfüllt ist.

Literatur

[1] *N. S. Grassam, J. W. Powell:* Gas lubricated bearings. London, Butterworths 1964.

[2] *S. A. Scheinberg:* Luftschmierung der Gleitlagern (Theorie und Berechnung) (russisch). Trenie i iznos v maschinach, VIII. Izd. AN SSSR (1953), 107–204.

[3] *F. G. Tricomi:* Differentialgleichungen (russisch). Izd. inostr. lit., Moskva 1962.

Souhrn

O NĚKTERÝCH OTÁZKÁCH TEORIE VZDUCHOVÉHO MAZÁNÍ

MILOSLAV NEKVINDA

V článku je zkoumáno rozložení tlaku v radiálním vzduchovém ložisku nekonečné délky. Ve stacionárním případě je tlak p v ložisku popsán Reynoldsovou diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha} = 6\eta U r\left(\frac{C}{ph^3} - \frac{1}{h^2}\right),$$

kde C je integrační konstanta související s tím, že tato rovnice vznikla integrací diferenciální rovnice druhého řádu. K této rovnici přistupuje podmínka periodicity řešení $p(\alpha + 2\pi) = p(\alpha)$ a dále „okrajová“ podmínka, že množství M vzduchu na jednotku délky ložiska je v nekonečném radiálním ložisku konstantní.

Ukazuje se, že ke každé konstantě C existuje právě jedno periodické řešení Reynoldsovy diferenciální rovnice. Hlavní výsledek je zformulován ve větě 3.4, kde se dokazuje, že konstanta C je jednoznačně určena hodnotou M. Jinými slovy, vnějšími podmínkami (jež jsou udány hodnotou M) je jednoznačně určen tlak v ložisku.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Miloslav Nekvinda,* CSc., VŠST Liberec, Hálkova 6, Liberec 1.