Vladimír Panc

Die allgemeine Lösung einer zylindrischen Differentialgleichung vierter Ordnung nullten Parameterwertes

Aplikace matematiky, Vol. 16 (1971), No. 3, 203–214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103346

DIE ALLGEMEINE LÖSUNG EINER ZYLINDRISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG NULLTEN PARAMETERWERTES

VLADIMÍR PANC

(Eingegangen am 21. Juli 1970)

1. EINLEITUNG

Verschiedene Aufgaben, die in der Theorie der elastischen Kreis- und Kreisringplatten vorkommen, beruhen auf der allgemeinen Lösung $w = w(\varrho)$ einer gewöhnlichen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung [1, 2]

$$\Delta^2 w + 2\varepsilon\Delta w + w = 0\,, \quad \Delta = \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\,, \tag{1.1}$$

wo ϱ eine dimensionslose reelle Veränderliche bedeutet, und wo durch den dimensionslosen Beiwert ε, der einen beliebigen reellen, positiven oder negativen Wert annehmen kann, ein gewisses Verhältnis der gegebenen physikalischen, geometrischen und statischen Charakteristiken des untersuchten Problems gekennzeichnet wird.

Eine partikuläre Lösung der Gl. (1.1) stellt eine beliebige Zylinderfunktion nullten Parameterwertes

$$w = Z_0(\varrho\sqrt{\lambda}) \tag{1.2}$$

dar, die also der Besselschen Differentialgleichung für den Parameterwert Null

$$\Delta\, Z_0(\varrho\sqrt{\lambda}) = -\lambda\, Z_0(\varrho\sqrt{\lambda}) \tag{1.3}$$

genügt. Für die Funktion $Z_0(\varrho\sqrt{\lambda})$ kann allerdings jede von den bekannten Zylinderfunktionen $J_0(\varrho\sqrt{\lambda})$, $Y_0(\varrho\sqrt{\lambda})$, $H_0^{(1)}(\varrho\sqrt{\lambda})$ und $H_0^{(2)}(\varrho\sqrt{\lambda})$ nullten Parameterwertes eingesetzt werden.

Setzen wir die Funktion (1.2) unter Benützung der Beziehung (1.3) in die Gl. (1.1) ein, so ergibt sich die charakteristische Gleichung in der Form einer quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 = 0\,. \tag{1.4}$$

Die Wurzeln $\lambda_{1,2}$ der Gl. (1.4) und somit auch die Gestalt der allgemeinen Lösung der Gl. (1.1) hängen offenbar von dem angegebenen numerischen Werte des Koeffizienten ε ab, wobei verschiedene Sonderfälle entstehen können.

2. DIE GESTALT DER ALLGEMEINEN LÖSUNG FÜR VERSCHIEDENE SONDERFÄLLE

2.1. Der Fall $\varepsilon = 0$

Für diesen Fall nimmt die Gl. (1.1) die Form der bekannten Grundgleichung einer auf der Winklerschen Unterlage gebetteten Kreisplatte unter dem Angriff einer drehsymmetrischen Belastung nach der klassischen Plattentheorie [3]

$$\Delta^2 w + w = 0 \quad \text{oder} \quad (\Delta^2 + 1)\, w = 0 \tag{2.1}$$

an. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (1.4) können nun in der Form

$$\lambda_{1,2} = \pm\, \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}3\pi/2} \tag{2.2}$$

geschrieben werden, so dass die allgemeine Lösung der Gl. (2.1) nach den Beziehungen (1.2) und (2.2) z. B. durch die Funktion

$$\begin{aligned} w = {} & A_1\, \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi/4}) + A_2\, \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}) + \\ & + A_3\, \mathrm{Y}_0(\varrho \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi/4}) + A_4\, \mathrm{Y}_0(\varrho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}) \end{aligned} \tag{2.3a}$$

angegeben werden kann, wobei mit A_1 bis A_4 die Integrationskonstanten bezeichnet sind. Die in (2.3a) eingeführten Zylinderfunktionen und somit auch die Integrationskonstanten sind offenbar komplex. Die reelle Lösung mit reellen Funktionen von ϱ und mit reellen Integrationskonstanten B_1 bis B_4 ergibt sich dann in der Form

$$\begin{aligned} w = {} & B_1 \operatorname{Re} \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}) + B_2 \operatorname{Im} \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}) + \\ & + B_3 \operatorname{Re} \mathrm{Y}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}) + B_4 \operatorname{Im} \mathrm{Y}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})\,. \end{aligned} \tag{2.3b}$$

Die numerischen Werte der in (2.3b) enthaltenen Zylinderfunktionen sind in den Tabellen [4, 5] angegeben.

Statt der Funktion (2.3a) kann nach (1.2) und (2.2) als eine allgemeine Lösung der Gl. (2.1) auch die Funktion

$$\begin{aligned} w = {} & C_1\, \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{+\mathrm{i}3\pi/4}) + C_2\, \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}) + \\ & + C_3\, \mathrm{H}_0^{(1)}(\varrho \mathrm{e}^{+\mathrm{i}3\pi/4}) + C_4\, \mathrm{H}_0^{(1)}(\varrho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}) \end{aligned} \tag{2.3c}$$

gewählt werden, die sich in der folgenden reellen Gestalt schreiben lässt:

$$w = D_1 \operatorname{ber}(\varrho) + D_2 \operatorname{bei}(\varrho) + D_3 \operatorname{her}(\varrho) + D_4 \operatorname{hei}(\varrho)\,. \tag{2.3d}$$

Hier bedeuten D_1 bis D_4 neue reelle Integrationskonstanten und ber (ϱ), bei (ϱ), her (ϱ), hei (ϱ) sind die bekannten Kelvinschen Funktionen [6], die durch die Formeln

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{ber}(\varrho) \pm \mathrm{i} \operatorname{bei}(\varrho) &= \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} 3\pi/4}), \\ \operatorname{her}(\varrho) + \mathrm{i} \operatorname{hei}(\varrho) &= \mathrm{H}_0^{(1)}(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i} 3\pi/4}) \end{aligned}$$

definiert sind. Die numerischen Werte der Zylinderfunktionen (2.4) kann man aus [3, 6] entnehmen.

2.2. Der Fall $0 < \varepsilon < 1$

Mit $\varepsilon > 0$ stellt die Gl. (1.1) z. B. die Grundgleichung der Beulung einer radial gedrückten Kreisplatte in einem elastisch nachgiebigen Medium dar. In diesem Problem kann offenbar der Koeffizient ε einen beliebigen positiven Wert annehmen.

Für den Fall $0 < \varepsilon < 1$ liefert die charakteristische Gleichung (1.4)

$$\text{(2.5)} \qquad \lambda_{1,2} = \varepsilon \pm \mathrm{i} \sqrt{(1 - \varepsilon^2)}.$$

Setzt man

$$\text{(2.6)} \qquad \varepsilon = \cos 2\varphi, \quad \sqrt{(1 - \varepsilon^2)} = \sin 2\varphi,$$

wobei

$$\text{(2.7)} \qquad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}}{\varepsilon}$$

ist, so ergbit sich aus (2.5)

$$\text{(2.8)} \qquad \lambda_{1,2} = \cos 2\varphi \pm \mathrm{i} \sin 2\varphi = \mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\varphi}$$

und die allgemeine Lösung der Gl. (1.1) lässt sich dann nach (1.2) und (2.8) in der folgenden Form schreiben:

$$\text{(2.9a)} \qquad \begin{aligned} w = {} & A_1 \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}) + A_2 \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) + \\ & + A_3 \mathrm{Y}_0(\varrho \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}) + A_4 Y_0(\varrho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}). \end{aligned}$$

Man kann sehen, dass die Funktion (2.3a) einen Sonderfall der Funktion (2.9a) für $\varphi = \pi/4$ darstellt. Geht man in (2.9a) zu reellen Funktionen und reellen Integrationskonstanten B_1 bis B_4 über, so ergibt sich analog wie in (2.3b)

$$\text{(2.9b)} \qquad \begin{aligned} w = {} & B_1 \operatorname{Re} \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) + B_2 \operatorname{Im} \mathrm{J}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) + \\ & + B_3 \operatorname{Re} \mathrm{Y}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) + B_4 \operatorname{Im} \mathrm{Y}_0(\varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}). \end{aligned}$$

Die numerischen Werte der in (2.9b) enthaltenen Zylinderfunktionen kann man für verschiedene „Winkel" φ wieder in [4, 5] finden.

2.3. Der Fall $\varepsilon = 1$

In diesem Fall nimmt die Gl. (1.1) die Form

$$\Delta^2 w + 2\Delta w + w = 0 \tag{2.10a}$$

an, die auch als eine zweifache Besselsche Operation für den Parameterwert Null

$$(\Delta + 1)^2 w = 0 \tag{2.10b}$$

angesehen werden kann. Die zugehörige charakteristische Gleichung (1.4)

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \tag{2.11}$$

liefert jetzt eine zweifache Wurzel

$$\lambda_{1,2} = +1\,, \tag{2.12}$$

so dass die angewandte Lösungsmethode nur zwei unabhängige partikuläre Lösungen, z. B.

$$J_0(\varrho) \quad \text{und} \quad Y_0(\varrho)\,, \tag{2.13}$$

anbietet.

Wir wollen beweisen, dass auch die Funktion

$$w = \varrho\, Z_1(\varrho) \tag{2.14}$$

eine partikuläre Lösung der Gl. (2.10) darstellt. Nach den bekannten Regeln [6, 7, 8] ergibt sich für die Ableitungen der Funktion (2.14)

$$\begin{aligned} w' &= \varrho\, Z_0(\varrho)\,, \quad w'' = Z_0(\varrho) - \varrho\, Z_1(\varrho)\,, \\ w''' &= -\varrho\, Z_0(\varrho) - Z_1(\varrho)\,, \\ w^{\mathrm{IV}} &= -2\, Z_0(\varrho) + \left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) Z_1(\varrho)\,, \end{aligned} \tag{2.15}$$

woraus folgt

$$\Delta w = 2\, Z_0(\varrho) - \varrho\, Z_1(\varrho)\,, \quad \Delta^2 w = -4\, Z_0(\varrho) + \varrho\, Z_1(\varrho)\,. \tag{2.16}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (2.14) und (2.16) in die Gl. (2.10) kann man sich leicht davon überzeugen, dass ausser der Funktionen (2.13) auch die Funktion (2.14) dieser Gleichung genügt. Das Hauptsystem der Lösungen der Gl. (2.10) wird also z. B. durch die Funktionen

$$J_0(\varrho)\,, \quad Y_0(\varrho)\,, \quad \varrho\, J_1(\varrho)\,, \quad \varrho\, Y_1(\varrho) \tag{2.17}$$

gebildet, so dass die allgemeine Lösung der Gl. (2.10) die folgende Form annimmt:

(2.18) $$w = A_1\, J_0(\varrho) + A_2\varrho\, J_1(\varrho) + A_3\, Y_0(\varrho) + A_4\varrho\, Y_1(\varrho)\,.$$

Es lässt sich allgemein beweisen, dass eine durch die Zylinderfunktion $Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})$ lösbare gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung im Falle der zweifachen Wurzel der zugehörigen, durch den Ansatz $Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})$ hergeleiteten charakteristischen Gleichung auch durch die Funktionen $\varrho\, Z_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda})$ und $\varrho\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})$ lösbar ist.

Eine solche Differentialgleichung kann in der allgemeinen Form der zweifachen Besselschen Operation für den Parameterwert ν

(2.19a) $$\left(\Delta + \lambda - \frac{\nu^2}{\varrho^2}\right)^2 w = 0$$

geschrieben werden, woraus sich nach Durchführung der angedeuteten Operation

(2.19b) $$\varrho^4 w^{\mathrm{IV}} + 2\varrho^3 w''' + \varrho^2[2\lambda\varrho^2 - (2\nu^2 + 1)]\, w'' +$$
$$+ \varrho[2\lambda\varrho^2 + (2\nu^2 + 1)]\, w' + [\lambda^2\varrho^4 - 2\lambda\nu^2\varrho^2 + \nu^2(\nu^2 - 4)]\, w = 0$$

ergibt. Hier kann allgemein ϱ eine komplexe Veränderliche und λ eine beliebige komplexe Zahl bedeuten. Durch Einsetzen der Ausdrücke (gültig für alle ν)

(2.19c) $$w = Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,, \quad w' = -\frac{\nu}{\varrho} Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) + \sqrt{(\lambda)}\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w'' = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2} - \lambda\right] Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{\varrho}\sqrt{(\lambda)}\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w''' = -\frac{1}{\varrho}\left[\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{\varrho^2} - (\nu+1)\,\lambda\right] Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) +$$
$$+ \left(\frac{\nu^2+2}{\varrho^2} - \lambda\right)\sqrt{(\lambda)}\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w^{\mathrm{IV}} = \left[\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{\varrho^4} - \frac{2\nu^2 + 2\nu + 3}{\varrho^2}\lambda + \right.$$
$$\left. + \lambda^2\right] Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) - \frac{2}{\varrho}\left[\frac{3(\nu^2+1)}{\varrho^2} - \lambda\right]\sqrt{(\lambda)}\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

oder

(2.19d) $$w = \varrho\, Z_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda})\,, \quad w' = -\nu\, Z_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda}) + \varrho\sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w'' = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{\varrho} - \varrho\lambda\right] Z_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda}) + \sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w''' = -\left[\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{\varrho^2} - (\nu-1)\lambda\right] Z_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda}) +$$

$$+\left[\frac{\nu(\nu+2)}{\varrho} - \varrho\lambda\right]\sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w^{\mathrm{IV}} = \left[\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{\varrho^3} - \frac{2\nu^2+2\nu-1}{\varrho}\lambda + \varrho\lambda^2\right] Z_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda}) -$$

$$-\,2\left[\frac{\nu(\nu+2)}{\varrho^2} + \lambda\right]\sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

oder

$$\text{(2.19e)} \quad w = \varrho\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})\,, \quad w' = \nu\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda}) - \varrho\sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w'' = \left[\frac{\nu(\nu-1)}{\varrho} - \varrho\lambda\right] Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda}) - \sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w''' = \left[\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{\varrho^2} - (\nu+1)\lambda\right] Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda}) -$$

$$-\left[\frac{\nu(\nu-2)}{\varrho} - \varrho\lambda\right]\sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})\,,$$

$$w^{\mathrm{IV}} = \left[\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{\varrho^3} - \frac{2\nu^2-2\nu-1}{\varrho}\lambda + \varrho\lambda^2\right] Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda}) +$$

$$+\,2\left[\frac{\nu(\nu-2)}{\varrho^2} + \lambda\right]\sqrt{(\lambda)}\, Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})$$

in die Gl. (2.19b) kann man sich leicht davon überzeugen, dass alle Funktionen $Z_\nu(\varrho\sqrt{\lambda})$, $\varrho\, Z_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda})$ und $\varrho\, Z_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})$ diese Gleichung wirklich befriedigen. Die allgemeine Lösung der Gl. (2.19a), resp. (2.19b), kann also in der Gestalt

$$\text{(2.19f)} \qquad w = A_1\, J_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) + A_2\varrho\, J_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda}) + A_3\, Y_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) + A_4\varrho\, Y_{\nu+1}(\varrho\sqrt{\lambda})$$

oder

$$\text{(2.19g)} \qquad w = B_1\, J_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) + B_2\varrho\, J_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda}) + B_3\, Y_\nu(\varrho\sqrt{\lambda}) + B_4\varrho\, Y_{\nu-1}(\varrho\sqrt{\lambda})$$

gewählt werden, wobei die Integrationskonstanten A_1 bis A_4 von den Konstanten B_1 bis B_4 allgemein verschieden sind. Da zwischen den Zylinderfunktionen für die Parameterwerte $\nu - 1$, ν und $\nu + 1$ die bekannte Beziehung [6, 7, 8]

$$z\, Z_{\nu-1}(z) + z\, Z_{\nu+1}(z) = 2\nu\, Z_\nu(z) \tag{2.19h}$$

besteht, ist einer von den mit Hilfe der Formeln (2.19c), (2.19d) und (2.19e) durchgeführten Beweisen allerdings überflüssig. Alle diese Formeln sind hier deswegen angegeben, weil sie in praktischen Anwendungen von Nutzen sein können.

Es ist klar, dass für theoretische Untersuchungen wie auch für numerische Berechnungen die Kenntnis der angegebenen allgemeinen Lösung im betrachteten Sonderfalle unvermeidlich ist; trotzdem wurde diese Lösung in der angeführten Literatur [1, 6, 7, 8] nicht gefunden.

2.4. Der Fall $\varepsilon > 1$

Im Falle $\varepsilon > 1$ liefert die charakteristische Gleichung (1.4) zwei verschiedene reelle positive Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}\,. \tag{2.20}$$

Bezeichnen wir mit α_1, α_2 die reellen positiven Zahlen

$$\alpha_1 = +\sqrt{[\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}]}\,, \quad \alpha_2 = +\sqrt{[\varepsilon - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}]}\,, \tag{2.21}$$

so folgt für die allgemeine Lösung der Gl. (1.1) im Falle $\varepsilon > 1$ nach den Formeln (1.2), (2.20) und (2.21)

$$\begin{aligned} w = {} & A_1\, J_0(\alpha_1 \varrho) + A_2\, J_0(\alpha_2 \varrho) + \\ & + A_3\, Y_0(\alpha_1 \varrho) + A_4\, Y_0(\alpha_2 \varrho)\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Die numerischen Werte der in (2.22) enthaltenen Zylinderfunktionen können in [6] oder auch in den Tabellen [4, 5] gefunden werden.

2.5. Der Fall $0 > \varepsilon > -1$

Mit $\varepsilon < 0$ nimmt die Gl. (1.1) die folgende Gestalt an:

$$\Delta^2 w - 2|\varepsilon|\, \Delta w + w = 0\,. \tag{2.23}$$

Durch diese Beziehung wird z. B. die Grundgleichung der verschärften Theorie der auf elastischer Unterlage gebetteten Kreis- und Kreisringplatten [2] oder die Grundgleichung der klassischen Theorie derselben Platten unter dem Angriff von gleichmässig verteilten radialen Zugkräften [1] dargestellt.

Für den Fall $0 > \varepsilon > -1$ hat die charakteristische Gleichung (1.4) zwei komplexkonjugierte Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = -|\varepsilon| \pm i\sqrt{(1 - \varepsilon^2)}\,. \tag{2.24}$$

Setzt man

$$|\varepsilon| = -\cos 2\varphi\,, \quad \sqrt{(1-\varepsilon^2)} = \sin 2\varphi\,, \tag{2.25}$$

wobei

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{|\varepsilon|}\right] \tag{2.26}$$

ist, so folgt aus (2.24)

$$\lambda_{1,2} = \cos 2\varphi \pm \mathrm{i}\sin 2\varphi = \mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\varphi}\,. \tag{2.27}$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (2.23) nimmt dann wieder die Gestalt (2.9) an, wobei der „Winkel" φ jetzt allerdings durch die Formel (2.26) definiert wird.

2.6. Der Fall $\varepsilon = -1$

Für $\varepsilon = -1$ geht die Gl. (1.1) über in

$$\Delta^2 w - 2\Delta w + w = 0 \quad \text{oder} \quad (\Delta - 1)^2\, w = 0\,. \tag{2.28}$$

Aus der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$(\lambda + 1)^2 = 0 \tag{2.29}$$

ergibt sich jetzt eine zweifache negative Wurzel

$$\lambda_{1,2} = -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\,. \tag{2.30}$$

Eine partikuläre Lösung der Gl. (2.28) bildet also nach (1.2) und (2.30) die Zylinderfunktion nullten Parameterwertes mit rein imaginärem Argument

$$w = Z_0(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})\,, \tag{2.31}$$

während die andere nach den im Absatze 2.3 angeführten Formeln durch die Funktion

$$w = \varrho\, Z_1(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) \tag{2.32}$$

dargestellt wird.

Für die Ableitungen der Funktion (2.32) gilt

$$\begin{aligned} w' &= \varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\, Z_0(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})\,, \\ w'' &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\, Z_0(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) + \varrho\, Z_1(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})\,, \\ w''' &= \varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\, Z_0(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) + Z_1(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})\,, \\ w^{\mathrm{IV}} &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\, Z_0(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) + \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right) Z_1(\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Aus diesen Beziehungen entsteht

$$\begin{aligned} (2.34) \qquad \Delta w &= 2e^{i\pi/2}\, Z_0(\varrho e^{i\pi/2}) + \varrho\, Z_1(\varrho e^{i\pi/2}) \,, \\ \Delta^2 w &= 4e^{i\pi/2}\, Z_0(\varrho e^{i\pi/2}) + \varrho\, Z_1(\varrho e^{i\pi/2}) \,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (2.32) und (2.34) in die Gl. (2.28) kann man sich leicht davon überzeugen, dass ausser der Funktion (2.31) auch die Funktion (2.32) der Gl. (2.28) genügt und deshalb eine ihre partikuläre Lösung angibt. Diese Tatsache wurde allerdings im allgemeinen durch die Beziehungen (2.19) beglaubigt.

Als allgemeine Lösung der Gl. (2.28) können wir also z. B. die Funktion

$$\begin{aligned} (2.35a) \qquad w = {} & A_1\, J_0(\varrho e^{i\pi/2}) + A_2 \varrho\, J_1(\varrho e^{i\pi/2}) + \\ & + A_3\, Y_0(\varrho e^{i\pi/2}) + A_4 \varrho\, Y_1(\varrho e^{i\pi/2}) \end{aligned}$$

wählen, die sich in der folgenden reellen Gestalt umschreiben lässt:

$$\begin{aligned} (2.35b) \qquad w = {} & A_3 \operatorname{Re} Y_0(\varrho e^{i\pi/2}) + B_1 \operatorname{Im} Y_0(\varrho e^{i\pi/2}) + \\ & + B_2 \varrho \operatorname{Re} Y_1(\varrho e^{i\pi/2}) - |A_4|\, \varrho \operatorname{Im} Y_1(\varrho e^{i\pi/2}) \,, \end{aligned}$$

wo B_1 und B_2 neue reelle Integrationskonstanten bedeuten. Die numerischen Werte der in (2.35b) enthaltenen Zylinderfunktionen kann man aus [5] entnehmen.

Zur Herleitung der Funktion (2.35b) aus (2.35a) wurden die bekannten Beziehungen

$$(2.36) \qquad J_0(\varrho e^{i\pi/2}) = \operatorname{Im} Y_0(\varrho e^{i\pi/2}) \,, \quad \operatorname{Im} J_1(\varrho e^{i\pi/2}) = - \operatorname{Re} Y_1(\varrho e^{i\pi/2})$$

benutzt, die sich aus der Definition der Funktion $Y_n(z)$, $n = 0, 1$, ergeben.

Statt der Funktion (2.35a) kann als eine allgemeine Lösung der Gl. (2.28) auch die Funktion

$$\begin{aligned} (2.35c) \qquad w = {} & C_1\, J_0(\varrho e^{i\pi/2}) + C_2 \varrho\, J_1(\varrho e^{i\pi/2}) + \\ & + C_3\, H_0^{(1)}(\varrho e^{i\pi/2}) + C_4 \varrho\, H_1^{(1)}(\varrho e^{i\pi/2}) \end{aligned}$$

eingeführt werden, deren reelle Form

$$(2.35d) \qquad w = B_1\, I_0(\varrho) - B_2 \varrho\, I_1(\varrho) - \frac{2}{\pi} A_3\, K_0(\varrho) - \frac{2}{\pi} |A_4|\, \varrho\, K_1(\varrho)$$

ist. Die hier benutzten Integrationskonstanten B_1, B_2, A_3 und $|A_4|$ sind dieselben reellen Grössen (im betrachteten Problem Längen, welche die „partiellen" Plattendurchbiegungen angeben) wie in der Lösung (2.35b) und $I_0(\varrho)$, $I_1(\varrho)$, $K_0(\varrho)$, $K_1(\varrho)$ bedeuten die modifizierten Besselschen Funktionen der Parameterwerte Null und Eins, die von den in (2.35c) angewandten Zylinderfunktionen nach den folgenden

Formeln abhängen

$$(2.37)\quad \begin{aligned} I_0(\varrho) &= J_0(\varrho e^{i\pi/2}) = \operatorname{Im} Y_0(\varrho e^{i\pi/2}),\\ I_1(\varrho) &= -i\, J_1(\varrho e^{i\pi/2}) = \operatorname{Im} J_1(\varrho e^{i\pi/2}) = -\operatorname{Re} Y_1(\varrho e^{i\pi/2}),\\ K_0(\varrho) &= \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\varrho e^{i\pi/2}) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Im} H_0^{(1)}(\varrho e^{i\pi/2}) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Re} Y_0(\varrho e^{i\pi/2}),\\ K_1(\varrho) &= -\frac{\pi}{2}\operatorname{Re} H_1^{(1)}(\varrho e^{i\pi/2}) = \frac{\pi}{2}\operatorname{Im} Y_1(\varrho e^{i\pi/2}). \end{aligned}$$

Die numerischen Werte der in (2.35d) enthaltenen Zylinderfunktionen können in [6] oder unter Benützung der Formeln (2.37) auch in [5] gefunden werden.

2.7. Der Fall $\varepsilon < -1$

In diesem Falle liefert die charakteristische Gleichung (1.4) zwei verschiedene reelle negative Wurzeln

$$(2.38)\qquad \lambda_{1,2} = -|\varepsilon| \pm \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}.$$

Unter Benützung der Bezeichnungen (2.21) für reelle positive Zahlen

$$(2.39)\qquad \alpha_1 = +\sqrt{[|\varepsilon| + \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}]}, \quad \alpha_2 = +\sqrt{[|\varepsilon| - \sqrt{(\varepsilon^2 - 1)}]}$$

lässt sich die allgemeine Lösung der Gl. (1.1) für $\varepsilon < -1$ nach den Beziehungen (1.2), (2.38) und (2.39) in der Form

$$(2.40a)\qquad \begin{aligned} w = {} & A_1 J_0(\alpha_1\varrho e^{i\pi/2}) + A_2 J_0(\alpha_2\varrho e^{i\pi/2}) +\\ & + A_3 Y_0(\alpha_1\varrho e^{i\pi/2}) + A_4 Y_0(\alpha_2\varrho e^{i\pi/2}) \end{aligned}$$

schreiben. Da wieder analog zu (2.36) die Beziehung

$$(2.41)\qquad J_0(\alpha_k\varrho e^{i\pi/2}) = \operatorname{Im} Y_0(\alpha_k\varrho e^{i\pi/2})$$

gilt, nimmt die Funktion (2.40a) die folgende reelle Gestalt an:

$$(2.40b)\qquad \begin{aligned} w = {} & A_3 \operatorname{Re} Y_0(\alpha_1\varrho e^{i\pi/2}) + A_4 \operatorname{Re} Y_0(\alpha_2\varrho e^{i\pi/2}) +\\ & + B_1 \operatorname{Im} Y_0(\alpha_1\varrho e^{i\pi/2}) + B_2 \operatorname{Im} Y_0(\alpha_2\varrho e^{i\pi/2}). \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten A_1 und A_2 in (2.40a) bedeuten also komplexe Grössen, die Konstanten A_3 und A_4 in (2.40a) und (2.40b) reelle Grössen und B_1 und B_2 sind neue reelle Integrationskonstanten. Mit Rücksicht auf die mögliche Benützung der Tabellen [5] zeigt sich die Form der Funktion (2.40b) für praktische Berechnungen als völlig zweckmässig.

Als allgemeine Lösung der Gl. (1.1) kann allerdings im betrachteten Falle auch die Funktion

$$w = C_1 \mathrm{J}_0(\alpha_1 \varrho e^{i\pi/2}) + C_2 \mathrm{J}_0(\alpha_2 \varrho e^{i\pi/2}) + \\ + C_3 \mathrm{H}_0^{(1)}(\alpha_1 \varrho e^{i\pi/2}) + C_4 \mathrm{H}_0^{(1)}(\alpha_2 \varrho e^{i\pi/2}) \tag{2.40c}$$

gewählt werden, die nach Einführung der modifizierten Besselschen Funktionen

$$\mathrm{I}_0(\alpha_k \varrho) = \mathrm{J}_0(\alpha_k \varrho e^{i\pi/2}), \tag{2.42}$$

$$\mathrm{K}_0(\alpha_k \varrho) = \frac{i\pi}{2} \mathrm{H}_0^{(1)}(\alpha_k \varrho e^{i\pi/2}) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \mathrm{H}_0^{(1)}(\alpha_k \varrho e^{i\pi/2}) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Re} \mathrm{Y}_0(\alpha_k \varrho e^{i\pi/2})$$

mit denselben Integrationskonstanten wie in (2.40b) die folgende reelle Gestalt annimmt:

$$w = B_1 \mathrm{I}_0(\alpha_1 \varrho) + B_2 \mathrm{I}_0(\alpha_2 \varrho) - \\ - \frac{2}{\pi} A_3 \mathrm{K}_0(\alpha_1 \varrho) - \frac{2}{\pi} A_4 \mathrm{K}_0(\alpha_2 \varrho) . \tag{2.40d}$$

Die numerischen Werte der in (2.40d) enthaltenen Zylinderfunktionen kann man wieder aus [6] entnehmen.

3. ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine vollständige Übersicht der allgemeinen Lösungen der in der Elastizitätstheorie vorkommenden Differentialgleichung (1.1) vierter Ordnung angegeben, deren partikuläre Lösung durch die Zylinderfunktion (1.2) nullten Parameterwertes mit reellem, imaginärem oder komplexem Argument dargestellt wird. Für ein neues Ergebnis hält der Verfasser die angeführten allgemeinen Lösungen in den Sonderfällen $\varepsilon = \pm 1$ (Absätze 2.3 und 2.6), die unter gewissen physikalischen, geometrischen und statischen Bedingungen entstehen können. In praktischen Anwendungen ist die Kenntnis der allgemeinen Lösung für diese Sonderfälle offenbar unvermeidlich.

Im Absatze 2.3 ist im allgemeinen bewiesen, dass die andere unabhängige partikuläre Lösung der zweifachen Besselschen Differentialgleichung (2.19a) für den Parameterwert ν durch das Produkt der unabhängigen Veränderlichen und der Zylinderfunktion des Parameterwertes $\nu + 1$ oder $\nu - 1$ dargestellt wird.

Literaturverzeichnis

[1] *B. G. Korenjew:* Einige in Besselschen Funktionen lösbare Aufgaben der Elastizitätstheorie und Wärmeleitung (russisch), Moskau 1960.
[2] *V. Panc:* Theorie der schubweichen Kreisplatte auf elastischer Unterlage, Acta mechanica, Vol. I/3, 1965, 294—317.
[3] *F. Schleicher:* Kreisplatten auf elastischer Unterlage, Berlin 1926.
[4] Table of the Bessel Functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for Complex Arguments, New York 1943, Moskau 1963.
[5] Table of the Bessel Functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for Complex Arguments, New York 1950, Moskau 1963.
[6] *Jahnke-Emde-Lösch:* Tafeln höherer Funktionen, Stuttgart 1960.
[7] *E. Kamke:* Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, B. 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig 1951.
[8] *E. T. Whittaker, G. N. Watson:* A Course of Modern Analysis, Cambridge 1927.

Souhrn

OBECNÉ ŘEŠENÍ JEDNÉ CYLINDRICKÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ČTVRTÉHO ŘÁDU NULTÉHO INDEXU

VLADIMÍR PANC

Je podán souhrnný přehled obecných řešení obyčejné diferenciální rovnice čtvrtého řádu (1.1), jejímž partikulárním řešením je cylindrická funkce nultého indexu (1.2) s argumentem reálným, imaginárním nebo komplexním. Uvažovanou rovnicí je definována řada závažných osově souměrných problémů teorie pružnosti vyšetřovaných ve válcových souřadnicích [1, 2, 3].

Zvláště je uveden případ (odstavce 2.3 a 2.6), který může nastat při jistém poměru fyzikálních, geometrických a statických charakteristik zkoumaného problému, kdy příslušná rovnice charakteristická (1.4) má jeden dvojnásobný kořen a do fundamentálního systému řešení tak vstupují dvakrát dvě stejné cylindrické funkce téhož indexu a s týmž argumentem. V odst. 2.3 je obecně dokázáno, že dalším nezávislým partikulárním řešením dvojnásobné Besselovy diferenciální rovnice (2.19a) indexu ν je kromě cylindrické funkce téhož indexu součin nezávisle proměnné a cylindrické funkce s týmž argumentem a s indexem o jedničku vyšším nebo nižším. Uvedené obecné řešení, jež je v praktických aplikacích nezbytně nutno znát, nebylo v citované literatuře [1, 6, 7, 8] nalezeno.

Anschrift des Verfassers: Doc. Ing. *Vladimír Panc*, DrSc., Stavební ústav ČVUT, Šolínova 7, Praha 6.