Aplikace matematiky

Recense

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 6, 465–475

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103317

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

RECENSE

J. J. Stoker: DIFFERENTIAL GEOMETRY. Wiley-Interscience a Division of John Wiley & Sons, New York—London—Sydney—Toronto 1969 (Pure and Applied Mathematics, A Series of Texts and Monographs, Edited by R. Courant - L. Bers - J. J. Stoker, Volume XX). Stran XXI + 404, cena neuvedena.

Excelentní učebnice, kterou je třeba velmi vysoko hodnotit.

Autor na sebe mnoho prozrazuje v úvodu, ze kterého uvedu první odstavec:

„Před více než 35 lety mě uvedly do předmětu této knihy přednášky mého přítele a učitele Heinze Hopfa na Vysoké škole technické v Curychu. Zamýšlel jsem získat akademický titul v užité matematice a mechanice, ale Heinz Hopf mě tak ovlivnil a vzbudil u mne takový zájem, že jsem na jeho téma napsal these o diferenciální geometrii ve velkém. Má pozdější kariéra vedla matematickými obory se vztahem k mechanice a matematické fyzice. Přesto mě diferenciální geometrie stále přitahovala a obracela mé myšlenky opět a opět k různým problémům ve velkém — zvláště při častých příležitostech, kdy jsem jí učil. Bohužel, mé úsilí v tomto směru mělo značně hubené výsledky, takže se cítím na tomto poli amatérem. Ale i když jsem amatérem v etymologickém slova smyslu, doufám, že něco z mé lásky k diferenciální geometrii bude nakažlivé a přenese se na čtenáře mé knihy.“

Nebudu vypisovat obsah kapitol, ale pokusím se učebnici poněkud charakterisovat srovnáním s vývojem knih o diferenciální geometrii křivek a ploch v trojrozměrném euklidovském prostoru.

Koncem minulého století vyšla dvě vysoko vynikající díla, G. Darboux: „Leçons sur la théorie générale des surfaces“, Paris 1887—96 a L. Bianchi: „Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1886[1]). Darbouxovo čtyřdílné kompendium je shrnutím a zpracováním všech výsledků z 19. století, Bianchiho kniha pak pokusem o uvážený výběr základní látky a hlavních směrů, které jsou nutné k seznámení s obecnými metodami a ke studiu speciální literatury. Rozsáhlé Darbouxovo dílo mělo na diferenciální geometrii menší vliv než Bianchiho učebnice. Ta vysoko vynikla a její vliv je zřetelně patrný ještě dnes. Kdo je seznámen alespoň v hlavních rysech s rozsáhlým obsahem Darbouxových svazků, ocení geniálnost Bianchiho volby. Zhruba první třetina Bianchiho knihy se stala — v té nebo oné formě — standartním obsahem učebnic o diferenciální geometrii křivek a ploch v trojrozměrném euklidovském prostoru. České učebnice B. Hostinského: „Diferenciální geometrie křivek a ploch“, Praha 1915[2]) a V. Hlavatého: „Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet“, Praha 1937[3]) jsou Bianchimu po obsahové stránce zcela poplatné.

Protipól k Bianchiho knize vytvořil W. Blaschke. Jeho učebnice „Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie I: Elementare Differen-

[1]) Po prvé jako litografované přednášky. U nás je dílo známější v německém Lukatově překladu „Vorlesungen über Differentialgeometrie“, Leipzig 1899; 2. vyd. 1910.

[2]) Druhé přepracované a rozšířené vydání Praha 1942, 3. vyd. 1950. V její druhé kratší části — při aplikaci diferenciálních rovnic — je vyložena Darbouxova metoda pohyblivého trojhranu, která se dočkala náležitého uplatnění až ve spojitosti s Cartanovým počtem.

[3]) Německý překlad Groningen 1939.

tialgeometrie, Berlin 1921[4]) je prvním pokusem o vyváženou syntézu lokální diferenciální geometrie Bianchiho pojetí a diferenciální geometrie ve velkém. Je o to pozoruhodnější, že k systematickému rozvoji geometrie ve velkém došlo teprve v předcházejících nejvýše pětadvaceti letech. Blaschkeho kniha je velmi vyvážená. Z celkového rozsahu asi 230 stran jsou jak v teorii křivek tak v teorii ploch asi dvě pětiny věnovány globálním problémům. Podle Kleinova vzoru spojuje W. Blaschke na nejrůznějších místech diferenciální geometrii s mechanikou. Příkladem mohou být důkazy Schwarzových vět z geometrie ve velkém prostorových křivek.

Sledujme podobné poměry ve Stokerově knize. Geometrie ve velkém zaujímá v teorii křivek asi čtvrtinu, v teorii ploch necelé dvě pětiny. Asi z 60 stran o teorii křivek přibližně třetina pojednává o prostorových křivkách, a to výhradně z lokálního stanoviska. Je nejasné, proč autor vůbec nezařadil do teorie prostorových křivek žádnou ukázku z geometrie ve velkém, když tyto problémy opět zprostředkují spojení diferenciální geometrie s topologií, jak ihned na jednom příkladě ukáži. Je to nejasné tím víc, že pro Stokerovu knihu je charakteristický úzký vztah k topologii.

V roce 1929 v práci „Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven", Math. Ann. *101* (1929), 238—252, která později velmi významně ovlivnila teorii prostorových uzavřených čar, objevil W. Fenchel tuto nerovnost: Je-li k flexe uzavřené křivky C druhé třídy, je její totální křivost $\int_C k \, \mathrm{d}s \geqq 2\pi$ a rovnost platí jedině tehdy, když C je rovinná a konvexní. K. Borsuk v r. 1948 vyslovil otázku, zda prostorová zauzlená křivka (tj. homeomorfní, ale nikoliv isotopická s kružnicí) má totální křivost $\geqq 4\pi$. Hned v příštím roce ji positivně zodpověděl J. Fáry. V jeho práci „Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noed", Bull. Soc. Math. France *77* (1949), 128—138 je pozoruhodná myšlenka. Označme k_σ totální křivost rovinné čáry, která je průmětem čáry C do roviny kolmé ke směru, určenému bodem σ jednotkové kulové plochy ω. Střední hodnota funkce k_σ na ω je rovna totální křivosti čáry C. Z toho ihned plyne Fenchelova nerovnost, neboť $k_\sigma \geqq 2\pi$ (pokud ovšem křivost definujeme jako nezápornou funkci). Stoker definuje křivost poněkud jinak: Pro čáru o oblouku s, jejíž běžný bod má v pravoúhlých souřadnicích x, y průvodič $\mathbf{x}(s)$, je $\mathbf{v}_1 = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}s$ jednotkový tečný vektor, který doplníme jednotkovým vektorem $\mathbf{v}_2$ na dvojici, která má stejnou orientaci jako souřadnicové osy x, y. Poněvadž $\mathrm{d}^2\mathbf{x}/\mathrm{d}s^2$ je kolineární s $\mathbf{v}_2$, lze křivost k definovat vztahem $k\mathbf{v}_2 = \mathrm{d}^2\mathbf{x}/\mathrm{d}s^2$. Při takto definované křivosti je totální křivost Jordanovy křivky rovna 2π. To spolu se známou Jordanovou větou o rozdělení roviny spojitou uzavřenou křivkou bez dvojných bodů, se Schmidtovým důkazem, že Jordanova křivka s všude nenulovou křivostí ohraničuje konvexní oblast a s větou o čtyřech vrcholech v nezostřené formě vyčerpává část o geometrii ve velkém rovinných čar. Věta o konvexitě Jordanovy křivky s positivní křivostí zatím v učebnicích diferenciální geometrie nijak nezdomácněla, ačkoliv její fundamentální význam pro teorii konvexních rovinných čar je očividný.

Úzký vztah diferenciální geometrie k mechanice a fyzice demonstruje Stoker zvláště v patnáctistránkovém oddílu o základech speciální teorie relativity, relativistické dynamiky a obecné teorie relativity. Vystopovat zřetelný záměr o zdůraznění jiných aplikací diferenciální geometrie mimo rámec matematiky se mi nepodařilo. Je nápadné, jak se knihy o diferenciální geometrii vyhýbají jejím hlubším souvislostem s vyšší geodézií. I z historického hlediska je to zcela nesprávné. Nejhlubší impuls nedal aplikacím analysy na geometrii ani L. Euler, ani G. Monge, ale E. F. Gauss svým pojednáním „Disquisitiones generales circa superficies curvas" z r. 1827. Toto jeho dílo — zrovna tak jako první méně významná Gaussova práce o konformním zobrazení ploch, publiko-

---

[4]) Další vydání byla rozšířena: 2. vyd. 1924, 3. vyd. 1930, 4. vyd. 1946. „Elementárnost" ilustruje tato poznámka: Na str. 125 v paragrafu „Aufgaben und Lehrsätze" je Gaussovo zobecnění Legendreovy věty a přitom aplikace Gaussova výsledku je obtížná záležitost v matematické vyšší geodézii: Jsou-li α, β, γ úhly geodetického trojúhelníka o obsahu F na ploše, jejíž Gaussova křivost ve vrcholech je K_α, K_β, K_γ a jsou-li α_*, β_*, γ_* úhly rovinného trojúhelníka se stejně dlouhými stranami, pak $\alpha - \alpha_* \doteq F(2K_\alpha + K_\beta + K_\gamma) : 12$ a cycl.

vaná v r. 1825 — vzniklo z geodetických prací, když od počátku dvacátých let minulého století Gauss jako ředitel astronomické observatoře v Göttingen vedl vyměřování Hannoverska. Dnes se dočkaly diferenciálně-geometrické metody ve vyšší geodézii renesance a jsou kombinovány jak s fyzikálními gravimetrickými měřeními, tak s možnostmi, které poskytuje kosmická geodézie s využitím umělých družic. V posledních letech bylo uzavřeno nejrozsáhlejší geodetické měření podél poledníku zhruba od Střelkového mysu na jihoafrickém pobřeží podél Nilu, v blízkosti Istambulu, Kijeva a Leningradu až k Severnímu mysu v Norsku; uzavření tohoto geodetického měření umožnilo nové geometrické propočítání rozměrů geoidu. V recensované knize je absence odkazu na vyšší geodézii o to podivnější, že je v ní Aleksandrovova srovnávací věta, ostatně brilantní ukázka mnoha úzkých korelací mezi vyšší geodézií a diferenciální geometrií ve velkém: Budiž Δ geodetický trojúhelník na ploše π s úhly α, β, γ. Budiž π^* (resp. π_*) plocha konstantní Gaussovy křivosti, rovné maximu K^* (resp. minimu K_*) Gaussovy křivosti K plochy π na trojúhelníku Δ. Nechť α^*, β^*, γ^* (resp. α_*, β_*, γ_*) jsou úhly trojúhelníka na π^* (resp. π_*), který má stejně dlouhé strany jako trojúhelník Δ. Pak $\alpha^* \geqq \alpha$ (resp. $\alpha_* \leqq \alpha$) a cycl. s rovností jedině tehdy, když $K =$ konst. uvnitř trojúhelníka Δ. Specielně pro úhly α, β, γ sférického trojúhelníka s excesem ε na jednotkové kulové ploše a úhly α_*, β_*, γ_* rovinného trojúhelníka se stejně dlouhými stranami platí $0 < \alpha - \alpha_* < \varepsilon$ a cycl.; zlepšení tohoto odhadu je otevřená záležitost.[5]) Slavná věta, kterou A. M. Legendre publikoval v r. 1787 a poprvé dokázal v r. 1798, říká, že $\alpha - \alpha^* \doteq \varepsilon/3$ [6]).

V partiích o geometrii ve velkém autor zřetelně zdůrazňuje souvislosti s topologií. Příkladem může být zobecnění Hadamardovy věty. Ta je velmi intuitivní, ale nikterak triviální: Uzavřená plocha s všude positivní Gaussovou křivostí je konvexní a tedy homeomorfní s kulovou plochou. Poznamenejme, že analogická věta v rovině neplatí: Uzavřená křivka s všude positivní křivostí nemusí být konvexní; je jen lokálně konvexní. J. Hadamard se citovanou větou zabýval poprvé v pojednání „Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique", J. Math. Pures Appl. *(5) 3* (1897), 331—387 a podruhé její důkaz nastínil v práci „Sur les surfaces à courbure positive", Bull. Soc. Math. France *31* (1903), 300—301. Stojí za zmínku, že v knižní literatuře o diferenciální geometrii ve velkém anebo o teorii konvexních ploch se Hadamardova věta přes svou očividnou významnost zatím nijak důkladněji nezabydlela; tak třeba i T. Bonnesen a W. Fenchel v znamenité a zcela ojedinělé knize „Theorie der konvexen Körper", Berlin 1934 se o ní a jejím důkazu zmiňují jen letmo. Hadamardův postup analysoval S. Cohn-Vossen v práci „Singularitäten konvexer Flächen", Math. Ann. *97* (1927), 377—386[7]) a jako první Hadamardovu větu zobecnil: Je-li plocha se spojitou Gaussovou křivostí $K \geqq c =$ konst. > 0 tak prodlužovaná, že křivost K je stále spojitá a nikoliv menší než c, pak se ta plocha buďto uzavře a je konvexní anebo se na ní objeví singulární bod.

Slavná věta o singularitě plochy s konstantní zápornou Gaussovou křivostí z Hilbertovy práce: „Über Flächen konstanter Gaussischer Krümmung", Trans. Amer. Math. Soc. *2* (1901), 87—99[8]) už v učebnicích diferenciální geometrie zcela zdomácněla. To nelze zatím říci o objevu z druhé části této Hilbertovy práce: Hlavní křivosti plochy s konstantní positivní Gaussovou křivostí nemohou nabýt extrému v nekruhovém vnitřním bodě. Z této věty lokálního charakteru D. Hilbert velmi jednoduše odvodil, co z jeho podnětu o dva roky dříve složitě dokázal H. Liebmann v práci „Eine neue Eigenschaft der Kugel", Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1899), 44—55: Uzavřená regulární plocha s konstantní positivní Gaussovou křivostí je kulová. Hilbertův důkaz modifiko-

[5]) Srv. A. Д. Александров: Внутренная геометрия выпуклых поверхностей, Москва 1948; německý překlad Berlin 1955.

[6]) Srv. pozn. [4]).

[7]) Přetištěna v knize С. Э. Кон-Фоссен: Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, Москва 1958.

[8]) Znovu jako V. dodatek v 7. vydání „Grundlagen der Geometrie", Leipzig—Berlin 1930.

vali zvláště W. Blaschke ve výše citované knize a S. Cohn-Vossen v práci „Изгибаемость поверхностей в „целом"", Успехи мат. наук *1* (1936), 33—76[9]). W. Blaschke pak ještě umělým obratem pomocí Bonnetova poznatku o paralelních plochách ukázal, že z Hilbertova teorému plyne i obměna Liebmannovy věty, v níž Gaussova křivost je nahrazena střední křivostí. J. J. Stoker uvádí na základě Hilbertovy věty dokonce obecnější Chernův výsledek o Weingartenových plochách z práce „Some new charakterizations of the Euclidean sphere", Duke Math. J. *12* (1945), 279—290: „Uzavřená regulární plocha positivní Gaussovy křivosti s takovými hlavními křivostmi k_1, k_2, že k_2 jednak není menší než k_1 a jednak je nerostoucí funkcí argumentu k_1, je nutně kulová.

Diferenciální geometrii lze ovšem studovat bez nějaké zvláštní metody. L. Bianchi ve svém význačném výše citovaném díle neužil ani vektorového počtu. W. Blaschke jej už aplikoval a stejně postupuje v hlavních částech své knihy J. J. Stoker. Teprve v předposlední kapitole (53 stran) rozvíjí tensorový počet v euklidovském, afinním a Riemannově prostoru a aplikuje jej na problémy mechaniky a fyziky, zvláště teorie relativity (tensorová algebra je předmětem dodatku). To je velmi přirozené vzhledem k tomu, jak úzce sepjal A. Einstein ve svém základním díle obecnou teorii relativity s Ricciho počtem. V poslední kapitole (35 stran) vykládá autor stručně teorii vnějších forem a metodu pohyblivého reperu v teorii ploch. Závěrečný odstavec této kapitoly je věnován tuhosti konvexních ploch podle H. Liebmanna a třem známým klasickým problémům H. Weyla, H. Minkowskiho, E. Christoffela o určenosti plochy, pro niž je na jejím sférickém obrazu zadán lineární element nebo Gaussova křivost nebo součet hlavních poloměrů křivosti. Ve všech třech případech jsou uvedeny důkazy o jednoznačnosti; při Christoffelově problému podle L. Nirenberga, při Minkowskiho problému podle S. Cherna („A proof of the uniqueness of Minkowski's problem for convex surfaces", Amer. J. Math. *79* (1957), 949—950) a konečně při Weylově problému podle G. Herglotze („Über die Starrheit der Eiflächen", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *15* (1943), 127—129) na základě jeho známé integrální identity v modifikaci, kterou v podstatě uvádí W. Blaschke ve své učebnici „Einführung in die Differentialgeometrie", Berlin—Göttingen—Heidelberg 1950[10]). Pochybuji, že tyto poměrně složitější aplikace vnějších forem a metody pohyblivého reperu budou začátečníkovi dobře srozumitelné; i v právě citované Blaschkeho knize, v níž je snadno přístupnému výkladu vnějších forem v teorii ploch věnováno podstatně více místa, zůstává Herglotzův důkaz patrně jejich nejobtížnější aplikací.

Početní metody jsou v některých učebnicích velmi zdůrazněny, dokonce tak příliš, že mohou začátečníkovi zastírat i obsah a nechávat ho v pochybnostech, zda metoda není důležitější. Je takovými učebnicemi postaven před úkol, osvojit si geometrický obsah diferenciální geometrie i její metodu. To je jistě velký nárok. Před podobnou námitkou stojí v souvislosti s tensorovým počtem třeba výše citovaná kniha V. Hlavatého a při Cartanově počtu kniha J. Favarda: „Cours de géométrie différentielle locale", Paris 1957[11]). Potenciální představa o nepřiměřeném významu manipulace s indexy anebo vnějšího diferencování s prolongacemi je v Stokerově knize eliminována.

Motivacemi důležitých pojmů nebo výsledků J. J. Stoker nešetří a poskytuje tím začátečníkovi jistě víc, než by mu daly dlouhé výpočty. Ty — naopak — a jistě k prospěchu — autor velmi omezil. I nejpovrchnější prolistování Stokerovy knihy ukáže na její zvláštnost: Stránky zcela souvislého textu, bez přerušení vzorci, nejsou žádnou vzácností — a to je v učebnicích diferenciální geometrie jistě nezvyklé.

Shrnuji: Ústřední část knihy je poznamenána Bianchiho pojetím a výkladem, ovšem s vektorovým počtem. Relace v rozsahu lokální a globální geometrie jsou velmi zhruba podobné jako

---

[9]) Viz též knihu citovanou v pozn. [7]).

[10]) 2. rozšířené vyd. 1960 spolu s H. Reichardtem. Ruský překlad 1. vydání Moskva 1957.

[11]) Ruský překlad Moskva 1960.

v Blaschkeho knize z r. 1921; v geometrii ve velkém zdůrazňuje J. J. Stoker topologii, W. Blaschk isoperimetrické problémy. Tensorový počet a Cartanův počet jsou vyloženy odděleně. Kdyby tyto dvě metody byly ještě doplněny zatím velmi málo rozšířeným přímým studiem A. D. Aleksandrova[12]), a kdyby k aplikacím fyzikálním byly připojeny i geodetické a kdyby konečně místy poněkud úspornější výklad přes zmíněné doplňky znamenal zmenšení počtu stran, pak bych knihu s takovým rozvrhem považoval za optimální úvodní učebnici diferenciální geometrie.

Zbyněk Nádeník

D. Munford: GEOMETRIC INVARIANT THEORY. Springer Verlag Berlin—Heidelberg—New York, 145 stran.

Kniha obsahuje osm kapitol: Úvod, Základní věty pro působení redukované grupy, Analýza stability, Elementární příklady, Další příklady, Problém modulů (of moduli), Abelova schema Metoda kovariantů.

Kniha pojednává o orbitálních prostorech v kategorii algebraických variet a aplikuje tuto teorii k sestrojení prostoru modulů pro různé algebraické objekty. Přitom se ukazuje, že některé orbity jsou v takovém stupni „singulární", že je není možno zařadit do nějakého rozumného modelu prostoru orbitů. V knize jsou řešeny příklady a v některých případech bylo udáno kritérium stability. Autor používá jazyka schemat, který podle jeho názoru dovoluje formulovat v algebraické geometrii definice a věty v přirozeném tvaru.

Na konci knihy je seznam použité literatury. Ke čtení této knihy je zapotřebí dobrá znalost Grothendieckových Eléments de géometrie algébrique. Vedle toho byly použity četné výsledky, které byly publikovány a mnohé bez důkazů v Grothendieckových seminářích o algebraické geometrii. Autor čerpal z Hilbertovy práce Invariant Theory, některé výsledky převedl do jazyka předschemat a schemat a některé značně zobecnil. Kniha obsahuje mnoho vynikajících podnětů pro mladé matematiky, kteří chtějí pracovat v abstraktní algebraické geometrii.

J. Bílek

G. W. Mackey: INDUCED REPRESENTATIONS OF GROUPS AND QUANTUM MECHANICS. W. A. Benjamin (New York—Amsterdam) a Boringhieri (Torino) 1968, VIII + + 167, $ 8,50.

Od Frobenia (okolo r. 1900) pochází metoda, která umožňuje konstruovat representace grupy, známe-li representaci její podgrupy. U Frobenia jde ovšem o konečnou grupu a representace je konečné dimense. Na případ kompaktních grup rozšířil teorii Weil a přibližně současně použil metody „malé" grupy Wiegner ve své práci o representacích Poincarého grupy. Obecnou formulaci celého problému pro lokálně kompaktní grupy dal Mackey (Annals of Mathematics 55 (1952)).

První kapitola recensované knihy je věnována popisu konstrukce „indukované" representace pro lokálně kompaktní grupu a jejím vlastnostem. Konstrukce je podobná konstrukci regulární representace a v případě, že daná podgrupa (z jejíž representace se vychází) se redukuje na jednotkovou, přejde v regulární representaci. Technické potíže nastanou, když podgrupa není normální. Z vlastností připomínáme pak vztah mezi direktním integrálem representací a indukovanou

[12]) Viz výše citovanou knihu A. D. Aleksandrova a A. Д. Александров - В. А. Залгаллер: „Двумерные многообразия ограниченной кривизны", Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова, т. LXIII, Москва 1962; ч. II, т. LXXVI, Москва 1965 (tato druhá část je sborník dvanácti prací pod redakcí uvedených autorů). Stručný výklad Aleksandrovovy teorie uvádí H. Busemann: „Convex surfaces", New York 1958; ruský překlad Moskva 1964.

representací a nezávislost výsledku konstrukce indukované representace při rozšiřování po etapách.

V druhé kapitole jsou formulovány čtyři věty, týkající se jednak representací semidirektního součinu dvou grup, dále Stoneova věta o representaci komutativních grup a nejdůležitější věta D — „theorem of imprimitivity" —, která ná poučuje, jak nalézt všechny projektované míry na homogením prostoru. Poslední dvě věty tvoří fundament všeho dalšího výkladu a plynou z nich, jak je ukázáno, např. jednoznačnost operátorů splňujících Heisenbergovy komutační relace. Kapitola končí přehledem axiomatiky kvantového systému (jedné částice). Výklad je shodný s výkladem v „The Math. Foundations of Quantum Mechanics" od téhož autora.

Ve zbývajících třech kapitolách jsou aplikace vyloženého aparátu na

a) kvantovou mechaniku,
b) indukované representace poloprostých Lieových grup,
c) ergodickou teorii.

v a) se jedná vlastně o kvantovou mechaniku lokalizovatelných systémů (pro jednoduchost v Eukleidově prostoru — zobecnění na jiné prostory je bezprostřední), což je jak poznamenal Wightman, popsána právě větou D. Zmínka je také o interakci částic a vyšších symetriích (jen pro případ direktního součinu).

Způsob výkladu je dán vznikem této knihy. Je to zápis (i když poněkud rozšířený) čtyř dvouhodinových lekcí. Z toho důvodu jsou všechny důkazy buď vynechány nebo jen naznačeny. Přes tuto stručnost podává kniha jasný pohled na obory, které lze převést na společnou metodu — representaci grup.

Václav Alda

S. G. Michlin, Ch. L. Smolizki: NÄHERUNGSMETHODEN ZUR LÖSUNG VON DIFFERENTIAL — UND INTEGRALGLEICHUNGEN. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969. Stran 284, 23 obr.

Kniha je překladem sovětské publikace vyšlé v nakladatelství Nauka, Moskva v r. 1965 a byla zařazena jako 10. svazek knižnice Mathematik für Technische Hochschulen.

Kniha seznamuje čtenáře s nejdůležitějšími a nejčastěji užívanými metodami přibližného řešení počátečních a okrajových problémů pro obyčejné a parciální diferenciální rovnice a s metodami přibližného řešení integrálních rovnic nejčastěji se vyskytujících typů (Fredholmových, Volterových a jednodimensionálních singulárních integrálních rovnic).

Přibližné metody lze zhruba rozdělit na metody numerické a analytické. Tomuto dělení odpovídá i uspořádání knihy. Prvá kapitola, týkající se počátečních problémů pro obyčejné diferenciální rovnice, se dělí na dvě části. V prvé části se probírají analytické metody (např. metoda rozvoje v Taylorovu řadu, metoda postupných aproximací, metoda Čaplyginova, Newton-Kantoroviče, metoda malých parametrů apod.). Druhá část prvé kapitoly se týká numerických metod, tj. hlavně metod diferenčních.

Těžištěm knihy jsou kapitoly II a III, týkající se metod řešení parciálních diferenciálních rovnic. Kapitola II se zabývá převážně síťovými metodami pro eliptické, hyperbolické i parabolické rovnice, kdežto kapitola III se týká převážně tzv. variačních metod a metody přímek. Je zde i zmínka o problémech stability, o variačních metodách pro nelineární úlohy, o vlastních problémech apod.

Poslední čtvrtá kapitola se týká přibližného řešení některých typů integrálních rovnic. Jedná se hlavně o iterační metody, o metody užívající kvadraturních formulí, dále o metodu Bubnov-Galerkinovu a metodu nejmenších čtverců. Je zde i zmínka o řešení singulárních integrálních rovnic.

Za každou kapitolou je řada odkazů na literaturu, jejíž obsáhlý seznam je uveden na konci knihy.

Kapitola I pochází od obou autorů, autorem kapitoly II je Ch. L. Smolickij a konečně poslední dvě kapitoly jsou dílem S. G. Michlina.

Kniha je určena převážně technikům a fyzikům. Tomuto zaměření odpovídá i výběr látky. Hlavní pozornost se totiž věnuje rovnicím matematické fyziky a vůbec typům rovnic, které se často objevují v aplikacích matematiky v mechanice, technice a ve fyzice. Výklad je z matematického hlediska dosti podrobný, avšak nezabíhá do přílišných detailů, což konečně odpovídá i účelu knihy.

Miroslav Šisler

L. Rédei: FOUNDATION OF EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES. (Základy eukleidovské geometrie a neeukleidovských geometrií.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968, 395 stran.

Knihu napsanou původně německy a vydanou r. 1965 přeložil do angličtiny G. Tóth. Doplněk k jejímu názvu je: „Nach F. Klein“ (according to F. Klein); česky bych řekl: „v duchu idejí Felixe Kleina“. Moderních systematických zpracování idejí Kleinových, obsažených v Erlangenském programu, je skutečně poskrovnu; ostatně to říká v předmluvě sám autor a nasvědčuje tomu i seznam literatury v Rédeiově knize. Cituje se tu Bachmann (1959), Borsuk-Szmielew (1960), Coxeter (1957) a z novějších publikací ještě Schilling (1931).

Rédeiova kniha je rozdělena do sedmi kapitol s názvy: 1) Axiómy; 2) Důsledky skupiny axiómů I; 3) Důsledky skupin axiómů I a II; 4) Projektivní uzávěr; 5) Vyšetřování projektivního prostoru; 6) Důsledky skupin axiómů I, II, III; 7) Důsledky skupin axiómů I, II, III, IV.

V kratičké předmluvě připomíná Rédei čtyři hvězdy první velikosti na geometrickém nebi: Eukleida, Bolyaie, Lobačevského a Riemanna jako zakladatele tří geometrií a několik jmen matematiků, kteří přispěli k logickému vyjasnění a propracování těchto tří teorií; jsou to jména Hilbert, Dehn, Pasch, Schur a Klein, který ve svých přednáškách užil poprvé projektivní geometrie jako společného základu pro všechny tři geometrie.

Podrobněji k obsahu knihy. *V kapitole 1* jsou uvedeny nejprve *axiómy incidence* (pochopitelně bez axiómu rovnoběžnosti), a to v množinovém pojetí a v tradiční formulaci. Tyto axiómy jsou vysloveny pro základní množinu $\mathscr{R}$, zvanou prostor. Následují axiómy uspořádání; autor je nazývá axiómy „mezi“. Při jejich formulaci bylo třeba jisté opatrnosti, aby se nevyloučila neeukleidovská geometrie Riemannova. Rédei zachoval sice axiomatický pojem „mezi“, ale platnost axiómů omezil na základní množinu (oblast) $\mathscr{R}' \subset \mathscr{R}$, která nemusí splynout s prostorem $\mathscr{R}$. Mezi axiómy se vyskytuje i známý axióm: Ze tří různých bodů přímky *právě jeden* leží mezi ostatními dvěma, a proslulý axióm Paschův.

Axióm spojitosti je také vysloven pro množinu $\mathscr{R}'$ pomocí řezu úsečky, definovaného uspořádanou posloupností jejích bodů.

Axiómy pohybu čili přemístění se zavádí grupa izometrií. Protože tato skupina axiómů je obzvláště důležitá pro další výstavbu všech tří geometrií, cituji je téměř doslovně:

IV_1 Každý pohyb je permutace prostoru $\mathscr{R}$, která každé tři kolineární body převádí ve tři kolineární body.

IV_2 Identita je pohyb.

IV_3 Složení dvou pohybů je pohyb.

IV_4 Inverzní zobrazení k pohybu je pohyb.

IV_5 Buďte dány dvě roviny α, α', dvě přímky g, g' a dva body P, P', pro něž platí $P \in g \subset \alpha$, $P' \in g' \subset \alpha$. Pak existuje pohyb, který převádí α, g, P po řadě v α', g', P'.

IV_6 Existuje rovina α, přímka g a bod P, pro něž platí $P \in g \subset \alpha$ tak, že existují právě čtyři pohyby, které reprodukují α, g, P, a nejvýše dva z nich mohou reprodukovat každý bod přímky g, přitom jediný z nich (tj. identita) reprodukuje každý bod roviny α.

IV_7 Mějme tři takové kolineární body $A, B, P \in \mathscr{R}'$, že P leží mezi A, B. Je-li C libovolný bod ležící mezi A, B a různý od P a leží-li D mezi C, P, pak žádný pohyb se samodružným bodem P nepřevádí bod C v bod C' ležící mezi C, P.

IV_8 Existuje přímka g, pro niž $g \cap \mathscr{R}' \neq \emptyset$ a která má tuto vlastnost: Buďte $A, B, C \in g \cap \mathscr{R}'$ a nechť leží B mezi AC, budiž dále $\mathscr{X}$ pohyb, který převádí body A, B pořadě v body B, C a množinu γ všech bodů ležících mezi A, B v množinu $\gamma^{\mathscr{X}}$ všech bodů ležících mezi B, C. Pak každý bod přímky g je buď některým z bodů $A^{\mathscr{X}^i}$ nebo je bodem některé z množin $\gamma^{\mathscr{X}^i}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.[1])

Formulace axiómů jsou někde dosti neobratné; kvantifikátory nejsou většinou uvedeny a to ani ne slovně.

Složité vyslovení axiómů IV_6, IV_7, IV_8 je způsobeno tím, že se autor musil vyhnout pojmu reperu, který se opírá o uspořádání; tím by se totiž stalo, že by axiómy pohybu nebyly použitelné pro Riemannovu geometrii.

Je samozřejmé, že nikde se nevyskytuje axióm rovnoběžnosti, neboť uvedená soustava je základem pro všechny tři geometrie, tj. i geometrii eliptickou, kde neexistují rovnoběžky.

Kapitola 2 obsahuje v šesti článcích studium vzájemné polohy přímek a rovin (bez rovnoběžnosti). Zavádí se tu pojem konfigurace bodů, přímek a rovin, vyslovuje se a odvozuje se prostorová Desarguesova věta. Další část kapitoly je věnována lineárním podprostorům prostoru $\mathscr{R}$ a svazu všech lineárních podprostorů. Zavádějí se základní projektivní útvary (konfigurace) s dimenzemi -1 až 3 (dimenze jsou tyto: množina prázdná má dimenzi -1, bod dimenzi 0, přímka 1, rovina 2 a prostor 3). Projektivní útvary jsou definovány souhrně: jsou-li $\mathscr{L}_k, \mathscr{L}_l$ dva lineární podprostory z $\mathscr{R}$ tak, že $\mathscr{L}_\kappa \subset \mathscr{L}_l$ s dimenzemi $k < l$), pak projektivní útvar označovaný

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathscr{L}_k, m, \mathscr{L}_l)$$

je množina

$$\mathscr{P} = \{\mathscr{L}_m \subset \mathscr{R};\ \mathscr{L}_k \subset \mathscr{L}_m \subset \mathscr{L}_l\}\,.$$

Řád útvaru $\mathscr{P}$ je číslo $n = l - k - 1$. Závěr kapitoly je věnován řezům a projekcím.

Kapitola 3 se „odehrává“ téměř celá v základní množině $\mathscr{R}'$. Obsahuje 9 článků, v nichž se probírají úsečky, trojúhelníky a tetraedry (simplexy); v podstatě tedy tradiční důsledky axiomů „mezi“. Sem patří i výklad o dvojím lineárním uspořádání přímky. Z úvah o vztahu mezi prostorem $\mathscr{R}$ a jeho podmnožinou $\mathscr{R}'$ vyplynou pojmy extenze a restrikce prostoru. Základní definice zní:

Množinu (prostor) $\bar{\gamma}$ nazýváme *extenzí* prostoru γ, právě když platí:

a) $\gamma, \bar{\gamma}$ mají tutéž základní oblast (podmnožinu) Ω, v níž je zavedena relace „mezi“;
b) platí $\gamma \subset \bar{\gamma}$;
c) každá rovina $\alpha \subset \gamma$ náleží jediné rovině $\bar{\alpha} \subset \bar{\gamma}$;
   každá přímka $g \subset \gamma$ náleží jediné přímce $\bar{g} \in \bar{\gamma}$;
d) žádné další jiné roviny a přímky z $\bar{\gamma}$ neobsahují body z γ;
e) platí-li relace $C \mu AB$ v γ, platí i v $\bar{\gamma}$ (pokud tu má význam, tj. pokud $A, B, C \in \bar{\gamma}$).

Je-li $\bar{\gamma}$ extenzí prostoru γ, je γ *restrinkcí* prostoru $\bar{\gamma}$.

Kapitola 4 pojednává o projektivním uzávěru; zde je jádro Kleinovy ideje využít projektivní geometrie jako společného základu všech tří geometrií: parabolické, eliptické i hyperbolické.

V devíti článcích se tu probírají poloprostory a jejich vlastnosti, dvojrozměrné a trojrozměrné

---

[1]) $A^{\mathscr{X}}, \gamma^{\mathscr{X}}, A^{\mathscr{X}^i}$ značí obraz příslušného bodu (množiny) v pohybu $\mathscr{X}$, popříp. v pohybu $\mathscr{X}^i = \mathscr{X} \circ \mathscr{X} \circ \ldots \circ \mathscr{X}$ (i-krát), $\gamma^{\mathscr{X}^i}$ (pro $i < 0$) je obraz množiny γ v zobrazení $(\mathscr{X}^{-1})^i$, $\gamma^{\mathscr{X}^0} = \gamma$ ($\mathscr{X}^0$ je identita).

úhly (klíny) a jejich vlastnosti, rovinná Desarguesova věta. Rozliší se vlastní a nevlastní body a definuje se projektivní uzávěr $\overline{\mathscr{R}}$ prostoru $\mathscr{R}$.

Rédei dále odvodí čtyři věty, které jsou vlastně tzv. Veblenovými axiómy a dokáže, že prostor $\overline{\mathscr{R}}$ tyto axiómy splňuje. Závěr kapitoly je věnován vyslovení 16 axiómům incidence projektivní geometrie, které jsou seskupeny do osmi dvojic vět navzájem duálních. Ukazuje se, že prostor $\overline{\mathscr{R}}$ splňuje i tuto soustavu.

V kapitole 5 je v podstatě první část stručného kursu projektivní geometrie. Autor vyslovuje a dokazuje větu o dualitě v prostoru, zavádí pojem projektivity (kolineace) a zmiňuje se stručně o Erlangenském programu a jeho významu. Následuje věta o dualitě v rovině, výklad o projektivitách, perspektivitách, středových kolineacích v rovině, což vše tvoří aparát, kterého bude třeba při probírání pojmu pohybu.

V dalších částích se zavádí pojem oddělování, následuje výklad o projektivních segmentech, úplném čtyrrohu a harmonické čtveřici; zápisy tohoto druhu jako např. $(\frac{1}{2}(A + B))_C = D \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\frac{1}{2}(C + D))_A = B$ se autorovi dále velmi osvědčují.[2])

Poslední čtyři z 15 článků této kapitoly jsou věnovány známému zavedení projektivní škály, jejímu postupnému půlení a zhušťování. Tím vstupuje na jeviště soustava projektivních souřadnic prozatím jako dyadických čísel přiřaděných čtveřicím bodů, jejichž tři body (nevlastní, nulový a jednotkový) jsou pevné, čtvrtý je proměnný). Implicite je tu uveden izomorfizmus mezi aritmetickým a geometrickým vytvořením škály, tj. projektivitami a mezi aritmetickými operacemi s dyadickými souřadnicemi.

Kapitola 5 připravila vše pro analytickou projektivní geometrii, které je věnována *kapitola 6*. Přibrání axiómu spojitosti dovoluje vytěžit pojem hromadného bodu a zavést na základě věty o konvergenci cyklicky uspořádané, nekonečné posloupnosti pojem *absolutních bodů* jako zvláštního případu nevlastních bodů.

Souřadnice bodů na afinní přímce a prvků v jednoparametrických útvarech vyjdou ve formě dyadických rozvojů a homogenizují se. Promítáním se přejde na projektivní souřadnice v rovině a v prostoru, odvodí se (dost pracně) analytické vyjádření přímky a roviny; zavedou se i přímkové a rovinové souřadnice.

Celé další studium projektivní geometrie se děje převážně metodou souřadnic. Podrobněji se hovoří o určenosti projektivity (Staudtova věta), o jejích samodružných bodech na přímce, v rovině i v prostoru. Celkem letmé jsou zmínky o transformaci soustavy souřadnic, vektorech, o imaginárních bodech; podrobněji se probírá dvojpoměr, samodružné body projektivit a involuce, včetně involutorní kolineace v rovině i v prostoru.

Kapitola má celkem 17 článků.

Kapitola 7 je nejobsáhlejší, obsahuje 18 článků a je jádrem celého díla. Zde se rozšíří pojem pohybu na základě kolineace; zejména se studuje pomocí vlastních útvarů, co se děje při pohybu s nevlastními prvky. Po vložce týkající se „souměřitelnosti“ segmentů přechází autor ke studiu tří druhů zrcadlení a ke studiu rotací. Zavádí pojem *bodu absolutně konjugovaného* (P' je bod absolutně konjugovaný k vlastnímu bodu P, je-li P' samodružný bod zrcadlení na přímce PP' vzhledem k P). Dokazuje větu, že ke každému bodu P existuje na každé jím procházející přímce jediný absolutně konjugovaný bod.

Další dva články jsou věnovány mimo metrické stupnice zejména vyšetřování absolutních bodů (Rédei je nazývá „body v nekonečnu“). Ukazuje se, že jsou to nevlastní body a že jsou samodružnými body, tzv. absolutních involucí, tj. involucí, jejichž dvojice jsou absolutně konjugované body přímky. Jsou tři možnosti: buď přímka neobsahuje žádný nevlastní bod nebo obsahuje jediný nevlastní bod nebo obsahuje nekonečně mnoho nevlastních bodů. Těmto třem případům odpovídají tři případy, kdy absolutní involuce je eliptická, parabolická nebo hyperbolická.

---

[2]) $(\frac{1}{2}(A + B))_C$ značí čtvrtý harmonický bod k bodu C vzhledem k dvojici A, B.

V posledním případě tvoří všecky nevlastní body segment přímky; krajní body jsou absolutní, zbývající nevlastní body se nazývají *ultraabsolutní*.

Po těchto článcích následuje opět výklad některých elementárních poznatků (střed úsečky, osa úhlu, kolmice k vlastní přímce a rovině) a skládání zrcadlení v pohyby přímé i nepřímé (z projektivního hlediska.

Poslední část kapitoly je věnována těmto otázkám: *absolutní útvar* (tj. množina absolutních bodů), *charakteristika pohybů* v každé ze tří *geometrií a analytické vyjádření pohybů*; *otázka existence všech tří geometrií*. V závěru kapitoly se zabývá autor mírou úseček a úhlů a některými aplikacemi na trigonometrii a hyperbolické geometrii.

Studium absolutních útvarů je uvedeno článkem o polaritě vzhledem ke křivce nebo ploše 2. stupně. Pak jsou odvozeny rovnice absolutních útvarů v eliptické a hyperbolické geometrii v homogenních projektivních souřadnicích a to:

$$\sum_1^4 x_i^2 = 0 \text{ (eliptická geometrie)} \quad \sum_1^3 x_i^2 - x_4^2 = 0 \text{ (hyperbolická geometrie)}$$

Charakteristika pohybu v neparabolické geometrii zní takto: Pohyb je přímá kolineace, která reprodukuje absolutní útvar — V parabolické geometrii je třeba k vyslovené vlastnosti ještě připojit požadavek, že příslušná kolineace převádí aspoň jednu úsečku v úsečku s ní shodnou. Vynecháme-li tento požadavek, dojdeme ke *grupě podobností*; tím je také vysvětleno, proč v neeukleidovské geometrii neexistuje vlastní podobnost, tj. proč je každé podobné zobrazení shodnost.

Analytické vyjádření pohybů je značně komplikované a používá se komplexních čísel; příslušné rovnice vyplňují tři stránky knihy, jejich důkaz asi 14 stran.

Existence všech tří geometrií prokazují algebraické modely, které autor sestrojuje.

K Rédeiově knize je možno mít některé výhrady: nevyužívá dostatečně pojmů moderní algebry (morfizmy, vektorová algebra), logická stránka (kvantifikace apod.) se dost zanedbává, definice nejsou explicite a přehledně vyslovovány, symbolika leckde není právě nejvhodnější, některé triviální věci zbytečně zatemňují ústřední linii výstavby. Osobně mi vadí i ta okolnost, že celý text je bez příkladů a úloh ke cvičení.

Přesto se však domnívám, že čin autorův, podat systematicky, moderně a pokud možno vyčerpávajícím způsobem geniální Kleinovu ideu, je čin velmi záslužný a prospěšný, přesto, anebo právě proto, že jde o renesanci myšlenek, které ve své době nedosáhly toho stupně uplatnění a popularity, které zasluhovaly.

Možná, že to je čin záslužný a aktuální i z hlediska pedagogického; neboť diskuse o pojetí školské geometrie zdaleka neskončily a ideje Erlangenského programu by do něho mohly a měly zasáhnout.

Jan Vyšín

W. A. Blackwell: MATHEMATICAL MODELLING OF PHYSICAL NETWORKS. The MacMillan Co., New York 1968; stran 481.

Zajímavá kniha W. A. Blackwella je základní učebnicí metod analýzy lineárních fyzikálních a technických systémů se soutředěnými parametry. Těmito systémy mohou být nejen (doposud nejčastěji teoreticky zkoumané) elektrické obvody, ale také např. mechanické, hydraulické nebo pneumatické obvody.

V úvodních kapitolách je uveden přehled prvků uvažovaných systémů a jejich charakteristických vlastností. Dále je čtenář seznámen se základními zákony, z nichž vychází jednotlivé metody analýzy: s Kirchhoffovými zákony v případě elektrických obvodů a s analogickými vztahy u ostatních systémů. Posléze je probrána terminologie a nejdůležitější poznatky týkající se topologické struktury uvažovaných systémů.

V následující poměrně obsáhlé kapitole jsou objasněny základní metody formulace rovnic popisující analyzovaný systém. Po stručném přehledu maticové algebry je pak uvedena též maticová verze těchto metod formulace rovnic systému. Tyto rovnice jsou vyjádřeny jednak pro ustálený stav systému, jednak pro jeho přechodný stav, přičemž důraz je kladen zejména na metodu stavových proměnných, jež vede na kanonický tvar diferenciálních rovnic systému.

Po rekapitulaci nejdůležitějších vlastností Laplaceovy transformace je uvedeno její použití při řešení přechodných jevů, dále je popsána symbolicko-komplexní metoda a její užití při řešení ustálených harmonicky proměnných průběhů a posléze Fourierova metoda analýzy ustálených a přechodných jevů v systémech.

V závěru každé ze čtrnácti kapitol je uvedena bohatá zásoba nevyřešených příkladů k procvičení.

Knihu lze doporučit především teoreticky zaměřeným strojním inženýrům. Základní teorie elektrických obvodů je zde uvedena netradičním způsobem a proto nebude nezajímavá ani pro specialisty z tohoto oboru.

Daniel Mayer

H. Hermes: EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATISCHE LOGIK. Druhé vydání, B. G. Teubner, Stuttgart 1969.

Kniha je úvodní učebnicí klasické dvouhodnotové predikátové logiky. Je určena především těm studujícím matematiky, kteří již byli seznámeni s matematickými pojmy základní důležitosti, jako je např. pojem grupy. Velký důraz je kladen na přechod od „hovorového" matematického jazyka, používaného v každodenní matematické praxi, k formalizovanému jazyku.

Jak známo, podstatným činem moderní symbolické logiky je, že (intuitivní) pojem odvozování nahradila ekvivalentním rigorózně definovaným pojmem odvozování (tj. jistými „odvozovacími" kalkuly). Logický kalkul, popsaný v dané knize je jistý sekvenční kalkul a má tu vlastnost, že se přimyká blízko k metodám provádění důkazů, běžným v obvyklé matematické praxi.

Uvedeme si názvy a obsah jednotlivých kapitol.

V úvodní kapitole se vymezuje úloha logiky, vychází se od příkladů matematických důkazů a dochází se přirozenou cestou k pojmu odvozování.

Ve II. kapitole je vyložen jazyk predikátové logiky: termy a výrazy, elementární otázky rozhodování, důkazy a definice metodou indukce přes složitost struktury výrazů, volné a vázané proměnné a substituce.

Ve III. kapitole se definují nejdůležitější semantické pojmy predikátové logiky a ukazují se jejich základní vlastnosti, jako věty o vztahu modelů.

IV. kapitola je věnována zavedení jednoho predikátového kalkulu. V závěru kapitoly je dokázána rozhodnutelnost výrokového počtu.

V V. kapitole je dokázána Gödelova věta o úplnosti a uvedeny některé její důsledky, např. věta Lövenheimova a Skolemova, která umožňuje přejít od modelu množiny výrazů nad oborem individuí libovolné mohutnosti k modelu nad oborem nejvýše spočetné mohutnosti.

K ilustraci důležitosti Gödelovy věty o úplnosti jsou v VI. kapitole vyloženy základy logiky 2. stupně, přičemž za výchozí bod slouží Peanův systém axiomů.

V VII. kapitole vykládá autor jisté způsoby rozšíření jazyka predikátové logiky, záležející v tom, že se junktory $\wedge$, $\neg$ a kvantor $\bigwedge$ nahradí nebo doplní některými jinými.

Předložená verze knihy, která je jejím druhým vydáním, byla rozšířena o další kapitolu (VIII.) obsahující některé metateorémy predikátové logiky z let padesátých od autorů A. Robinson, Craig a Beth.

Jaroslav Morávek