

# Aplikace matematiky

---

Boro Döring

Einige Sätze über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln in Banach-Räumen

*Aplikace matematiky*, Vol. 15 (1970), No. 6, 418–464

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103316>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EINIGE SÄTZE ÜBER DAS VERFAHREN DER TANGIERENDEN  
HYPERBELN IN BANACH-RÄUMEN

BORO DÖRING

(Eingegangen am 17. Februar 1970)

## EINLEITUNG

Trotz Erhöhung der Arbeitsgeschwindigkeit von Computern ist in den letzten Jahren – bedingt durch den steigenden Umfang der zu lösenden Probleme – das Interesse an möglichst rasch konvergierenden Näherungsverfahren gewachsen. So richtet sich das Augenmerk über das quadratisch konvergente Newton-Verfahren hinaus vor allem auf Iterationsverfahren dritter Ordnung, d.h. Verfahren, die bei jedem Iterationsschritt ungefähr dreimal so viele genaue Stellen liefern wie vorher. Dies umso mehr, als gezeigt worden ist, daß sich diese Methoden außer im Falle einer eindimensionalen „gewöhnlichen“ Gleichung auch zur Lösung von Gleichungssystemen, Differential- und Integralgleichungen, also allgemein auf Operatorgleichungen anwenden lassen, und zwar unter weitgehender Beibehaltung des Formalismus vom Eindimensionalen. Das Halley-Verfahren,<sup>1)</sup>

$$x_{n+1} := x_n - \frac{2F_n F'_n}{2F_n'^2 - F_n'' F_n},$$

das wir im folgenden kurz mit HV bezeichnen und das von sowjetischen und anderen Autoren in Anlehnung an seine geometrische Bedeutung auch Verfahren der tangierenden Hyperbeln genannt wird, ist bekanntlich eines der am raschesten konvergierenden Verfahren dritter Ordnung zur Lösung der Gleichung  $F(x) = 0$  (vergl. etwa das Beispiel im nächsten Abschnitt). Es ist schon 1964 von Halley benutzt worden, dann wieder in Vergessenheit geraten und mehrfach wiederentdeckt worden. (Einige bibliographische Hinweise finden sich bei Traub [61].) Eine zufriedenstellende Behandlung des Verfahrens wurde erst möglich, nachdem der Begriff der Ordnung eines Iterationsverfahrens in geeigneter Weise geprägt worden war (vergl. E. Schröder [54], Bodewig [6]). In diesen Arbeiten, wie auch in denen von Ehrmann [13], Ludwig [39], Zajta [65] und einigen anderen, sind erstmalig Iterationsverfahren

<sup>1)</sup> Mit dem Symbol  $:=$  wird die Definition eingeführter Größen bezeichnet.

erzeugt und systematisch untersucht worden, wobei Bodewig, Ludwig und Zajta auch das Halley-Verfahren betrachten. Die erste in gewissem Sinne vollständige Behandlung des Verfahrens stammt von Salehov [51], der entsprechende Überlegungen von Kantorowitsch beim Newton-Verfahren (vergl. Kantorowitsch und Akilow [34] Kap. XVIII) auf HV anwendet: Es wird nicht die Existenz einer Lösung der betreffenden Gleichung  $F(x) = 0$  vorausgesetzt; aus dem erhaltenen Ausdruck für die Konvergenzgeschwindigkeit, der gleichzeitig eine grobe Fehlerschranke darstellt, kann man die Ordnung des Verfahrens erkennen. Schließlich weist Salehov nach, daß die so unter bestimmten Voraussetzungen als Grenzwert der durch (HV) definierten Folge  $\{x_n\}$  konstruierte Lösung der Gleichung  $F(x) = 0$  in einem bestimmten Intervall mit  $x_0$  als Mitte eindeutig ist. Das grundlegende Ergebnis von Salehov für den eindimensionalen Fall ist von Mertvecova [40] auf Operatoren in Banach-Räumen übertragen worden (s.a. Moore [44], Theorem 8). Dabei muß HV etwas anders geschrieben werden, worauf wir im nächsten Abschnitt zurückkommen. Das Resultat von Mertvecova ist von einer Reihe von vorwiegend mittel- und osteuropäischen Mathematikern in verschiedener Hinsicht verbessert bzw. anders bewiesen worden (vergl. die Diskussion in Abschn. 4).

Die hierbei erhaltenen Sätze haben den Nachteil, für den numerischen Anwender schlecht oder gar nicht brauchbar zu sein. Dies betrifft insbesondere die zu komplizierten und teilweise zu scharfen Voraussetzungen sowie die viel zu groben Fehlerschranken und die Eindeutigkeitsaussage, die entweder ganz fehlt oder nur in einem kleineren Bereich als die Existenzaussage bewiesen wird.

In der vorliegenden Arbeit werden einige lokale Existenz- und Eindeutigkeitsätze sowie Konvergenzsätze für HV gewonnen, die die genannten Mängel vermeiden. Für die numerischen Anwendungen werden lokale Sätze gewünscht, die folgenden Forderungen genügen:

1. Die Voraussetzungen sind möglichst schwach und
2. möglichst leicht nachzuprüfen.
3. Mit der Ausgangsnäherung  $x_0$  ist auch der Radius der Kugel, in der Aussagen über die Lösbarkeit der betreffenden Gleichung gemacht werden sollen, festgelegt.
4. Gleichzeitige (lokale) Aussagen (Existenz, Eindeutigkeit, Konvergenz, Ordnung, Fehlerabschätzungen) unter denselben Voraussetzungen in demselben Bereich (für den der Einfachheit halber eine Kugel gewählt wird).
5. Möglichst scharfe, numerisch wirklich brauchbare Fehlerschranken.

Im Gegensatz zu den meisten bekannten Sätzen haben die hier erhaltenen Sätze diese Eigenschaften. Insbesondere sind die Fehlerschranken bei sehr einfachen und gleichzeitig schwachen Voraussetzungen wesentlich schärfer als die bisherigen (vergl. Tab. 2, 4 und 6). Dies ist einmal auf die Gewinnung von a-posteriori-Schranken zurückzuführen, zum anderen darauf, daß alle benötigten Ungleichungen das Ergebnis möglichst scharfer Abschätzungen sind.

In Abschnitt 1 werden vorwiegend algorithmische Gesichtspunkte von HV erörtert.

Im zweiten Abschnitt wird der Satz über das Newton-Verfahren von Kantorowitsch, ergänzt um eine a-posteriori-Schranke, zitiert. Die dann folgenden Sätze sind Verallgemeinerungen hiervon. Satz 2 (Abschn. 3) stellt eine Modifikation des Satzes von Salehov und Mertvecova dar, die den oben genannten Forderungen nicht genügt, aber dennoch als eine mögliche Übertragung von Satz 2 auf HV von Interesse ist. Nach einer ausführlichen Diskussion bisheriger und der neuen Sätze über HV (Abschn. 4) wird ein Satz über HV bewiesen, der als „Standard“-Satz angesehen wird, weil er alle fünf oben erwähnten Forderungen gut erfüllt. Gegenüber Satz 2 hat er insbesondere den Vorteil, daß man zur Nachprüfung seiner Voraussetzungen nur die erste Newton-Korrektur braucht und nicht die erste HV-Korrektur. Dadurch wird die Nachprüfung der Voraussetzungen im konkreten Anwendungsfall wesentlich vereinfacht. Außerdem sind mit den Voraussetzungen des Standardsatzes auch die des Satzes über das Newton-Verfahren erfüllt, was für Satz 2 nicht zutrifft. Man kann also, z.B. auf dem Computer, sofort von HV auf das Newton-Verfahren übergehen und in gewisser Hinsicht auch umgekehrt. Schließlich ist die Form der Voraussetzungen und die Beweistechnik des Standardsatzes – im Gegensatz zu Satz 2 – auf Verallgemeinerungen von HV höherer Ordnung übertragbar. Diese Vorteile des Standardsatzes gegenüber Satz 2 sind allerdings mit einer leichten Einschränkung hinsichtlich des Einzugsgebietes erkauft worden. Deshalb wird nach einer Diskussion möglicher Abschwächungen der Voraussetzungen des Standardsatzes in Abschnitt 6 (zusammengefaßt in Satz 4) noch ein „Grenz“-Satz (Satz 5) über HV angegeben (Abschn. 7), der einerseits die Vorteile von dem Standardsatz mit denen des Satzes 2 verbindet und der andererseits hinsichtlich der aufgestellten fünf Forderungen gerade an der Grenze liegt. Satz 4 gestattet es, leicht andere zulässige Kombinationen von Voraussetzungen als die von Satz 3 und Satz 5 zu finden. Abschließend wird der Standardsatz auf eine gewöhnliche Gleichung, eine Hammersteinsche Integralgleichung und ein Matrix-Eigenwert-Problem angewandt.

#### 1. ZUR HERLEITUNG, GESTALT UND KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT DES VERFAHRENS DER TANGIERENDEN HYPERBELN. BEZEICHNUNGEN

Das wohl älteste Iterationsverfahren von beliebiger ganzzahliger Ordnung geht auf E. Schröder [49] zurück. Es ist die nach  $k$  Gliedern abgebrochene und gleich Null gesetzte Taylorreihe der Umkehrfunktion von  $y = F(x)$  für  $y = 0$ :

$$(1.1) \quad x_{n+1} := x_n + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} F_n^j \left[ \frac{1}{F'_n} \frac{d}{dx} \right]^{j-1} \frac{1}{F'_n}.$$

Hieraus läßt sich jedoch HV nicht ableiten, denn das in (.1) enthaltene Verfahren dritter Ordnung ist

$$(1.2) \quad x_{n+1} := x_n - \frac{F_n}{F'_n} - \frac{1}{2} \frac{F''_n}{F'_n} \left( \frac{F_n}{F'_n} \right)^2,$$

das Tschebyscheff-Verfahren oder Verfahren der tangierenden Parabeln heißt. Nun ist zwar bekannt (Dubovik [12]; Ehrmann [13], Satz 5; Traub [61]), daß wenn das gegen eine einfache Nullstelle  $x^*$  der Funktion  $F(x)$  konvergente Iterationsverfahren  $x_{n+1} := U(x_n)$  von der Ordnung 3 ist,

$$x_{n+1} := U(x_n) + G(x_n) [F(x_n)]^3$$

das *allgemeinste* Iterationsverfahren dritter Ordnung darstellt, wobei  $G(x)$  eine willkürliche Funktion ist, die noch von der Funktion  $F(x)$  und deren Ableitungen abhängen kann und die für  $x \rightarrow x^*$  beschränkt bleibt. (Dieser Satz gilt sinngemäß auch in Banach-Räumen, wie Dubovik gezeigt hat.) Es muß also möglich sein,  $G(x)$  so zu wählen, daß (.2) mit einem geeigneten Korrekturglied versehen in das Halley-Verfahren übergeht. Dies ist jedoch keine befriedigende analytische Herleitung. Wir geben eine andere an, wobei wir in natürlicher Weise auf eine andere Form von HV stoßen, die numerisch einfacher zu handhaben ist als (0.1), im Gegensatz zu (0.1) auch formal in Banach-Räumen gilt und die unmittelbar einen einsichtigen Vergleich mit dem Tschebyscheff-Verfahren gestattet.

Dazu beachten wir, daß ja durch Nullsetzen der ersten beiden Glieder der Taylorreihe von  $F(x)$  an der Stelle  $x_n$  das Newton-Verfahren entsteht:

$$(1.3) \quad F_n + F'_n c_n = 0$$

und entsprechend der ersten *drei* Glieder

$$(1.4) \quad F_n + F'_n \hat{d}_n + \frac{1}{2} F''_n \hat{d}_n^2 = 0$$

wobei  $\hat{d}_n$  die Korrektur dritter Ordnung von  $x_n$  bedeutet. Es liegt nun nahe, diese quadratische Gleichung in  $\hat{d}_n$  zu linearisieren, indem man z.B. einen Faktor von  $\hat{d}_n^2$  durch  $c_n$  ersetzt:

$$(1.5) \quad F_n + F'_n d_n + \frac{1}{2} F''_n c_n d_n = 0.$$

Dabei erhalten wir eine von  $\hat{d}_n$  geringfügig abweichende Korrektur  $d_n$ . (.5) nach  $x_{n+1} := x_n + d_n$  aufgelöst, ergibt mit (.3) gerade (0.1) und umgekehrt. Interessanterweise läßt sich das Tschebyscheff-Verfahren ebenfalls als eine Linearisierung von (.4) gewinnen, nämlich indem man nicht nur *einen* Faktor von  $\hat{d}_n^2$  durch die schlechtere Newton-Korrektur  $c_n$  ersetzt, sondern gleich *beide*. Daran erkennt man, daß dieses Verfahren konstruktionsgemäß im allgemeinen schlechter konvergieren wird als HV. Sehen wir uns das an dem einfachen Beispiel  $F(x) := x^3 - 10 = 0$  an. Wegen  $F(2) = -2$  und  $F(3) = 17$  wählen wir  $x_0 := 2$ . Die in Tab. 1 zusammengestellten Näherungswerte bestätigen die Überlegenheit von HV gegenüber dem Tschebyscheff-Verfahren. (Vergl. auch das Beispiel einer nichtlinearen Integralgleichung vom Hammerstein-Typ bei Ulm [62].)

Die Bemerkung über den Unterschied zwischen dem Tschebyscheff-Verfahren

und HV sowie das Beispiel zeigen, daß der Begriff der Ordnung eines Iterationsverfahrens zur präzisen Charakterisierung von dessen numerischer Qualität unzureichend ist. (Vergl. hierzu auch Merz [41].)

Tab. 1. Näherungswerte zur Lösung von  $F(x) := x^3 - 10 = 0$  mit  $x_0 := 2$

$n$	$x_n$ (Newt.-Verf.)	$x_n$ (Tscheb.-Verf.)	$x_n$ (HV)
0	2,00000 00000 00000	2,00000 00000 00000	2,00000 00000 00000
1	2,16666 66666 66667	2,15277 77777 77778	2,15384 61538 46154
2	2,15450 36160 42078	2,15443 46883 94754	2,15443 46900 02592
3	2,15443 46922 36913	2,15443 46900 31884	2,15443 46900 31884
4	2,15443 46900 31684	2,15443 46900 31884	2,15443 46900 31884

Welches der drei in Tab. 1 genannten Verfahren zur näherungsweise Lösung einer vorgelegten Operatorgleichung zur Erreichung einer bestimmten Genauigkeit das günstigste ist, kann allgemein nicht beantwortet werden, sondern hängt stark von der Gestalt der Gleichung ab. Insbesondere spielt eine Rolle, ob  $F_n''$  leicht zu berechnen ist oder nicht; im letzteren Falle ist das Newton-Verfahren vorzuziehen. Beim Vergleich von HV mit dem Tschebyscheff-Verfahren wiederum ist es wesentlich, um *wieviel* dieses langsamer konvergiert als HV und welcher Unterschied zwischen diesen beiden Verfahren hinsichtlich des über das Newton-Verfahren hinausgehenden Zusatzaufwandes besteht. Auf all diese Fragen soll jedoch im vorliegenden Artikel nicht eingegangen werden. Es sei nur bemerkt, daß HV den anderen beiden Verfahren oft im obengenannten Sinne überlegen ist.

Wir stellen nun HV noch einmal in der soeben gewonnenen Form zusammen. Um gleich die später in den Sätzen, wo wir aus praktischen Gründen nur bis  $x_n$  rechnen, benötigte Gestalt zu haben, ersetzen wir in den obigen Gleichungen  $n$  durch  $n - 1$ . Das Verfahren lautet also (auch in Banach-Räumen)

$$\left. \begin{aligned}
 (1.6.1) \quad & F_{n-1} + F'_{n-1}c_{n-1} = \theta \\
 (1.6.2) \quad & F_{n-1} + F'_{n-1}d_{n-1} + \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1}d_{n-1} = \theta \\
 (1.6.3) \quad & x_n := x_{n-1} + d_{n-1}, \quad (\forall n \in N; x_0 \text{ zu wählen})
 \end{aligned} \right\} \text{(HV)}$$

Dabei bedeutet  $F_{n-1}^{(j)} := F^{(j)}(x_{n-1})$  ( $j = 0, 1, 2$ ). (.6) und (0.1) sind also im Ein-dimensionalen — abgesehen von dem um 1 abweichenden Index — äquivalent. Prinzipiell gilt dies auch in Banach-Räumen, wo  $F'_{n-1}$  ein linearer und  $F''_{n-1}$  ein bilinearer Operator ist. Doch muß (0.1) dann in der Form

$$(1.7) \quad x_{n+1} := x_n - [I - \frac{1}{2}(F'_n)^{-1} F''_n(F'_n)^{-1} F_n]^{-1} (F'_n)^{-1} F_n$$

geschrieben werden. Merkwürdigerweise ist die Form (.6) von HV von keinem der im Literaturverzeichnis aufgeführten Autoren, die sich speziell mit der Untersuchung von HV befaßt haben (vergl. Abschn. 4) benutzt worden. Nicht zuletzt diese Form von HV hat anregend dazu beigetragen, auf den bei den Sätzen in Abschn. 5 und 7 verwendeten Typ von Voraussetzungen zu kommen.

Im folgenden benutzen wir einheitlich folgende *Bezeichnungen*:  $X$  bedeute einen beliebigen Banach-Raum,  $F$  einen nicht notwendig linearen Operator mit dem Definitionsbereich  $X_F \subset X$  und Werten in einem anderen Banach-Raum, dessen Nullelement mit  $\theta$  bezeichnet sei ( $\theta$  kann aber auch der Nulloperator sein). Ferner  $N := \{1, 2, 3, \dots\}$ ;  $N_0 := \{0\} \cup N$ ;  $F_n := F(x_n)$ ;  $f_n := F'(x_n)$ ;  $\zeta_n := \|f_n^{-1}F_n\|$ ;  $\lambda_n := 2/[1 + \sqrt{(1 - 2\eta_n)}]$ ;  $\beta_{n+1} := \beta_n/(1 - \eta_n)$ ,  $\forall n \in N_0$  wobei  $\eta_n$  eine positive Zahl ist, die im Text der Sätze definiert wird. Speziell setzen wir  $\zeta := \zeta_0 = \|f_0^{-1}F_0\|$  und  $\beta := \beta_0$ . Bei Zahlenergebnissen (in Abschnitt 8) bedeutet  $\doteq$  normale Rundung und  $\doteq$  stets Aufrundung (z.B.  $\pi \doteq 3,15$ ).

## 2. EIN SATZ ÜBER DAS NEWTON-VERFAHREN

Die zu beweisenden Sätze über HV stellen Verallgemeinerungen dar vom folgenden lediglich zitierten

**Satz 1.** (*Satz über das Newton-Verfahren*) Falls  $x_0 \in X_F$  so gewählt werden kann, daß (V1)–(V3) gilt,

- (V1)  $\exists S := \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq 2\zeta\}$ , wo  $F$  zweimal Fréchet-differenzierbar ist mit  $\|F''(x)\| \leq K_2$  für alle  $x \in S$ ,  
 (V2)  $\exists [F'(x_0)]^{-1}$  mit  $\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta$ ,  
 (V3)  $\beta K_2 \zeta \leq \frac{1}{2}$ ,

dann hat die Gleichung  $F(x) = \theta$  in  $S$  genau eine (nicht notwendig einfache) Lösung und die durch  $x_n := x_{n-1} - f_{n-1}^{-1}F_{n-1}$  für alle  $n \in N$  definierte Folge konvergiert gegen diese Lösung, die  $x^*$  heiße. Ferner gelten die Fehlerabschätzungen

$$(2.1a) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{\zeta}{2^{n-1}} (2\eta_0)^{2^{n-1}}, \quad \forall n \in N_0$$

$$(2.1b) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{\beta_n K_2}{1 + \sqrt{(1 - 2\eta_n)}} \|x_n - x_{n-1}\|^2, \quad \forall n \in N$$

wobei  $\eta_n := \beta_n \zeta_n K_2$ , ( $\forall n \in N_0$ ).

Ein einfacher Beweis dieses Satzes findet sich in [11]. Während (.1b) dort erstmalig angegeben wurde, stammen die übrigen Aussagen von Kantorowitsch, der das Newton-Verfahren als Erster in Banach-Räumen behandelt hat (vergl. Kantorowitsch und Akilow [34], Kap. XVIII).

Dieser und die folgenden Sätze, die ebenfalls vom „Kantorowitsch-Typ“ sind, lassen sich im wesentlichen unverändert auch dann noch beweisen, wenn die Kugel  $S$  durch eine beliebige abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $X_F$  ersetzt wird. Vom Standpunkt der numerischen Anwendung der Sätze ist dies jedoch weitgehend uninteressant. Ferner sei bemerkt, daß die in Rede stehenden Sätze in zweifacher Hinsicht noch etwas allgemeiner ausgesprochen werden können, und zwar wenn man

1. statt der Abschätzungen für die Normen der Operatoren  $[F'(x_0)]^{-1}$  und  $F''(x)$  je für sich nur  $\|[F'(x_0)]^{-1} F''(x)\| \leq \tilde{K}_2$  für alle  $x \in S$  fordert,

2. in der a-posteriori-Abschätzung statt der Normen  $\zeta_n = \|f_n^{-1} F_n\|$  obere Schranken hierfür verwendet bzw. – falls man sich nur für die a-priori-Schranken interessiert –  $\|f_0^{-1} F_0\| \leq \zeta$  fordert und im Beweis (erst von  $n = 1$  an)  $\zeta_n := \|f_n^{-1} F_n\|$  setzt.

Da dies jedoch für die Anwendungen keine wesentlichen Vorteile bringt und die Beweise dadurch – insbesondere durch Punkt 2 (vergl. das hierzu in Abschn. 4 Gesagte) – teils wesentlich komplizierter werden, verzichten wir hier und im folgenden auf diese Varianten der Voraussetzungen.

### 3. MODIFIKATION EINES SATZES VON SALEHOV UND MERTVECOVA

Wir befassen uns zunächst mit *einer* sinngemäßen Übertragung des Satzes über das Newton-Verfahren auf das Verfahren der tangierenden Hyperbeln. Es ist naheliegend, daß zu (V3) von Satz 1 noch eine Bedingung (V4) hinzukommt, die eine Schranke für die dritte Fréchet-Ableitung enthält. Wir beweisen zunächst eine vereinfachte und um scharfe Fehlerschranken ergänzte Version des Satzes von Salehov und Mertvecova, wobei hier wie auch bei den anderen Sätzen die Aussagen der Übersichtlichkeit halber gleich in Form einer Beweisskizze aufgeschlüsselt werden:

**Satz 2. I.** Falls  $x_0 \in X_F$  so gewählt werden kann, daß (V1)–(V4) gilt,

(V1)  $\exists S := \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq 2\delta\}$ , wo  $F$  dreimal Fréchet-differenzierbar ist mit  $\|F^{(j)}(x)\| \leq K_j$ ,  $\forall x \in S \wedge j = 2, 3$ ; dabei ist

$$\delta := \|[I - \frac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} F''(x_0) [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)]^{-1} [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\|,$$

(V2) es existieren die beschränkten Inversen

$$[F'(x_0)]^{-1} \text{ und } [I - \frac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} F''(x_0) [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)]^{-1}, \text{ und es gilt}$$

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta,$$

(V3)  $\beta K_2 \delta \leq \frac{1}{2}$ ,

(V4)  $\beta K_3 \delta^2 \leq \frac{2^1}{50}$ .

dann (B1) existiert die durch

$$(3.1) \quad x_n := x_{n-1} - [I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1} F''(x_{n-1}) f_{n-1}^{-1} F(x_{n-1})]^{-1} f_{n-1}^{-1} F(x_{n-1})$$

(für alle  $n \in \mathbb{N}$ ) definierte Folge  $\{x_n\}$ , und es ist  $x_n \in S \forall n \in \mathbb{N}_0$ .



- (B2) Die Folge  $\{x_n\}$  konvergiert, und zwar gilt  $x^* := \lim x_n \in S$ .  
 (B3) Das Verfahren (1) konvergiert schwach von der Ordnung 3 (Definition siehe im Beweis.)  
 (B4)  $F(x^*) = \theta$ .  
 (B5) Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$(3.2a) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{\delta}{2^{n-1}} (\beta\gamma\delta)^{3^{n-1}}, \quad \forall n \in N_0$$

$$(3.2b) \quad \|x^* - x_n\| \leq 2\beta_n \frac{\beta_{n-1}M_2^2 + (1 + \frac{1}{2}\eta_{n-1})M_3}{(1 - \frac{2}{3}\eta_{n-1})(1 - \frac{1}{2}\eta_{n-1})} \|x_n - x_{n-1}\|^3, \quad \forall n \in N$$

$$(3.2c) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{2\beta_n\delta_{n-1}}{1 - \frac{2}{3}\eta_{n-1}} (M_3\delta_{n-1}^2 + M_2\|d_{n-1} - c_{n-1}\|), \quad \forall n \in N$$

wobei

$$(3.3a) \quad \gamma := 2M_2 \sqrt{\left[ \frac{5}{3} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{M_3}{\beta M_2^2} \right) \right]} (< +\infty), \quad M_j := \frac{K_j}{j!} \quad (j = 2, 3)$$

$$(3.3b) \quad \eta_n := 2\beta_n M_2 \delta_n, \quad \delta_n := \|d_n\|, \quad (\forall n \in N_0) \quad (\Rightarrow \delta_0 = \delta)$$

II. Falls neben (V1)–(V4) noch gilt:

$$(V\tilde{2}) \quad \|f_1^{-1}\| \leq \beta$$

dann (B6) gibt es in  $S$  außer  $x^*$  keine weitere Lösung der Gleichung  $F(x) = \theta$ .

III. Falls außer (V1)–(V4) noch gilt:

$$(V5) \quad \frac{M_3}{M_2} \delta \leq \frac{7}{25}$$

dann (B7) kann in den a-posteriori-Schranken der Faktor 2 vor  $\beta_n$  ersetzt werden durch  $\lambda_n$ .

IV. Falls außer (V1)–(V4) noch gilt:

$$(V6) \quad M_3 \leq \beta M_2^2$$

dann geht (.2a) über in das direkte Analogon zu der a-priori-Schranke (2.1a) beim Newton-Verfahren:

$$(B8) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{\delta}{2^{n-1}} (2\eta_0)^{3^{n-1}}, \quad (\forall n \in N_0).$$

Bemerkungen.

1. (V5) kann ersetzt werden durch die schwächere, jedoch nicht nur Ausgangsdaten enthaltende Bedingung

$$(V\tilde{5}) \quad \frac{M_3}{M_2} \delta_{n-1} \leq \frac{7}{25}, \quad (n \in N)$$

2. Falls man in den Schranken mit  $\|f_n^{-1}\|$  selbst und nicht mit den oberen Schranken  $\beta_n$  hierfür rechnen möchte – dies ist sicher im Eindimensionalen der Fall – so tritt  $\|f_0^{-1}\|$  an die Stelle von  $\beta_n$  mit  $\beta_0 = \beta := \|f_0^{-1}\|$ .

**Beweis.** Teil I. Wir beweisen (B1), indem wir durch vollständige Induktion zeigen, daß die obigen Voraussetzungen auch für jeden höheren Index  $n$  erfüllt sind, genauer daß für alle  $n \in N_0$  folgendes gilt:

$$(A1)_n \exists f_n^{-1} \text{ mit } \|f_n^{-1}\| \leq \beta_n,$$

$$(A2) \text{ es existiert die beschränkte Inverse } [I + \frac{1}{2}f_n^{-1}F_n''c_n]^{-1}$$

$$(A3)_n \frac{1}{2}\eta_n = \beta_n M_2 \delta_n \leq \frac{1}{4}, \quad \beta_n M_3 \delta_n^2 \leq \frac{7}{100}$$

$$(A4)_n S_n := \{x \in X \mid \|x - x_n\| \leq 2\delta_n\} \subset S_{n-1} \subset S \quad (S_0 := S_{-1} := S)$$

Aus (A4)<sub>n</sub> folgt dann unmittelbar  $x_n \in S_n \subset S \forall n \in N_0$ .

(A1)<sub>0</sub>–(A4)<sub>0</sub> sind nach Voraussetzung bzw. per definitionem erfüllt.

(A1)<sub>n-1</sub>–(A4)<sub>n-1</sub>  $\Rightarrow$  (A1)<sub>n</sub>–(A4)<sub>n</sub>: (A1)<sub>n</sub>: Wir formulieren und beweisen zunächst eine auch im Beweis der folgenden Sätze benötigte Aussage:

**Lemma 1.** Aus (A1)<sub>n-1</sub>,  $x_n, x_{n-1} \in S$ , (V1) und  $\beta_{n-1} \|d_{n-1}\| K_2 \leq \eta_{n-1} \leq \eta < 1$  folgt (A1)<sub>n</sub> und

$$(3.4a) \quad \|f_n^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\eta} \|f_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\eta} \beta_{n-1}$$

bzw.

$$(3.4b) \quad \beta_n \leq \frac{1}{1-\eta} \beta_{n-1}$$

und

$$(3.5) \quad \beta_n \leq \frac{\beta}{(1-\eta)^n}$$

**Beweis.** Um  $f_n^{-1}$  mit Hilfe von  $f_{n-1}^{-1}$  abzuschätzen, beachten wir die formale Identität

$$f_n^{-1} = [f_{n-1}(f_{n-1}^{-1}f_n)]^{-1} = [f_{n-1}^{-1}f_n]^{-1} f_{n-1}^{-1}.$$

Wir müssen also zunächst die Existenz der Inversen von  $f_{n-1}^{-1}f_n$  nachweisen. Das geschieht, indem wir das Banachsche Lemma<sup>2)</sup> auf den beschränkten linearen

<sup>2)</sup> **Lemma von Banach.** Sei  $U$  ein beschränkter linear Operator. Dann gilt

$$U: X \rightarrow X \wedge \|U\| \leq \mu < 1 \Rightarrow \exists (I-U)^{-1} \text{ mit } \|(I-U)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\mu}.$$

(s.z.B. Kantorowitsch und Akilow [34], S. 139. In (12) muß es dort richtig  $\|U\|$  statt  $\|U\|^{-1}$  heißen. Man beachte ferner die dortige Definition von „linear“, die von der hier verwendeten abweicht.)

Operator

$$U_n := I - f_{n-1}^{-1} f_n = -f_{n-1}^{-1}(f_n - f_{n-1}),$$

der den Banach-Raum  $X$  in sich abbildet, anwenden. Für dessen Norm gilt nämlich unter den Voraussetzungen des Lemmas 1

$$(3.6) \quad \|U_n\| \leq \|f_{n-1}^{-1}\| \|F'(x_n) - F'(x_{n-1})\| \leq \beta_{n-1} \|x_n - x_{n-1}\| \sup_{0 < \tau < 1} \|F''(x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1}))\| \leq \beta_{n-1} \|d_{n-1}\| K_2 \leq \eta_{n-1} < 1$$

Also existiert die gewünschte Inverse  $(I - U_n)^{-1} = [f_{n-1}^{-1} f_n]^{-1}$  mit

$$(3.7) \quad \|[f_{n-1}^{-1} f_n]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \eta_{n-1}}$$

und schließlich nach dem oben Gesagten auch  $f_n^{-1}$ , wobei wegen (.7) und  $(A1)_{n-1}$  die Abschätzung besteht:

$$(3.8) \quad \|f_n^{-1}\| = \|[f_{n-1}^{-1} f_n]^{-1} f_{n-1}^{-1}\| \leq \|[f_{n-1}^{-1} f_n]^{-1}\| \|f_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{\|f_{n-1}^{-1}\|}{1 - \eta_{n-1}} \leq \frac{\beta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} = \beta_n$$

Diese Zeile bildet die Motivation für die Definition der Zahlen  $\beta_n$ . Mit (.6),  $(A1)_{n-1}$  und der Definitionsgleichung von  $\beta_n$  folgt (.4) und durch sukzessive Anwendung von (.4b) auf sich selbst (.5). Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Wir haben nun zu zeigen, daß die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt sind: Wegen  $(A1)_{n-1}$  und  $(A2)_{n-1}$  kann man  $x_n$  nach (.1) bzw. (1.6) bulden. Aufgrund von  $(A4)_{n-1}$  liegen sowohl  $x_{n-1}$  als auch  $x_n$  in  $S$ . Schließlich gilt nach (.3) per definitionem  $\beta_{n-1} \|d_{n-1}\| K_2 = 2\beta_{n-1} M_2 \delta_{n-1} = \eta_{n-1}$ , so daß wir also nach  $(A3)_{n-1}$  setzen können

$$(3.9) \quad \eta := \frac{1}{2}.$$

Zum Nachweis von  $(A2)_n$  unter Bezug auf  $(A3)_{n-1}$  benutzen wir wieder das Lemma von Banach. Dazu muß  $\zeta_n = \|c_n\| = \|f_n^{-1} F_n\|$  durch  $\delta_{n-1}$  ausgedrückt bzw. abgeschätzt werden. Wir schätzen zunächst  $\|f_{n-1}^{-1} F_n\|$  ab und erhalten dann die gewünschte Schranke für  $\zeta_n$  auf ähnliche Weise wie die für  $\|f_n^{-1}\|$ . Wir führen als Hilfsgröße den Operator  $H_{n-1}$  ein (auf den man bei näherer Betrachtung mehr oder weniger zwangsläufig kommt):

$$(3.10) \quad H_{n-1}(x) := [I - \frac{1}{2} f_{n-1}^{-1} F''_{n-1}(x - x_{n-1})] f_{n-1}^{-1} F(x).$$

woraus wir dann für  $x = x_n$  durch Inversenbildung die benötigte Abschätzung bekommen. Es ergibt sich unter Beachtung der ganz analog dem Eindimensionalen

gültigen Differentiationsregeln für Operatoren (vergl. etwa Collatz [8], Dieudonné [9], Kantorowitsch und Akilow [34], Lang [36], Michal [42] oder Vainberg [64]):

$$\begin{aligned} H'_{n-1}(x) &= -\frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}f_{n-1}^{-1}F(x) + [I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}(x - x_{n-1})]f_{n-1}^{-1}F'(x), \\ H''_{n-1}(x) &= -f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}f_{n-1}^{-1}F'(x) + [I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}(x - x_{n-1})]f_{n-1}^{-1}F''(x), \\ H'''_{n-1}(x) &= -\frac{2}{3}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}f_{n-1}^{-1}F''(x) + [I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}(x - x_{n-1})]f_{n-1}^{-1}F'''(x). \end{aligned}$$

Um die Taylorformel (s. die oben genannten Bücher, z.B. Collatz [8], S. 223) auf den Operator  $H_{n-1}(x)$  an der Stelle  $x_{n-1}$  für  $x_n$  anwenden zu können, brauchen wir

$$(3.11) \quad \begin{aligned} H_{n-1}(x_n) &= [I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}(x_n - x_{n-1})]f_{n-1}^{-1}F_n, \\ H_{n-1}(x_{n-1}) &= f_{n-1}^{-1}F_{n-1}, \\ H'_{n-1}(x_{n-1}) &= I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}f_{n-1}^{-1}F_{n-1}, \quad H''_{n-1}(x_{n-1}) = \theta. \end{aligned}$$

Damit und mit der in der Form

$$[I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}f_{n-1}^{-1}F_{n-1}]d_{n-1} + f_{n-1}^{-1}F_{n-1} = \theta$$

geschriebenen Gleichung (.1) erhält man mit (A1)<sub>n-1</sub> und (V1)

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \|H_{n-1}(x_n)\| &= \|H_{n-1}(x_n) - H_{n-1}(x_{n-1}) - H'_{n-1}(x_{n-1})d_{n-1} - \\ &\quad - H''_{n-1}(x_{n-1})d_{n-1}^{(2)}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{6}\delta_{n-1}^3 \sup_{0 < \tau < 1} \|H'''_{n-1}(x_{n-1} + \tau(x_n - x_{n-1}))\| \leq \\ &\leq \frac{1}{6}\delta_{n-1}^3 [\frac{3}{2} \cdot 4(\beta_{n-1}M_2)^2 + (1 + \beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})\beta_{n-1} \cdot 6M_3] = \\ &= [(\beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})^2 + (1 + \beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})(\beta_{n-1}M_3\delta_{n-1}^2)]\delta_{n-1}. \end{aligned}$$

Dabei sind die beiden gleichen Argumente  $\delta_{n-1}$  des bilinearen Operators  $H''_{n-1}$  zu  $d_{n-1}^{(2)}$  zusammengefaßt worden.

Der beschränkte lineare Operator  $-\frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}d_{n-1}$  bildet den Banach-Raum  $X$  in sich ab, und für dessen Norm gilt wegen (A1)<sub>n-1</sub>, (V1) und (A3)<sub>n-1</sub> die Abschätzung

$$\|-\frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}d_{n-1}\| \leq \beta_{n-1}M_2\delta_{n-1} = \frac{1}{2}\eta_{n-1} \leq \frac{1}{4} < 1.$$

Deshalb existiert nach dem Banach-Lemma die beschränkte lineare Inverse  $[I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}d_{n-1}]^{-1}$  und es gilt

$$(3.13) \quad \|[I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}d_{n-1}]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\eta_{n-1}} \leq \frac{4}{3}.$$

Damit folgt aus (.11) mit (.12) und (.13)

$$\begin{aligned} \|f_{n-1}^{-1}F_n\| &\leq \|[I - \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}d_{n-1}]^{-1}\| \|H_{n-1}(x_n)\| \leq \\ &\leq [(\beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})^2 + (1 + \beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})(\beta_{n-1}M_3\delta_{n-1}^2)] \frac{\delta_{n-1}}{1 - \frac{1}{2}\eta_{n-1}} \end{aligned}$$

und schließlich mit (7) und  $(A3)_{n-1}$

$$\begin{aligned}
 (3.14a) \quad \zeta_n &= \|f_n^{-1}F_n\| = \|[f_{n-1}^{-1}f_n]^{-1}f_{n-1}^{-1}F_n\| \leq \|f_{n-1}^{-1}f_n\|^{-1} \|f_{n-1}^{-1}F_n\| \leq \\
 &\leq \frac{\|f_{n-1}^{-1}F_n\|}{1 - \eta_{n-1}} \leq [(\beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})^2 + \\
 &+ (1 + \beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})(\beta_{n-1}M_3\delta_{n-1}^2)] \frac{\delta_{n-1}}{(1 - \frac{1}{2}\eta_{n-1})(1 - \eta_{n-1})} \leq \\
 (3.14b) \quad &\leq \left[ \frac{1}{4^2} + \left(1 + \frac{1}{4}\right) \frac{7}{100} \right] \frac{\delta_{n-1}}{(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{2})} = \frac{2}{5} \delta_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Hiermit sowie mit  $(A1)_n$ ,  $(A3)_{n-1}$  und  $(V1)$  kann man unter Beachtung, daß  $x_n$  in  $S$  liegt, die Norm des beschränkten linearen Operators  $\frac{1}{2}f_n^{-1}F_n''c_n$ , der den Banach-Raum  $X$  in sich abbildet, abschätzen:

$$\|\frac{1}{2}f_n^{-1}F_n''c_n\| \leq \beta_n M_2 \zeta_n \leq 2(\beta_{n-1}M_2\delta_{n-1}) \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\eta_{n-1} \leq \frac{1}{5} < 1.$$

Also ergibt sich die Behauptung  $(A2)_n$  aus dem Banach-Lemma.

Wir zeigen  $(A3)_n$ , in dem wir die Ungleichung

$$(3.15) \quad \delta_n \leq \frac{1}{2}\delta_{n-1}$$

beweisen. Denn hieraus folgt sofort mit  $(A3)_{n-1}$

$$\beta_n M_2 \delta_n \leq 2(\beta_{n-1}M_2\delta_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}$$

und erst recht

$$\beta_n M_3 \delta_n^2 \leq 2(\beta_{n-1}M_3\delta_{n-1}^2) \cdot \frac{1}{4} < \frac{7}{100}.$$

Aufgrund des zum Schluß des Beweisteils  $(A2)_n$  Gesagten, hat man mit  $(A3)_{n-1}$

$$(3.16) \quad \|[I + \frac{1}{2}f_n^{-1}F_n''c_n]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{5}\eta_{n-1}} \leq \frac{5}{4}.$$

Damit und mit  $(A3)_{n-1}$  folgt aus (1) mit  $n$  statt  $n - 1$ :

$$(3.17a) \quad \delta_n = \|[I + \frac{1}{2}f_n^{-1}F_n''c_n]^{-1}f_n^{-1}F_n\| \leq \frac{\zeta_n}{1 - \frac{2}{5}\eta_{n-1}} \leq$$

$$(3.17b) \quad \leq \frac{(\beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})^2 + (1 + \beta_{n-1}M_2\delta_{n-1})(\beta_{n-1}M_3\delta_{n-1}^2)}{(1 - \frac{2}{5}\eta_{n-1})(1 - \frac{1}{2}\eta_{n-1})(1 - \eta_{n-1})} \delta_{n-1} \leq$$

$$(3.17c) \quad \leq \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} \delta_{n-1} = \frac{1}{2} \delta_{n-1}.$$

$(A4)_n$ : Unter Berücksichtigung der Definition von  $S_n$  und von (17c) gilt

$$\|x - x_{n-1}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| \leq 2\delta_n + \delta_{n-1} \leq 2\delta_{n-1}, \quad \forall x \in S_n,$$

d.h.  $S_n \subset S_{n-1}$ , also wegen  $(A4)_{n-1}$  auch  $S_n \subset S$ . Damit ist die Behauptung  $(B1)$  vollständig bewiesen.

(B2): Aus (.17c) folgt

$$(3.18) \quad \delta_{n+j} \leq \frac{1}{2^j} \delta_n \leq \frac{\delta}{2^{n+j}} \quad (n, j \in \mathbb{N}_0)$$

d.h.

$$(3.19) \quad \{\delta_n\} \text{ ist eine Nullfolge.}$$

Wir zeigen, daß  $\{x_n\}$  eine Cauchy-Folge ist. Mit (.18) ergibt sich

$$(3.20) \quad \|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{j=0}^{p-1} \|x_{n+j+1} - x_{n+j}\| = \sum_{j=0}^{p-1} \delta_{n+j} \leq \delta_n \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{2^j} < \frac{\delta_n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\delta_n$$

womit die Behauptung wegen (.19) bewiesen ist. Wegen der Vollständigkeit des Raumes  $X$  und der Abgeschlossenheit von  $S$  sowie unter Berücksichtigung von (B1) gilt schließlich  $x^* := \lim x_n \in S$ . Aus (.19) folgt durch Grenzübergang  $p \rightarrow \infty$

$$(3.21) \quad \|x^* - x_n\| \leq 2\delta_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

d.h. unter Beachtung der Abgeschlossenheit von  $S_n$  sogar  $x^* \in S_n$ .

(B3): Üblicherweise heißt ein Iterationsverfahren konvergent von der Ordnung 3, wenn eine Ungleichung der Form

$$\|x^* - x_n\| \leq K \|x^* - x_{n-1}\|^3$$

mit von  $n$  unabhängigen Zahlenfaktor  $K$  besteht. Dazu muß gesichert sein, daß die Inverse  $[F'(x)]^{-1}$  in der abgeschlossenen Kugel  $S$  gleichmäßig beschränkt ist. Für die anderen Aussagen des Satzes kommen wir aber mit (V2) aus. Deshalb führen wir das, was unter dieser Voraussetzung hinsichtlich der Ordnung erreichbar ist, (gleich allgemein) ein als neue

**Definition.** Ein Iterationsverfahren  $\{x_n \xrightarrow{F} x^*\}$  zur Lösung der Gleichung  $F(x) = \theta$  heißt (in einem Banach-Raum  $X$ ) schwach von der Ordnung  $k$  konvergent, wenn die Ungleichung

$$\|x^* - x_n\| \leq P_k \|x^* - x_{n-1}\|^k, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

erfüllt ist, wobei  $P_k$  ein Polynom in  $\|f_{n-1}^{-1}\|$  mit von  $n$  unabhängigen positiven Koeffizienten ist, dessen Grad von  $k$  und vom Verfahren abhängt.

Falls die  $f_n^{-1}$  gleichmäßig beschränkt sind, folgt hieraus die übliche Definition der Konvergenz von der Ordnung  $k$ . Im anderen Falle kann es vorkommen, daß das Verfahren von geringerem Grade als  $k$  konvergiert. Sei z.B.  $X := \mathbf{R}$  und  $F(x) := x^2$ . Mit  $x_0 := \frac{1}{2}$  konvergiert das Newton-Verfahren nach Satz 1 ( $\zeta = \frac{1}{4}$ ,  $S := \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\beta K_2 \zeta = \frac{1}{2}$ ) gegen die einzige Lösung  $x^* = 0$  von

$F(x) = 0$  und man hat (s. [11], Ungl. (18))

$$|x^* - x_n| \leq \frac{1}{2} K_2 |f_{n-1}^{-1}| |x^* - x_{n-1}|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2x_{n-1}} |0 - x_{n-1}|^2 = \frac{1}{2} |x^* - x_{n-1}|^1.$$

Die Bezeichnung „schwach“ ist also sinnvoll. (Vergl. a. den Beweisteil (B3) von Satz 3.) Wir zeigen, daß HV schwach von der Ordnung 3 konvergiert. Mit (1.6) ergibt sich unter Beachtung, daß die Ungleichung (1.6) für alle  $n \in N$  gilt sowie von (A1) $_{n-1}$ , (A4) $_{n-1}$ , (V1) und der Taylorformel für Operatoren ( $d_{n-1}^* := x^* - x_{n-1}$ )

(3.22)

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n\| &= \|x^* - x_{n-1} - d_{n-1}\| = \|x^* - x_{n-1}(F'_{n-1} + \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1})^{-1} F_{n-1}\| = \\ &= \|(F'_{n-1} + \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1})^{-1} (F'_{n-1} + \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1})(x^* - x_{n-1}) + \\ &\quad + (F'_{n-1} + \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1})^{-1} F_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|(F'_{n-1} + \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1})^{-1}\| \|F(x^*) - F_{n-1} - F'_{n-1}d_{n-1}^* - \frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1}d_{n-1}^*\| \leq \\ &\leq \|f_{n-1}^{-1}\| \|(I + \frac{1}{2}f_{n-1}^{-1}F''_{n-1}c_{n-1})^{-1}\| \|F(x^*) - F_{n-1} - F'_{n-1}d_{n-1}^* - \frac{1}{2}F''_{n-1}d_{n-1}^{*(2)} + \\ &\quad + \frac{1}{2}F''_{n-1}(d_{n-1}^* - c_{n-1})d_{n-1}^*\| \leq \\ &\leq \frac{5}{4}\|f_{n-1}^{-1}\| (M_3\|d_{n-1}^*\|^3 + M_2\|d_{n-1}^* - c_{n-1}\| \|d_{n-1}^*\|) \end{aligned}$$

Im folgenden verwenden wir noch folgende *Bezeichnung*:  $\tilde{x}_n := x_{n-1} + c_{n-1}$ . Um die Norm von  $d_{n-1}^* - c_{n-1} = x^* - \tilde{x}_n$  abzuschätzen, beachtet man, daß lediglich die eben durchgeführte Abschätzung mit (1.6a) statt (1.6b) wiederholt zu werden braucht:

$$\begin{aligned} \|x^* - \tilde{x}_n\| &= \|x^* - x_{n-1} + f_{n-1}^{-1}F_{n-1}\| = \|f_{n-1}^{-1}f_{n-1}(x^* - x_{n-1}) + f_{n-1}^{-1}F_{n-1}\| \leq \\ &\leq \|f_{n-1}^{-1}\| \|F(x^*) - F_{n-1} - F'_{n-1}(x^* - x_{n-1})\| \leq \|f_{n-1}^{-1}\| M_2\|d_{n-1}^*\|^2. \end{aligned}$$

Schätzt man hiermit die obige Ungleichung für  $\|x^* - x_n\|$  noch weiter ab, so erhält man

$$(3.23a) \quad \|x^* - x_n\| \leq M_{3,n-1}\|x^* - x_{n-1}\|^3, \quad (\forall n \in N)$$

wobei

$$(3.23b) \quad M_{3,n-1} := \frac{5}{4}[M_3\|f_{n-1}^{-1}\| + (M_2\|f_{n-1}^{-1}\|)^2].$$

(B4): Wir schreiben (1.6a) mit  $n$  statt  $n-1$  so:

$$(3.24) \quad F(x_n) = -F'(x_n)c_n.$$

Nun gilt wegen  $x_n \in S$ , (V1) und dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} (3.25) \quad \|F'(x_n)\| &\leq \|F'(x_0)\| + \|F'(x_n) - F'(x_0)\| \leq \\ &\leq \|f_0\| + \|x_n - x_0\| \sup_{0 < \tau < 1} \|F''(x_0 + \tau(x_n - x_0))\| \leq \\ &\leq \|f_0\| + 2\delta K_2 < \infty, \quad (\forall n \in N_0) \end{aligned}$$

d.h. die Operatoren  $F'(x_n)$  sind gleichmäßig beschränkt. Aus der Stetigkeit der Norm und des Operators  $F$  für  $x \in S$  ergibt sich dann mit (.24), (.25), (.14b) und (.19)

$$\begin{aligned} \|F(x^*)\| &= \|F(\lim x_n)\| = \lim \|F(x_n)\| \leq (\|f_0\| + 2\delta K_2) \lim \zeta_n \leq \\ &\leq \frac{2}{3}(\|f_0\| + 2\delta K_2) \lim \delta_n = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt aufgrund einer Eigenschaft der Norm  $F(x^*) = \theta$ .

(B5): Die a-posteriori-Schranke (.2b) ergibt sich unmittelbar aus (.21) mit (.17b) unter Beachtung der Definition von  $\beta_n$  und  $\eta_n$ .

Zum Nachweis von (.2c) addieren wir auf der linken Seite unter der Norm von

$$\|F_n - F_{n-1} - F'_{n-1}d_{n-1} - \frac{1}{2}F''_{n-1}d_{n-1}^2\| \leq M_3\|d_{n-1}\|^3$$

die Gleichung (1.6b) und erhalten so

$$\|F_n - \frac{1}{2}F''_{n-1}(d_{n-1} - c_{n-1})d_{n-1}\| \leq M_3\|d_{n-1}\|^3$$

oder

$$\|F_n\| \leq M_3\delta_{n-1}^3 + M_2\|d_{n-1} - c_{n-1}\|\delta_{n-1},$$

woraus sich unter Beachtung von  $\zeta_n \leq \beta_n\|F_n\|$  mit (.21) und (.17a) die Behauptung ergibt.

Die Gültigkeit der a-priori-Schranke (.2a) ist wegen (.21) gesichert, sobald wir die Ungleichung

$$(S)_n \quad \delta_n \leq \frac{\delta}{2^n} (\beta\gamma\delta)^{3^{n-1}}, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

bewiesen haben. Dies geschieht wieder durch vollständige Induktion.  $\delta_0 = \delta$  gilt per definitionem (vergl. (.3b)).

$(S)_{n-1} \Rightarrow (S)_n$ : Aus der Definitionsgleichung für  $\beta_n$  folgt unter Berücksichtigung von  $(A3)_n$

$$(3.26) \quad \beta_n \geq \beta_{n-1} \geq \dots \geq \beta.$$

Hiermit sowie mit (.17b),  $(A3)_{n-1}$ , (.5), (.9), (.3a) und  $(S)_{n-1}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \beta_n \frac{\beta_{n-1}M_2^2 + (1 + \frac{1}{2}\eta_{n-1})M_3}{(1 - \frac{2}{3}\eta_{n-1})(1 - \frac{1}{2}\eta_{n-1})} \delta_{n-1}^3 \leq \beta_n\beta_{n-1} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \left( M_2^2 + \frac{5}{4} \frac{M_3}{\beta} \right) \delta_{n-1}^3 = \\ &= \frac{1}{4} \beta_n \beta_{n-1} \gamma^2 \delta_{n-1}^3 \leq \frac{1}{4} 2^{2n-1} \beta^2 \gamma^2 \left[ \frac{\delta}{2^{n-1}} (\beta\gamma\delta)^{3^{n-1}-1} \right]^3 = \\ &= \frac{1}{4} 2^{2n-1} \beta^2 \gamma^2 \frac{\delta^3}{2^{2n-3}} \frac{(\beta\gamma\delta)^{3^{n-1} \cdot 3}}{(\beta\gamma\delta)^3} = \frac{\delta}{2^n} (\beta\gamma\delta)^{3^n-1}. \end{aligned}$$



Teil II. (B6): Indirekter Beweis. Annahme:  $\tilde{x}$  sei eine zweite von  $x^*$  verschiedene Lösung von  $F(x) = \theta$  in  $S$ . Wir zeigen, daß  $\|\tilde{x} - x_n\| \rightarrow \theta$ , woraus dann wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes  $\lim x_n$  im Widerspruch zur Annahme  $x^* = \tilde{x}$  folgt.

Wir beweisen nun mit Hilfe von (.23) die Ungleichung

$$(E)_n \quad \|\tilde{x} - x_n\| \leq \frac{\delta}{2^{n-1}} \quad (1 < n \in N).$$

Dabei ist zu beachten, daß bei der Herleitung von (.23) zwar das Iterationsverfahren (1.6), aber nirgendwo die Relation  $x^* = \lim x_n$  benutzt wurde. Von  $x^*$  ist nur die Eigenschaft verwendet worden, daß es Lösung von  $F(x) = \theta$  ist. (Erst zum Nachweis der Ordnungs-Eigenschaft braucht man  $\lim x_n = x^*$ , weil die Ordnungsdefinition sonst sinnlos ist.) Da demnach (.23) für irgendeine Lösung  $x^*$  von  $F(x) = \theta$  in  $S$  gilt, ist diese Ungleichung auch für  $\tilde{x}$  richtig. Wir beweisen  $(E)_n$  durch vollständige Induktion.

$(E)_2$ : Aus der Annahme  $\tilde{x} \in S$  folgt  $\|\tilde{x} - x_0\| \leq 2\delta$ . (.23) mit  $\tilde{x}$  statt  $x^*$  geht hiermit unter Beachtung von (V3) und (V4) über in

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x_1\| &\leq M_{3,0} \|\tilde{x} - x_0\|^3 \leq 10[(\beta M_3 \delta^2) + (\beta M_2 \delta)^2] \delta \leq \\ &\leq 10\left[\frac{7}{100} + \frac{1}{16}\right] \delta = \frac{53}{40} \delta. \end{aligned}$$

Dies ist die schärfste, mit der vorliegenden Beweismethode erreichbare Abschätzung. Damit kann also  $(E)_1$  nicht gesichert werden. Mit  $\|\tilde{x} - x_1\| \leq \frac{53}{40} \delta < \frac{3}{2} \delta$  ergibt sich analog zu der eben durchgeführten Abschätzung unter Beachtung von ( $\tilde{V}2$ )

$$\|\tilde{x} - x_2\| \leq M_{3,1} \|\tilde{x} - x_1\|^3 \leq \frac{5}{4} [(\beta M_3 \delta^2) + (\beta M_2 \delta)^2] \left(\frac{3}{2}\right)^3 \delta \leq \frac{27}{32} \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2}.$$

$(E)_{n-1} \Rightarrow (E)_n$ : Mit  $(A1)_{n-1}$ ,  $(E)_{n-1}$ , (.5), (.9), (V3) und (V4) ergibt sich aus (.23) unter Berücksichtigung von ( $\tilde{V}2$ ) für alle  $n = 3, 4, 5, \dots$ :

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x_n\| &\leq M_{3,n-1} \|\tilde{x} - x_{n-1}\|^3 \leq \frac{5}{4} [\beta_{n-2} M_3 + (\beta_{n-2} M_3)^2] \left(\frac{\delta}{2^{n-2}}\right)^3 \leq \\ &\leq \frac{5}{4} [2^{n-2} (\beta M_3 \delta^2) + (\beta M_2 \delta)^2 \cdot 2^{2n-4}] \frac{1}{2^{2n-5}} \frac{\delta}{2^{n-1}} \leq \\ &\leq \frac{5}{4} 2^{2n-4} \left(\frac{1}{2} \frac{7}{100} + \frac{1}{4^2}\right) \frac{2}{2^{2n-4}} \frac{\delta}{2^{n-1}} < \frac{\delta}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Teil III. Wir zeigen zunächst die Gültigkeit der folgenden für den Beweis von (B7) benötigten Ungleichungen ( $\forall n \in N$ ):

$$(3.27) \quad \delta_n \leq \beta_n M_2 \delta_{n-1}^2,$$

$$(3.28) \quad \eta_n \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \right)^2,$$

$$(3.29) \quad \delta_{n-1} \leq \delta_{n-1} \lambda_{n-1} - \delta_n \lambda_n.$$

Mit (.17b), (A3)<sub>n-1</sub>, (V5) bzw. ( $\tilde{V}5$ ) und (.18) ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \frac{(\beta_{n-1} M_2 \delta_{n-1}) + (1 + \beta_{n-1} M_2 \delta_{n-1})(M_3/M_2) \delta_{n-1}}{(1 - \frac{2}{5} \eta_{n-1})(1 - \frac{1}{2} \eta_{n-1})} \beta_n M_2 \delta_{n-1}^2 \leq \\ &\leq \frac{\frac{1}{4} + (1 + \frac{1}{4}) \cdot \frac{7}{25}}{(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})} \beta_n M_2 \delta_{n-1}^2 = \beta_n M_2 \delta_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Damit

$$\eta_n = 2\beta_n M_2 \delta_n \leq 2\beta_n^2 M_2^2 \delta_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \right)^2.$$

Zum Beweis von (.29) drücken wir  $\delta_n \lambda_n$  durch  $\delta_{n-1}$  und  $\lambda_{n-1}$  aus:

$$\begin{aligned} \delta_n \lambda_n &\leq \beta_n M_2 \delta_{n-1}^2 \lambda_n = \frac{1}{2} \frac{2\beta_{n-1} M_2 \delta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \delta_{n-1} \lambda_n = \frac{1}{2} \frac{\eta_{n-1} \delta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \lambda_n \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{\eta_{n-1} \delta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\eta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}}\right)^2\right]}} = \frac{1 - \eta_{n-1} - \sqrt{(1 - 2\eta_{n-1})}}{\eta_{n-1}} \delta_{n-1} = \\ &= \delta_{n-1} \lambda_{n-1} - \delta_{n-1}. \end{aligned}$$

Damit erhält man statt (.20)

$$(3.30) \quad \|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{j=0}^{p-1} \delta_{n+j} \lambda_{n+j} - \sum_{j=0}^p \delta_{n+j} \lambda_{n+j} = \delta_n \lambda_n - \delta_{n+p} \lambda_{n+p},$$

$$(\forall n \in N_0 \wedge \forall p \in N).$$

Aus der Definition von  $\lambda_n$  folgt unter Berücksichtigung von (A3)<sub>n</sub>

$$(3.31) \quad 1 < \lambda_n \leq 2, \quad (\forall n \in N_0).$$

Deswegen und wegen (.19) ergibt sich durch Grenzübergang  $p \rightarrow \infty$  in (.30)

$$(3.22) \quad \|x^* - x_n\| \leq \lambda_n \delta_n, \quad (\forall n \in N_0).$$

Teil IV. Unter der Voraussetzung (V6) folgt (B8) unmittelbar aus (.2a), denn mit (V6) folgt aus (.3a)

$$\gamma \leq 2M_2 \sqrt{\left[\frac{5}{3}\left(1 + \frac{5}{4}\right)\right]} = 2M_2 \sqrt{\frac{15}{4}} < 4M_2.$$

Damit ist unter Beachtung von (.3b)

$$\beta \gamma \delta < 4\beta M_2 \delta = 2\eta_0.$$

#### 4. DISKUSSION BISHERIGER UND DER NEUEN SÄTZE ÜBER DAS VERFAHREN DER TANGIERENDEN HYPERBELN

Satz 2 unterscheidet sich vom Satz von Mertvecova darin, daß bei letzterem die Voraussetzung (V4) komplizierter und schärfer ist, die Aussagen (B3), (3.3b) und (3.3c) (d.h. die a-posteriori-Schranken) fehlen und die Eindeutigkeit nur für einen erheblich kleineren Bereich gezeigt wird; die a-priori-Schranke wird in [40] in der Form von (B8) angegeben. Der Beweis wird von Mertvecova lediglich skizziert. Die dort zitierten Zwischenergebnisse dürften aber auf ähnliche Weise wie hier erhalten worden sein.

(3.2a) ist als a-priori-Schranke die größte der drei Schranken. Sie ist bei Operatorgleichungen zur numerischen Abschätzung des Fehlers der Näherungslösungen im allgemeinen unbrauchbar (vergl. Tab. 4 und 6). Die Gestalt der a-posteriori-Schranke (3.2b) ist analog der Ungleichung, mit deren Hilfe die Ordnung des Iterationsverfahrens definiert wird (vergl. die Def. im Beweisteil (B3)): Man erkennt an dem Exponenten der Norm auf der rechten Seite sofort die (unter gewissen Voraussetzungen gesicherte) Ordnung des Verfahrens. Diese Schranke kann man als direkte Verallgemeinerung der a-posteriori-Schranke beim Newton-Verfahren (vgl. (2.1b)) ansehen. Die a-posteriori-Schranke (3.2b) ist die schärfste der bewiesenen Schranken. Ihre Gestalt entspricht dem spezifischen Aufbau des Verfahrens der tangierenden Hyperbeln.

In den zitierten Arbeiten findet man lediglich a-priori-Abschätzungen für HV, und es erhebt sich die Frage nach der Ursache, wieso in der angeführten Literatur bisher keine a-posteriori-Schranken für HV gewonnen worden sind, wiewohl viele Autoren das Verfahren im Hinblick auf dessen numerische Anwendung hin untersuchen und um Verbesserung der Fehlerschranken bemüht sind. Ein wesentlicher Grund dürfte sein, daß meist – nach dem Vorbild von Kantorowitsch (s. [34], Satz 6 (1. XVIII)) – nicht mit  $\zeta_n = \|f_n^{-1}F_n\|$ , sondern mit oberen Schranken hierfür gearbeitet wird. Dann lassen sich a-posteriori-Schranken in der Tat nicht ohne weiteres gewinnen. Man erhält sie in diesem Falle, wenn man statt  $S_n$  zwei Systeme von wechselweise ineinandergeschachtelten Kugeln betrachtet. Allerdings wird dadurch der Beweis erheblich verkompliziert. Die Verwendung von  $\zeta_n$  in unserem Sinne bedeutet jedoch praktisch keine Einschränkung, da man  $c_n = -f_n^{-1}F_n$  sowieso in irgendeiner Form berechnen muß. Das andere Vorgehen ist lediglich beim Nachprüfen der Voraussetzungen vorteilhafter: Es genügt dann,  $f_0^{-1}F_0$  abzuschätzen, während wir  $\zeta = \|f_0^{-1}F_0\|$  berechnen müssen. Legt man auf diese allgemeinere Voraussetzung Wert, also  $\|f_0^{-1}F_0\| \leq \zeta$ , so kann man den ersten Schritt der in der vorliegenden Note durchgeführten Induktionsbeweise, in denen  $\zeta_n$  vorkommt, als „direkten“ Schritt ansehen mit  $\|f_0^{-1}F_0\| \leq \zeta$  und setzt erst dann, also von  $n = 1$  an  $\zeta_n := \|f_n^{-1}F_n\|$ . Der Induktionsanfang liegt in diesem Falle bei  $n = 1$ . Die Aussagen der Sätze bleiben unter Beachtung der Bedeutung von  $\zeta$  gültig.

Die Bedingungen (V5) bzw. (V5̃) sind im allgemeinen gut erfüllt; denn wenn schon

(V5) nicht erfüllt sein sollte, so ist es (V5), da nach einigen Iterationsschritten  $\zeta_{n-1} \ll 1$  wird. Diese Voraussetzungen bedeuten also keine nennenswerte Einschränkung.

Bei der Berechnung der Fehlerschranken werden im wesentlichen nur Größen verwendet, die zur iterativen Lösung der Aufgabe sowieso benötigt werden und die bis hin zur Berechnung von  $x_n$  bereits vorliegen. Es sind lediglich einige nicht ins Gewicht fallende Zusatzrechnungen wie die parallele Berechnung der  $\beta_n$  und  $\eta_n$  erforderlich.

Die Fehlerschranken lassen sich noch ein wenig verbessern, indem man die Voraussetzungen (V1) und (V2) mit nicht getrennten Normen formuliert (vergl. die entsprechende Bemerkung zu Satz 1) und indem man beachtet, daß es für die Schranken genügt, die höheren Ableitungen abzuschätzen über

$$\hat{S} := \left\{ x \in X \mid \|x - x_1\| \leq \frac{\xi}{2} \right\} \cup \{x := x_0 + \tau(x_1 - x_0) \mid 0 \leq \tau \leq 1\} \subset S.$$

Nach diesen Bemerkungen gehen wir auf einige bisher für das Verfahren der tangierenden Hyperbeln in Banach-Räumen erzielte Resultate ein. Jankó [16] gibt eine Herleitung von HV über die Ordnungsdefinition von E. Schröder [54]. Belázs und Jankó [4], Jankó [21], Jankó und Belázs [24] sowie Jankó und Pop [26] schwächen die Voraussetzungen von Mertvecova ab und geben Sätze über HV an, in denen die Existenz der dritten Ableitung nicht verlangt wird, während die zweite Ableitung einer Hölder-Bedingung genügen muß. Ferner beweisen sie Sätze über HV vom „Mysovskih-Typ“ (vergl. Kantorowitsch und Akilow [34], Satz 5 (2. XVIII)), wo in den Voraussetzungen die Inverse der ersten Ableitung nicht nur an der Ausgangsnäherung  $x_0$ , sondern über den ganzen betrachteten Bereich abgeschätzt werden muß. Dadurch läßt sich der Beweis vereinfachen und die obere Schranke in (V3) erheblich vergrößern, z.B. von  $\frac{1}{2}$  auf 2. Der Inhalt dieser Arbeiten ist in das Buch von Jankó [23] aufgenommen worden. (Vergl. auch die Bemerkungen am Schluß dieses Abschnitts bezüglich dieser Arbeiten.) Mirakov [43] verwendet ähnliche (sog. Cauchy-) Bedingungen wo  $[F'(x)]^{-1}$  über eine Kugel abgeschätzt werden muß und wendet den erhaltenen Satz auf die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme an. Ting Ch'uan-sung [60] verbessert die so von Mirakov gewonnene Fehlerabschätzung. Ulm [62] und Kaazik [28] verbessern das Resultat von Mertvecova ebenfalls, insbesondere die Schranken. Daneben gibt Kaazik einen anderen Satz, bei dem der Operator  $F$  an der Ausgangsnäherung „analytisch“ vorausgesetzt wird; man braucht dann die Ableitungen nicht über einen Bereich abzuschätzen. In beiden Sätzen sind jedoch die sonstigen Voraussetzungen äußerst kompliziert. Verbesserungen dieser Sätze finden sich bei Shafiyev [58]: Die Voraussetzungen werden etwas vereinfacht und abgeschwächt, so daß zwar die dritte, nicht aber die zweite Ableitung über den ganzen Bereich abgeschätzt zu werden braucht. Šisler [59] leitet für nichtlineare Gleichungssysteme Näherungsformeln für den Fehler bei Iterationsverfahren höherer Ordnung her. Altman [3] und Šafiev [48] beweisen Aussagen wie sie Mertvecova für HV erhalten hat mit Hilfe der Majorantenmethode.

Dieses Prinzip wurde zuerst von Kantorowitsch (s. Kantorowitsch und Akilow [34], Kap. XVIII, § 1.2) und J. Schröder [55], [56], [57] angewandt und besteht darin, eine reelle Hilfsfunktion zu benutzen, für die die Voraussetzungen des dem Banachschen Fixpunktsatz in metrischen Räumen entsprechenden Satzes über das Iterationsverfahren erfüllt sind und den in der Gleichung  $x = (Ux)$  auftretenden Operator  $U$  in gewisser Weise durch Hilfsfunktionen zu „majorisieren“. Dadurch übertragen sich die Aussagen über das Iterationsverfahren bei der reellen Hilfsfunktion sinngemäß auf das entsprechende Verfahren  $x_n := U(x_{n-1})$  bei der Operatorgleichung. Insbesondere wird der Fehler von  $x_n$  abgeschätzt durch den Fehler des entsprechenden Näherungswertes der reellen Folge. Diese ist zwar wesentlich leichter als die Folge  $\{x_n\}$  zu berechnen, doch im allgemeinen kennt man die Lösung der reellen Hilfs-gleichung – bei HV eine algebraische Gleichung dritten Grades – nicht exakt. Das ist ein Nachteil des Majorantenprinzips. Im Hinblick auf eine Fehlerabschätzung versagt es, wenn  $U$  selbst eine reelle Funktion ist. Man kann das Majorantenverfahren für Operatorgleichungen mit den Aussagen der Sätze 2, 3 und 5 kombinieren, indem man mit den letzteren lediglich den Fehler der reellen, eindimensionalen Hilfsfolge abschätzt. Denn die neuen Schranken sind gerade in diesem Falle fast gleich dem wirklichen Fehler (vergl. Tab. 2). Allerdings erweisen sich die Majorantenschranken nicht wesentlich schärfer als die a-priori-Schranken (vergl. Tab. 4 und 6).

Ting Ch'uan-sung [60] gibt Bedingungen an, unter denen HV bei beliebiger Ausgangsnäherung aus einer gewissen Kugel konvergiert. Dubovik [12] beweist einen Existenz-, Konvergenz- und Eindeutigkeitsatz für allgemeine Verfahren  $x_n := U(x_{n-1})$  von dritter Ordnung, d.h. mit  $U$  von der Form  $U(x) := x - f^{-1} F(x) - \frac{1}{2} f^{-1} F''(x) [f^{-1} F(x)]^{(2)} + B(x) [F(x)]^{(3)}$  wo  $f := F'(x)$  und  $B(x)$  für alle  $x$  ein beliebiger symmetrischer trilinearer Operator ist.

Grebenjuk [14] beweist mit Hilfe des oben erläuterten Majoranten-Prinzips die Konvergenz des Verfahrens ( $\forall n \in N$ )

$$x_n := x_{n-1} + d_{k-1, n-1}$$

mit

$$d_{m, n-1} := - \left[ I + f_{n-1}^{-1} \sum_{j=2}^m \frac{1}{j!} F_{n-1}^{(j)} d_{m-j+1, n-1} \cdots d_{m-1, n-1} \right]^{-1} f_{n-1}^{-1} F_{n-1}$$

$$m = 2(1)k - 1 \quad \text{und} \quad d_{1, n-1} := -f_{n-1}^{-1} F_{n-1}$$

in Banach-Räumen. Dieses Verfahren geht für  $k = 3$  über in HV.

Merz [41] untersucht – die Aussagen von Ehrmann [13] verallgemeinernd – für holomorphe Funktionen eine Klasse von Iterationsverfahren, die sich aus den Padéschen Näherungsbrüchen für die Taylorreihe von  $F$  ergibt und die HV als Sonderfall enthält.

Aussagen über HV folgen auch aus Sätzen über allgemeine Iterationsverfahren höherer Ordnung von Bartišč [5], Collatz [7], [8], Jankó [16], [22] [23], Jankó und Pop [27], Kaazik [29], [30], Kaazik und Jygi [31], Rjabčenko [47] und Schmidt [52].

Wir erwähnen noch kurz einige Arbeiten über mit der Methode der tangierenden Hyperbeln eng verwandte Iterationsverfahren.

Jankó [15] ersetzt die Ableitungen in HV durch Differenzenquotienten. Šafiev [49] betrachtet die folgende Modifikation von HV in Banach-Räumen:

$$x_{n+1} := x_n + \frac{1}{2} [I - \frac{1}{2} f_0^{-1} F_0'' f_0^{-1} F_0]^{-1} F_0'' f_0^{-1} F_n (x_n - x_0) - [I - \frac{1}{2} f_0^{-1} F_0'' f_0^{-1} F_0]^{-1} f_0^{-1} F_n .$$

Da dieses Verfahren, wie Šafiev zeigt, nur linear konvergiert, ist nicht ganz ersichtlich, warum man nicht statt dessen gleich mit dem wesentlich einfacheren modifizierten Newton-Verfahren oder der Regula falsi (s. Schmidt [53]) arbeiten sollte. Eine wesentlich interessantere Abwandlung von HV stammt von Altman [1], [2]. Er hat bereits 1957 für den Sonderfall  $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ , d.h. daß  $F$  ein Funktional ist, eine Variante des (auf abstrakte Räume verallgemeinerten) Newton-Verfahrens angegeben, bei der die Bildung der Inversen  $[F'(x_n)]^{-1}$  vermieden wird. Dazu werden normierte Elemente  $y_n \in X$  so gewählt, daß

$$(4.1) \quad F'(x_n) y_n = \|F'(x_n)\|, \quad (\forall n \in N_0)$$

ist. (Die so bedingte Einschränkung auf reflexive Banach-Räume beseitigt Altman in [2], indem er zeigt, daß  $\|y_n\| = 1$  und (.1) nur in einem gewissen Sinne angenähert erfüllt zu sein brauchen.) Das Verfahren der tangierenden Hyperbeln geht dann über in [3]

$$x_{n+1} := x_n - \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{F''(x_n) y_n^2 F(x_n)}{\|F'(x_n)\|^2} \right]^{-1} \frac{F(x_n)}{\|F'(x_n)\|} y_n \quad (\forall n \in N_0).$$

Die Beschränkung dieser Variante auf ein Funktional bedeutet im Prinzip keine wesentliche Einschränkung, denn man kann der Operatorgleichung  $P(x) = \theta$  z.B. die Funktionalgleichung  $F(x) := \|P(x)\|^2 = 0$  zuordnen. Allerdings stellt dann die zweite Ableitung von  $F(x)$  schon einen recht komplizierten Ausdruck dar, so daß man diese Verfahren wohl nur in dem Falle anwenden wird, wenn die Inverse der ersten Ableitung im Gegensatz zu den höheren Ableitungen schwer oder gar nicht zugänglich ist. Mit dieser „Altman-Variante“ von HV haben sich außer Altman selbst [3] u.a. Jankó [17]–[20], Jankó, Fornwald und Gaidici [25], Lika [37], [38] und Šafiev [50] befaßt. (Bezüglich einiger Unvollständigkeiten der Voraussetzungen in den einschlägigen Arbeiten von Altman vergl. Kivistik [35] und Pugachev [46].)

Wir kommen zurück auf Satz 2. Betrachtet man dessen Voraussetzungen, so stellt sich die Frage, ob sich diese nicht im Hinblick auf die Anwendungen bei konkreten Problemen der Analysis noch vereinfachen lassen. Gegenüber dem Satz über das Newton-Verfahren ergeben sich folgende Komplikationen:

1. Die Berechnung von  $\delta$  ist aufwendiger als die von  $\zeta$ .

2. Neben der Existenz der Inversen der ersten Ableitung muß noch die der beschränkten Inversen  $[I - \frac{1}{2}[F'(x_0)]^{-1} F''(x_0) [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)]^{-1}$  nachgeprüft werden.

3. Die Norm der dritten Ableitung ist abzuschätzen.

Während das letztere natürlich ist, zeigt sich, daß man die ersten beiden Komplikationen vermeiden kann, d.h. man kommt damit aus, über die Voraussetzungen von Satz 1 hinaus lediglich die dritte Ableitung abzuschätzen. Dies bedeutet eine erhebliche Vereinfachung und Abschwächung der Voraussetzungen, die allerdings teilweise mit etwas kleineren Schranken in (V3) bzw. (V4) — wo jetzt  $\delta$  durch  $\zeta$  zu ersetzen ist — erkauft werden muß.

Diese Form der Voraussetzungen hat überdies den Vorteil, daß sie — sinngemäß ergänzt — zu entsprechenden Sätzen bei Iterationsverfahren höherer Ordnung führen (s.z.B. [10]). Dies scheint für die Bedingungen von Satz 2 nicht zuzutreffen, der bisher offenbar nicht einmal auf das Tschebyscheff-Verfahren übertragen werden konnte.

Auf die eben erläuterte Weise werden in der vorliegenden Note Sätze über HV erhalten, die die in der Einleitung genannten Mängel der bisherigen, einschließlich der aus Sätzen über allgemeine Iterationsverfahren folgenden Aussagen über HV vermeiden und die den dort hinsichtlich ihrer Anwendungen auf konkrete Probleme der Analysis aufgestellten Forderungen genügen. Die offen bleibende Frage, wie man  $x_0$  wählen soll, damit die geforderten Bedingungen erfüllt werden, kann von einem lokalen Satz schlechterdings nicht beantwortet werden. Man muß eben mit verschiedenen „geeigneten“ Näherungen  $x_0$  die Bedingungen (V1)–(V4) durchprüfen. Gerade deshalb ist es vom numerischen Standpunkt aus äußerst wichtig, daß die Gestalt dieser Bedingungen so einfach wie möglich ist. In diesem Zusammenhang sei ein Verfahren von Petry [45] erwähnt, das dem Newton-Verfahren vorgeschaltet ist und ein wesentlich größeres Einzugsgebiet garantiert als (V3) von Satz 1. Diesem Verfahren kann man natürlich auch HV statt des Newton-Verfahrens folgen lassen. Bei dem Petryschen Vorgehen wird jedoch vorausgesetzt, daß der Operator  $F$  in gewissem Sinne monoton ist (vergl. diesbezüglich etwa den ausgezeichneten Übersichtsartikel von Kačurovskij [32]).

Im nächsten Abschnitt wird ein Satz über HV mit (V3) (und (V4)):  $\beta K_j \zeta^{j-1} \leq \frac{1}{3}$  ( $j = 2, 3$ ) bewiesen. Dieser Satz mag als Standardsatz bezeichnet werden. Er besitzt alle fünf in der Einleitung als wünschenswert herausgestellten Eigenschaften. Unbefriedigend ist hierbei, daß die erste Schranke in (V3) von  $\frac{1}{2}$  beim Newton-Verfahren auf  $\frac{1}{3}$  reduziert worden ist. Deshalb wird in Abschnitt 7 noch ein „Grenzsatz“ angegeben, der hinsichtlich der in Rede stehenden allgemeinen Forderungen schon an der „Grenze“ liegt: Man braucht bei diesem Satz zur Prüfung, ob  $x_0$  eine geeignete Ausgangsnäherung ist, auch nur einen Newton-Schritt und nicht einen vollständigen Schritt von HV auszuführen. Sämtliche Aussagen werden analog zu Satz 3 bzw. 2 geliefert. Die Voraussetzungen lassen sich aber *im Ganzen* nicht mehr abschwächen.

Dies sieht man an der nicht um  $x_0$ , sondern um  $\tilde{x}_1$  (statt  $x_1$ ; dies wiederum, um zur Nachprüfung der Voraussetzungen nicht doch  $x_1$  berechnen zu müssen) gelegten Kugel  $\tilde{S}$  und an der – wie bei Satz 2 – für die Eindeutigkeit zusätzlich erforderlichen Bedingung  $\|f_1^{-1}\| \leq \beta$ . In Abschnitt 6 werden mögliche Abschwächungen der Voraussetzungen (V3) diskutiert und eine notwendige Bedingung angegeben (Satz 4), der die Schranken in (V3) genügen müssen, damit der Beweis in der vorliegenden Form durchführbar ist. Dabei zeigt sich, daß man mit der von Newton-Verfahren (Satz 1) her übertragenen Bedingung  $\beta K_2 \zeta \leq \frac{1}{2}$  nicht durchkommt.

Verzichtet man darauf, Existenz und Eindeutigkeit in ein und demselben Bereich zu zeigen, so könnte man (V3) bei einer für die Abschätzung der höheren Ableitungen noch erträglichen Größe der Kugel  $S$  weiter auf etwa  $\beta K_2 \zeta \leq \frac{4}{9}$  abschwächen. Dies umso mehr als mit (V3) von Satz 3 und 5 auch die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind, d.h. die Eindeutigkeit folgt auch aus diesem Satz. Doch möchte man nach Möglichkeit vermeiden, andere Sätze als Beweishilfsmittel heranzuziehen.

Abschließend bemerken wir noch, daß die Voraussetzungen in den mit den unsrigen vergleichbaren Sätzen der zu Anfang dieser Diskussion erwähnten Arbeiten [4], [24], [26] nur scheinbar schwächer sind als die in der vorliegenden Note verwendeten. Z.B. wird in [24] (in unserer Terminologie) laut Bedingung 4°  $\beta K_2 \zeta = \frac{1}{2}$  zugelassen. Aus der dortigen Bedingung 5° folgt aber, daß schon für den (günstigsten) Sonderfall  $K_3 = 0$   $\beta K_2 \zeta \leq \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7}) \approx 0,452$  sein muß. Sinngemäß die gleiche Anmerkung gilt auch für einige weitere von diesen Autoren publizierte (und in [23] enthaltene) Sätze über andere Verfahren.

Wie schon erwähnt, lassen sich Sätze vom Typ der Sätze 3 und 5 auch für andere Iterationsverfahren höherer Ordnung angeben, insbesondere für das Tschebyscheff-Verfahren. Darüber wird an anderer Stelle berichtet.

## 5. EIN STANDARDSATZ ÜBER DAS VERFAHREN DER TANGIERENDEN HYPERBELN

Der folgende Satz ist von den in der vorliegenden Note bewiesenen Sätzen über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit der unkomplizierteste; er erfüllt alle fünf in der Einleitung aufgestellten Forderungen gut. Deshalb wurde er „Standardsatz“ genannt. Im folgenden werden die Bezeichnungen verwendet, die am Schluß von Abschnitt 1 eingeführt wurden.

**Satz 3. I.** Falls  $x_0 \in S$  so gewählt werden kann, daß (V1)–(V3) gilt,

- (V1)  $\exists S := \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq \frac{8}{5}\zeta\}$ , wo  $F$  dreimal Fréchet-differenzierbar ist mit  $\|F^{(j)}(x)\| \leq K_j, \forall x \in X \wedge j = 2, 3$ ;
- (V2)  $\exists [F'(x_0)]^{-1}$  mit  $\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta$ ,
- (V3)  $\beta K_j \zeta^{j-1} \leq \frac{1}{3} \quad (j = 2, 3)$ ,



dann (B1) existiert die durch (1.6) definierte Folge  $\{x_n\}$  (HV), und es ist  $x_n \in S$   
 $\forall n \in N_0$ . Ferner gilt:

(B2) Die Folge  $\{x_n\}$  konvergiert, und zwar gilt  $x^* := \lim x_n \in S$ .

(B3) Das Verfahren (1.6) konvergiert von der Ordnung 3.

(B4)  $F(x^*) = \theta$ .

(B5) In  $S$  gibt es außer  $x^*$  keine andere Lösung der Gleichung  $F(x) = \theta$ .

(B6) Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$(5.1a) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{8}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^n \zeta (\beta \gamma \zeta)^{3^n - 1}, \quad (\forall n \in N_0)$$

$$(5.1b) \quad \|x^* - x_n\| < \frac{8}{5} \beta_n (M_3 + \beta_n M_2^2) \|x_n - x_{n-1}\|^3, \quad (\forall n \in N)$$

$$(5.1c) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{8}{5} \beta_n (M_3 \|d_{n-1}\|^3 + \|d_{n-1} - c_{n-1}\| M_2 \|d_{n-1}\|), \quad (\forall n \in N)$$

wobei

$$(5.2) \quad \gamma := 2M_2 \sqrt{\left(1 + \frac{6}{5} \frac{M_3}{\beta M_2^2}\right)} (< \infty); \quad \eta_n := \frac{12}{5} \beta_n M_2 \zeta_n; \quad M_j := \frac{K_j}{j!}$$

$$(\forall n \in N_0) \quad (j = 2, 3)$$

II. Falls außer (V1)–(V3) noch folgende Bedingung erfüllt ist

$$(V4) \quad \frac{M_3}{M_2} \zeta \leq \frac{1}{2}$$

dann (B7) kann in den a-posteriori-Schranken (.1b) und (.1c) der Faktor  $\frac{8}{5}$  ersetzt werden durch

$$\alpha_n := \frac{6}{5} \min\left(\lambda_n, \frac{4}{3}\right), \quad \text{wobei} \quad \lambda_n := \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2\eta_n}}.$$

Bemerkungen.

1. Bezüglich (V4) gilt die analoge Bemerkung wie zu Satz 2.

2. Die zu Beginn von Abschn. 4 gemachten Bemerkungen über die Fehlerschranken von Satz 2 gelten hier ebenfalls.

3. Für die nach (B7) zu berechnenden Schranken wird  $\zeta_n$ , d.h.  $F$  und  $F'$  an der „letzten“ Näherungsstelle  $x_n$  benötigt. Dies läßt sich vermeiden, ohne die numerische Qualität dieser a-posteriori-Schranke zu beeinträchtigen. Man kann nämlich wegen  $\eta_{n-1} \ll 1$  die Zahl  $\eta_n$  nach der (auch für die durch (.2) definierten Größen  $\eta_n$  gültigen) Ungleichung (3.28) günstig durch  $\eta_{n-1}$  abschätzen. Dann wird übrigens auch  $\eta_n \ll 1$  und man hat angenähert  $\lambda_n \approx 1$ . Hieraus wiederum ersieht man, daß die Schranken (.1b) und (.1c) durch (B7) maximal um 33% verkleinert werden.

Beweis von Satz 3. Teil I. Wir beweisen (B1) analog zu Satz 2, indem wir durch vollständige Induktion zeigen, daß die obigen Voraussetzungen auch für jeden höheren Index erfüllt sind, genauer, das folgendes gilt ( $\forall n \in N_0$ )

$$(A1)_n \exists f_n^{-1} \quad \text{mit} \quad \|f_n^{-1}\| \leq \beta_n$$

$$(A2)_n \beta_n M_j \zeta_n^{j-1} \leq \frac{1}{3 \cdot j!} \quad (j = 2, 3)$$

$$(A3)_n S_n := \{x \in X \mid \|x - x_n\| \leq \frac{8}{5} \zeta_n\} \subset S_{n-1} \subset S \quad (S_0 := S_{-1} := S).$$

Aus (A3)<sub>n</sub> folgt dann unmittelbar  $x_n \in S_n \subset S \quad \forall n \in N_0$ .

(A1)<sub>0</sub> – (A3)<sub>0</sub> sind nach Voraussetzung bzw. per definitionem erfüllt.

(A1)<sub>n-1</sub> – (A3)<sub>n-1</sub>  $\Rightarrow$  (A1)<sub>n</sub> – (A3)<sub>n</sub>: (A1)<sub>n</sub>: Für die Norm des aufgrund von (V1) und (A1)<sub>n-1</sub> beschränkten linearen Operators  $-\frac{1}{2} f_{n-1}^{-1} F''_{n-1} c_{n-1}$ , der den Banach-Raum  $X$  in sich abbildet, gilt wegen (A3)<sub>n-1</sub> ( $x_{n-1} \in S$ ), (V1) und (A2)<sub>n-1</sub>

$$\left\| -\frac{1}{2} f_{n-1}^{-1} F''_{n-1} c_{n-1} \right\| \leq \beta_{n-1} M_2 \zeta_{n-1} \leq \frac{1}{3 \cdot 2!} < 1,$$

d.h. Gleichung (1.6b) ist nach  $d_{n-1}$  auflösbar und es gilt die Abschätzung

$$(5.3) \quad \left\| \left( I + \frac{1}{2} f_{n-1}^{-1} F''_{n-1} c_{n-1} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}.$$

Wir erhalten also unter Beachtung von (A1)<sub>n-1</sub> und (.3) aus (1.6b)

$$(5.4) \quad \|d_{n-1}\| = \left\| \left( I + \frac{1}{2} f_{n-1}^{-1} F''_{n-1} c_{n-1} \right)^{-1} c_{n-1} \right\| \leq \frac{6}{5} \zeta_{n-1}.$$

Aus (A3)<sub>n-1</sub> folgt, daß  $x_{n-1}$  und – man beachte die Definition von  $c_{n-1}$  – auch  $x_n$  in  $S$  liegt. Wegen (.4) und (A2)<sub>n-1</sub> gilt mit (.2)

$$(5.5) \quad \beta_{n-1} \|d_{n-1}\| K_2 \leq \frac{12}{5} (\beta_{n-1} M_2 \zeta_{n-1}) = \eta_{n-1} \leq \frac{12}{5} \frac{1}{3 \cdot 2!} = \frac{2}{5} =: \eta < 1.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt und dieses gilt mit  $\eta = \frac{2}{5}$ .

Wir zeigen (A2)<sub>n</sub>, indem wir die Ungleichung

$$(5.6) \quad \zeta_n < \frac{1}{4} \zeta_{n-1}$$

beweisen. Denn hieraus folgt (A2)<sub>n</sub> sofort mit (A2)<sub>n-1</sub>, (3.4) und (.5). Wir haben also  $\zeta_n = \|f_n^{-1} F_n\|$ , d.h.  $\|F_n\|$  durch  $\zeta_{n-1}$  abzuschätzen. Dazu benutzen wir die Taylorformel, die wir wegen (V1) und  $x_n, x_{n-1} \in S$  anwenden können:

$$\|F_n - F_{n-1} - F'_{n-1} d_{n-1} - \frac{1}{2} F''_{n-1} d_{n-1}^{(2)}\| \leq M_3 \|d_{n-1}\|^3.$$

Wir erhalten nun die erforderliche, hinreichend scharfe Abschätzung, indem wir links unter der Norm (1.6b) substrahieren:

$$\|F_n - \frac{1}{2}F''_{n-1}(d_{n-1} - c_{n-1})d_{n-1}\| \leq M_3 \|d_{n-1}\|^3$$

woraus mit

$$\|d_{n-1} - c_{n-1}\| \leq \beta_{n-1} M_2 \zeta_{n-1} \|d_{n-1}\|$$

und (4)

$$(5.7) \quad \|F_n\| \leq M_3 \|d_{n-1}\|^3 + M_2 \|d_{n-1} - c_{n-1}\| \|d_{n-1}\| \leq$$

$$(5.8) \quad \leq \frac{36}{25} (6M_3 + \beta_{n-1} M_2^2) \zeta_{n-1}^3$$

folgt. Wegen (A1)<sub>n</sub> kann man c<sub>n</sub> bilden. Mit (.8), (3.4a), (.5) und (A2)<sub>n-1</sub> schätzen wir nun ζ<sub>n</sub> ab:

$$\begin{aligned} \zeta_n = \|f_n^{-1} F_n\| &\leq \|f_n^{-1}\| \|F_n\| \leq \frac{5}{3} \cdot \frac{36}{25} \left[ \frac{6}{5} (\beta_{n-1} M_3 \zeta_{n-1}^2) + (\beta_{n-1} M_2 \zeta_{n-1})^2 \right] \zeta_{n-1} \leq \\ &\leq \frac{12}{5} \left[ \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{(3 \cdot 3!)^2} \right] \zeta_{n-1} = \frac{68}{75} \frac{1}{4} \zeta_{n-1} < \frac{1}{4} \zeta_{n-1}. \end{aligned}$$

(A3)<sub>n</sub>: Unter Berücksichtigung von (.6), (.4) und der Definition der Kugel S<sub>n</sub> gilt

$$\begin{aligned} \|x - x_{n-1}\| &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| \leq \\ &\leq \frac{8}{5} \zeta_n + \|d_{n-1}\| < \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{4} \zeta_{n-1} + \frac{6}{5} \zeta_{n-1} = \frac{8}{5} \zeta_{n-1}, \quad \forall x \in S_n \end{aligned}$$

d.h. S<sub>n</sub> ⊂ S<sub>n-1</sub>, also wegen (A3)<sub>n-1</sub> auch S<sub>n</sub> ⊂ S.

(B2): Aus (.6) folgt

$$(5.9) \quad \zeta_{n+j} \leq \frac{1}{2^{2j}} \zeta_n \leq \frac{\zeta}{2^{2(n+j)}} \quad (\forall j, n \in \mathbb{N}_0)$$

d.h.

(5.10)  $\{\zeta_n\}$  ist eine Nullfolge.

Wir zeigen auf analogem Wege wie bei Satz 2, daß {x<sub>n</sub>} eine Cauchy-Folge ist. Wegen (.4) und (.9) ergibt sich

$$\begin{aligned} (5.11) \quad \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{j=0}^{p-1} \|x_{n+j+1} - x_{n+j}\| = \sum_{j=0}^{p-1} \|d_{n+j}\| \leq \frac{6}{5} \sum_{j=0}^{p-1} \zeta_{n+j} \leq \\ &\leq \frac{6}{5} \zeta_n \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{4^j} < \frac{6}{5} \frac{\zeta_n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{5} \zeta_n \end{aligned}$$

womit die Behauptung wegen (.10) bewiesen ist. Durch Grenzübergang p → ∞ folgt hieraus

$$(5.12) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{8}{5} \zeta_n.$$

Deswegen und wegen der Abgeschlossenheit von  $S_n$  gilt  $x^* := \lim x_n \in S_n$ ; damit wegen (B1) auch  $x^* \in S$ .

(B3) und (B4) werden wie in Satz 2 bewiesen. Wie ein Vergleich von (3.16) und (.3) lehrt, steht jetzt in (3.23b) der Faktor  $\frac{6}{5}$  statt  $\frac{5}{4}$ :

$$(5.13) \quad \|x^* - x_n\| \leq M_{3,n-1} \|x^* - x_{n-1}\|^3$$

wobei

$$M_{3,n-1} := \frac{6}{5} [\|f_{n-1}^{-1}\| M_3 + (M_2 \|f_{n-1}^{-1}\|)^2].$$

Im Gegensatz zu Satz 2 (und 5) ist unter den Voraussetzungen von Satz 3  $f_n^{-1}$  gleichmäßig beschränkt. Denn man sieht analog zum Beweisteil (A1)<sub>n</sub>, daß die Norm des beschränkten linearen Operators  $U := I - f_0^{-1} F'(x): X \rightarrow X$  ( $\forall x \in S$ ) kleiner als 1 ist:

$$\|U\| \leq \beta K_2 \|x - x_0\| \leq 2(\beta K_2 \zeta) \leq \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \exists [F'(x)]^{-1} \wedge \|[F'(x)]^{-1}\| \leq 2\beta, \\ \forall x \in S.$$

Wegen (B1) ist also auch  $\|f_n^{-1}\| \leq 3\beta, \forall n \in N_0$ . Damit haben wir (B3).

(B5): Entsprechend dem an dieser Stelle beim Beweis von Satz 2 (dort (B6)) Gesagten genügt es, folgende Ungleichung zu beweisen

$$(E)_n \quad \|\tilde{x} - x_n\| < \frac{8}{5} \frac{\zeta}{4^n}$$

(E)<sub>2</sub>: Um  $\|\tilde{x} - x_2\|$  nach (.13) (mit  $\tilde{x}$  statt  $x^*$ ) abzuschätzen, muß man  $\|\tilde{x} - x_1\|$  oder eine obere Schranke hierfür kennen. Mit (V3) und aus der Annahme  $\tilde{x} \in S$  ergibt sich

$$\|\tilde{x} - x_1\| \leq \frac{6}{5} [(\beta M_3 \zeta^2) + (\beta M_2 \zeta)^2] \left(\frac{8}{5}\right)^3 \zeta \leq \frac{1}{10} \left(\frac{8}{5}\right)^3 \zeta = \frac{3072}{3125} \cdot \frac{5}{12} \zeta < \frac{5}{12} \zeta.$$

Hiermit sowie mit (3.4b), (.5), (V3) erhält man die Behauptung.

(E)<sub>n-1</sub>  $\Rightarrow$  (E)<sub>n</sub>: Mit (3.5), (.5), (V3) und (E)<sub>n-1</sub> ergibt sich aus (.13) mit  $\tilde{x}$  statt  $x^*$  für alle  $n = 3, 4, 5, \dots$

$$M_{3,n-1} \zeta^2 \leq \frac{6}{5} \left[ \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} (\beta M_3 \zeta^2) + \left(\frac{5}{3}\right)^{2n-2} (\beta M_2 \zeta)^2 \right] \leq \\ \leq \frac{6}{5} \left(\frac{5}{3}\right)^{2n-2} \left[ \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{(3 \cdot 2!)^2} \right] = \frac{1}{10} \left(\frac{5}{3}\right)^{2n-2}, \\ \|\tilde{x} - x_n\| \leq M_{3,n-1} \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{\zeta}{4^{n-1}}\right) \leq \frac{1}{10} \left(\frac{5}{3}\right)^{2n-2} \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}\right)^3 \cdot \zeta < \frac{8}{5} \cdot \frac{\zeta}{4^n}.$$

(B6): Die a-posteriori-Schranke (.1c) ergibt sich unmittelbar aus (.12),  $\zeta_n \leq \beta_n \|F_n\|$

und (.7). Die anderen Schranken erhält man hieraus durch weitere Abschätzung. Um die a-posteriori-Schranke (.1b) herzuleiten, schätzen wir die in (.7) vorkommende Differenz  $d_{n-1} - c_{n-1}$  wie folgt aus der Differenz von (1.6b) und (1.6a) ab

$$\begin{aligned} F'_{n-1}(d_{n-1} - c_{n-1}) &= -\frac{1}{2}F''_{n-1}c_{n-1}d_{n-1} = -\frac{1}{2}F''_{n-1}(d_{n-1} - c_{n-1})d_{n-1} - \frac{1}{2}F''_{n-1}d_{n-1}^2, \\ \|d_{n-1} - c_{n-1}\| &\leq \beta_{n-1}M_2\|d_{n-1} - c_{n-1}\| \|d_{n-1}\| + \beta_{n-1}M_2\|d_{n-1}\|^2, \\ \|d_{n-1} - c_{n-1}\| &\leq \frac{\beta_{n-1}}{1 - \frac{6}{5}\beta_{n-1}M_2\zeta_{n-1}}M_2\|d_{n-1}\|^2 < \\ &< \frac{\beta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}}M_2\|d_{n-1}\|^2 = \beta_nM_2\|d_{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung in (.7) eingesetzt ergibt die Behauptung. Die a-priori-Schranke folgt aus (.12) und der Ungleichung

$$\zeta_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \zeta(\beta\gamma\zeta)^{3^n-1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0),$$

die wie in Satz 2 zu beweisen ist.

Teil II. Zum Nachweis von (B7) bemerken wir, daß die Ungleichung (3.28) mit den jetzt nach (.2) definierten positiven Zahlen  $\eta_n$  hier ebenfalls gilt und entsprechend (3.29):

$$(5.14) \quad \zeta_{n-1} \leq \zeta_{n-1}\lambda_{n-1} - \zeta_n\lambda_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Wir weisen nur (3.28) nach; der Rest des Beweises verläuft wie bei Satz 2.

Aus (.8) ergibt sich mit (.9) und (V4) bzw. mit (V4) unter Beachtung von  $(A2)_{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|F_n\| &\leq \frac{6}{5}M_2 \left[ \frac{36}{25} \left( \frac{M_3}{M_2} \zeta_{n-1} \right) + (\beta_{n-1}M_2\zeta_{n-1}) \right] \zeta_{n-1}^2 \leq \\ &\leq \frac{6}{5}M_2 \left[ \frac{36}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2!} \right] \zeta_{n-1}^2 = \frac{23}{25} \cdot \frac{6}{5}M_2\zeta_{n-1}^2 < \frac{6}{5}M_2\zeta_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Damit

$$\eta_n = \frac{12}{5}\beta_nM_2\zeta_n \leq \frac{12}{5}\|F_n\|\beta_n^2M_2 < \frac{1}{2}\left(\frac{12}{5}\right)^2M_2\zeta_{n-1}^2 \left(\frac{\beta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}}\right)^2.$$

## 6. MÖGLICHE ABSCHWÄCHUNGEN DER VORAUSSETZUNGEN DES STANDARDSATZES

Im Hinblick auf Satz 1 und 2 ist es naheliegend anzunehmen, daß man die Voraussetzungen von Satz 3 so abändern kann, daß man mit  $\beta K_2\zeta \leq \frac{1}{2}$  auskommt. Dies ist jedoch – wie schon in Abschn. 4 bemerkt wurde – nicht möglich. Nachdem

wir dies im vorliegenden Abschnitt gezeigt haben, beweisen wir einen Satz, bei dem die Schranke für  $\beta K_2 \zeta$  möglichst groß ist, die aber andererseits im Sinne der in der Einleitung formulierten Forderungen gerade noch vernünftig ist. In diesem Sinne ist der Satz 5 ein „Grenz“-Satz. Allerdings sind die dabei erhaltenen Schranken – der Kürze halber wird nur *eine* a-posteriori-Schranke angegeben – jeweils etwas gröber und die Abschätzung in (V1) ist – insbesondere in Funktionenräumen – wegen des Kugelmittelpunktes  $\tilde{x}_1$  statt  $x_0$  umständlicher zu handhaben als in Satz 3. Auch deshalb erweist sich Satz 3 als „Standard“-Satz. Die angekündigten Aussagen über Abschwächungen von (V3) werden zusammengefaßt in

**Satz 4.** *Es seien die Voraussetzungen (V1) und (V2) – die dortige Kugel aber mit noch nicht spezifiziertem Radius  $\lambda \zeta$  – von Satz 3 und*

$$(6.1) \quad \beta K_j \zeta^{j-1} \leq \sigma_j \quad (j = 2, 3)$$

mit gewissen positiven Zahlen  $\lambda, \sigma_j$  erfüllt.

Dann ist die Ungleichung

$$(6.2) \quad \sigma_3 \leq 6 \left(1 - \frac{\sigma_2}{2}\right) (1 - \sigma_2) (1 - 2\sigma_2)$$

unabhängig von dem Zahlenwert  $\lambda$  eine notwendige Bedingung für die Durchführung des Beweises der Behauptungen (B1)–(B4) und die Gültigkeit der Fehlerabschätzungen der Gestalt (B6) von Satz 3 in der dortigen Form. Insbesondere ist der Beweis in diesem Sinne unter den getroffenen Voraussetzungen mit  $\beta K_2 \zeta = \frac{1}{2}$  nicht möglich.

Beweis. Wir setzen  $\mu_j := \sigma_j/j!$  ( $j = 2, 3$ ) und zeigen, daß wenn der Beweis von Satz 3 im dortigen Sinne durchführbar sein soll,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  der zu (2) äquivalenten Ungleichung

$$(6.3) \quad \mu_3 \leq (1 - \mu_2) [(1 - 3\mu_2)^2 - \mu_2^2]$$

genügen müssen. Dazu vollziehen wir einfach den Beweis der Behauptung (B1) von Satz 3 nach, jetzt aber mit (.1) statt (V3). Wir haben dann statt (A2)<sub>n</sub>:

$$(A2)'_n \quad \beta_n M_j \zeta_n^{j-1} \leq \mu_j \quad (j = 2, 3),$$

statt (5.4):

$$\|d_{n-1}\| \leq \frac{1}{1 - \mu_2} \zeta_{n-1},$$

statt (3.4b) mit (5.5):

$$(6.4) \quad \beta_n \leq \frac{1 - \mu_2}{1 - 3\mu_2} \beta_{n-1}$$

und statt (5.8):

$$(6.5) \quad \|F_n\| \leq \frac{1}{(1-\mu_2)^2} \left[ \frac{M_3}{1-\mu_2} + \beta_{n-1} M_2^2 \right] \zeta_{n-1}^3.$$

Dabei muß  $\mu_2 < \frac{1}{3}$  sein. Es folgt schließlich

$$(6.6) \quad \zeta_n \leq \frac{\mu_3 + (1-\mu_2)\mu_2^2}{(1-\mu_2)^2(1-3\mu_2)} \zeta_{n-1}.$$

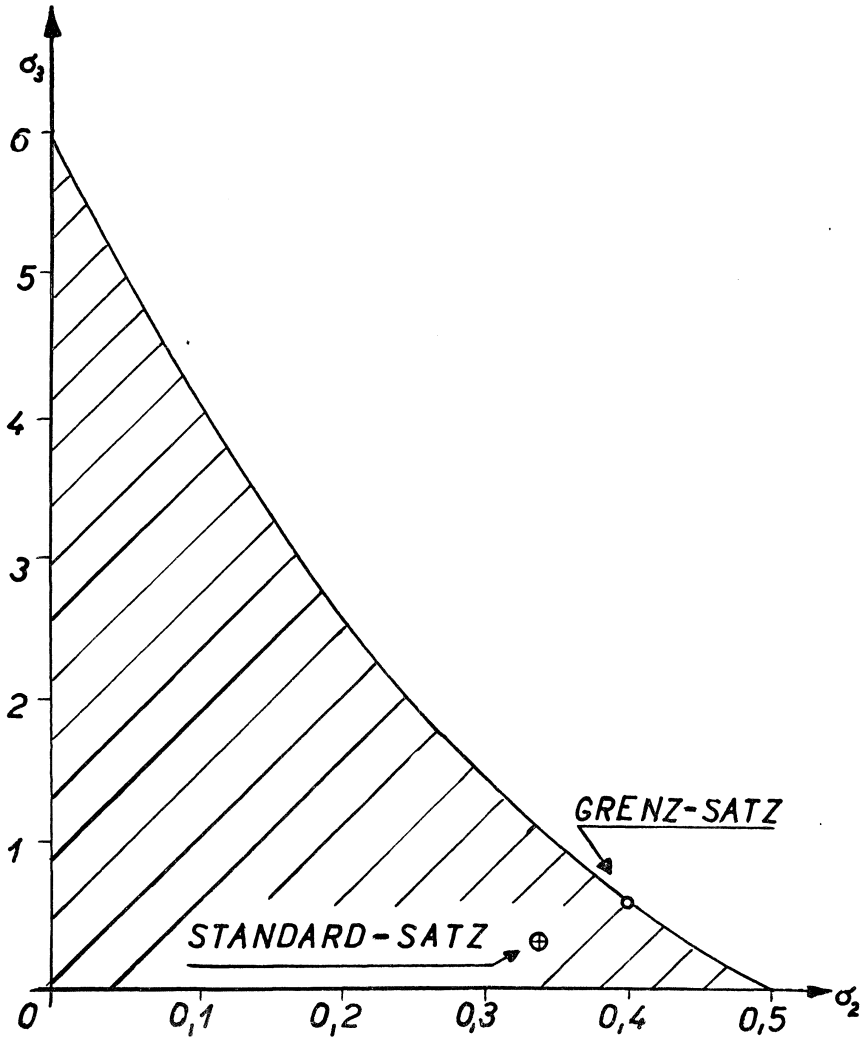


Abb. 1. Zulässige Wertepaare der Schranken  $\sigma_1, \sigma_2$  in  $\beta K_j \zeta^{j-1} \leq \sigma_j$  ( $j = 2, 3$ ) (schraffiert).

Um die Gültigkeit von  $(A2)_n$  nachzuweisen, haben wir im Beweis von Satz 3  $\beta_n M_2 \zeta_n$  durch  $\beta_{n-1} M_2 \zeta_{n-1}$  abgeschätzt und  $(A2)_{n-1}$  benutzt. Dazu muß der bei der Abschätzung entstehende Vorfaktor kleiner oder gleich Eins sein. Dies führt mit (.4) statt (3.8b) und (5.5) sowie (.6) statt (5.6) nach einer leichten Umformung unmittelbar auf die Ungleichung (.3). Für  $\beta K_2 \zeta = \frac{1}{2}$ , d.h.  $\mu_2 = \frac{1}{4}$  wird die rechte Seite von (.3), also auch  $\sigma_3$  gleich Null. Dies ist aber nach Voraussetzung ausgeschlossen (weil eine obere Schranke 0 als *allgemeine* Forderung in (V3) sinnlos wäre). Damit ist der Satz bewiesen.

In Abb. 1 sind diejenigen Mengen der Wertepaare  $(\sigma_2, \sigma_3)$  als Kurven eingetragen, für die in (.2) das Gleichheitszeichen gilt. Für alle unterhalb dieser Grenzkurve liegenden Paare  $(\sigma_2, \sigma_3)$  ist die Ungleichung (.2) ebenfalls erfüllt.

Während das für den Grenzsatz benutzte Paar  $(\frac{2}{5}, \frac{4}{7})$  praktisch auf der Grenzkurve in Abb. 1 liegt, ist bei dem für den Standardsatz benutzten Paar  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  für eine oder beide Schranken in (V3) noch „Reserve“ gelassen worden (vergl. Abb. 1). Dazu ist nochmals zu bemerken, daß (.2) nur eine *notwendige* Bedingung ist und zu deren Herleitung praktisch nur *eine* Stelle im Beweis von Satz benutzt wurde. Von der Wahl des Paares  $(\sigma_2, \sigma_3)$  hängt es natürlich noch ab, ob die Behauptungen (B1)–(B4) im einzelnen bzw. insgesamt nachgewiesen werden können und wie die Fehlerabschätzungen ausfallen. Auf jeden Fall bietet (.2) bzw. Abb. 1 dem Benutzer die Möglichkeit, in Verbindung mit dem in diesem und im vorigen Abschnitt Gesagten durch Wahl von geeigneten Paaren  $(\sigma_2, \sigma_3)$  noch andere Sätze aufzustellen. Dazu könnte z.B. Veranlassung bestehen, wenn  $K_2 \ll K_3$  ist oder umgekehrt. Es sei nur noch bemerkt, daß eine weitere Annäherung von  $\sigma_2$  an  $\frac{1}{2}$  bewirkt, daß die Fehlerschranken, der Radius  $\lambda \zeta$  von  $S$  und damit  $K_2$  und  $K_3$  sowie der Faktor in der Ungleichung zwischen  $\beta_n$  und  $\beta_{n-1}$  vergrößert werden. Der letztere macht dann bald einen direkten Nachweis der Eindeutigkeit in  $S$  ohne zusätzliche Voraussetzungen unmöglich. (Beim Grenzsatz muß für die Eindeutigkeit im Gegensatz zum Standardsatz bereits zusätzlich  $\|f_1^{-1}\| \leq \beta$  gefordert werden.)

## 7. EIN GRENZSATZ ÜBER DAS VERFAHREN DER TANGIERENDEN HYPERBELN

Mit den am Schluß von Abschn. 1 eingeführten Bezeichnungen und  $\tilde{x}_n := x_{n-1} + c_{n-1}$ ,  $\forall n \in N$  (s. auch (1.6)) gilt

### Satz 5. I. Existenz einer Lösung. Konvergenz und Ordnung des Verfahrens. Schranken

Falls  $x_0 \in X_F$  so gewählt werden kann, daß (V1)–(V4) gilt,

(V1)  $\exists \tilde{S} := \{x \in X \mid \|\tilde{x} - x_1\| \leq \frac{3}{2}\zeta\}$  wo  $F$  dreimal Fréchet-differenzierbar ist mit  $\|F^{(j)}(x)\| \leq K_j$ ,  $\forall x \in \tilde{S} \wedge j = 2, 3$ ;

(V2)  $\exists [F'(x_0)]^{-1}$  mit  $\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq \beta$ ,

(V3)  $\beta K_2 \zeta \leq \frac{2}{5}$ ,

(V4)  $\beta K_3 \zeta^2 \leq \frac{4}{7}$ ,



dann (B1) existiert die durch (1.6) definierte Folge  $\{x_n\}$  (HV), und es ist  $x_n \in S$ ,  
 $\forall n \in N_0$ . Ferner gilt:

(B2) Die Folge  $\{x_n\}$  konvergiert, und zwar gilt  $x^* := \lim x_n \in S$ .

(B3) Das Verfahren (1.6) konvergiert schwach von der Ordnung 3.

(B4)  $F(x^*) = \theta$ .

(B5) Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$(7.1) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{5 \cdot \zeta}{2^{n+1}} (\beta \gamma \zeta)^{3^n - 1}, \quad \forall n \in N_0$$

$$(7.2) \quad \|x^* - x_n\| \leq \frac{5}{2} \beta_n (M_3 + \beta_n M_2^2) \|x_n - x_{n-1}\|^3, \quad \forall n \in N$$

wobei

$$(7.3) \quad \gamma := \frac{5}{2} M_2 \sqrt{\left(1 + \frac{5}{4} \frac{M_3}{\beta M_2^2}\right)} (< \infty); \quad \eta_n := \frac{5}{2} \beta_n M_2 \zeta_n.$$

## II. Eindeutigkeit der Lösung.

Falls außer (V1)–(V4) noch gilt

$$(V\tilde{2}) \quad \|[F'(x_1)]^{-1}\| \leq \beta$$

dann (B6) ist  $x^*$  in  $\tilde{S}$  eindeutig.

## III. Verschärfung der a-posteriori-Schranke

Falls außer (V1)–(V4) folgendes gilt (bzgl. (V\tilde{5}) gilt das Analoge wie bei Satz 2)

$$(V5) \quad \frac{M_3}{M_2} \zeta \leq \frac{12}{25}$$

dann (B7) gilt sogar die schärfere a-posteriori-Schranke

$$\|x^* - x_n\| < \frac{5 \cdot \beta_n}{2[1 + \sqrt{(1 - 2\eta_n)}]} (M_3 + \beta_n M_2^2) \|x_n - x_{n-1}\|^3, \quad \forall n \in N.$$

Auf den Beweis dieses Satzes gehen wir nur insoweit ein, als sich prinzipielle Änderungen gegenüber dem Beweis von Satz 3 ergeben.

(B1) wird analog zu Satz 3 durch induktiven Beweis von

$$(A1)_n \quad \exists f_n^{-1} \quad \text{mit} \quad \|f_n^{-1}\| \leq \beta_n,$$

$$(A2)_n \quad \beta_n M_2 \zeta_n \leq \frac{1}{5}, \quad \beta_n M_3 \zeta_n^2 \leq \frac{2}{21},$$

$$(A3)_n \quad \tilde{S}_n := \{x \in X \mid \|x - \tilde{x}_{n+1}\| \leq \frac{3}{2} \zeta_n\} \subset \tilde{S}_{n-1} \subset \tilde{S} \quad (\tilde{S}_0 := \tilde{S}_{-1} := \tilde{S})$$

gezeigt. Man erhält zunächst

$$(7.4) \quad \|d_{n-1}\| \leq \frac{5}{4}\zeta_{n-1}.$$

Wir bemerken, daß Lemma 1 auch bezüglich der Kugel  $\tilde{S}$  gilt und prüfen dessen übrige Voraussetzungen nach. Aufgrund der zu (4) führenden Überlegungen kann man  $\tilde{x}_n$  und  $x_n$  nach (1.6) bilden. Per definitionem ist  $\|x_{n-1} - \tilde{x}_n\| = \zeta_{n-1}$ . Wegen  $(A3)_{n-1}$  liegt also  $x_{n-1}$  in  $\tilde{S}_{n-1}$  bzw.  $\tilde{S}$ . Aus der Differenz von (1.6b) und (1.6a) ergibt sich unter Beachtung des eben Gesagten und der Definition von  $\tilde{x}_n$  mit (4), (V1) und  $(A2)_{n-1}$

$$(7.5) \quad \|x_n - \tilde{x}_n\| = \|d_{n-1} - c_{n-1}\| \leq (\beta_{n-1}M_2\zeta_{n-1}) \|d_{n-1}\| \leq \frac{1}{4}\zeta_{n-1} < \frac{3}{2}\zeta_{n-1}$$

d.h.  $x_n \in \tilde{S}_{n-1}$  und damit wegen  $(A3)_{n-1}$  auch  $x_n \in \tilde{S}$ . Mit (4) und  $(A2)_{n-1}$  wird

$$(7.6) \quad \beta_{n-1}\|d_{n-1}\| \cdot 2M_2 \leq \frac{5}{2}\beta_{n-1}M_2\zeta_{n-1} = \eta_{n-1} \leq \frac{1}{2} =: \eta < 1.$$

Also gilt Lemma 1 mit dem eben definierten  $\eta$ .

$(A2)_n$  wird wie bei Satz 3 bewiesen. Wir geben hier nur die wichtigsten dabei erhaltenen Ungleichungen wieder:

$$(7.7) \quad \|F_n\| \leq M_3\|d_{n-1}\|^3 + \beta_{n-1}M_2^2\zeta_{n-1}\|d_{n-1}\|^2 <$$

$$(7.8) \quad < \frac{25}{16}\left(\frac{5}{4}M_3 + \beta_{n-1}M_2^2\right)\zeta_{n-1}^2.$$

Hiermit

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \zeta_n &\leq \frac{25}{8} \left[ \frac{5}{4}(\beta_{n-1}M_3\zeta_{n-1}^2) + (\beta_{n-1}M_2\zeta_{n-1})^2 \right] \zeta_{n-1} \leq \\ &\leq \frac{25}{8} \left[ \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{21} + \frac{1}{5^2} \right] \zeta_{n-1} = \frac{167}{168} \cdot \frac{1}{2} \zeta_{n-1} < \frac{1}{2} \zeta_{n-1}. \end{aligned}$$

$(A3)_n$ : Unter Beachtung der Definition von  $\tilde{S}_n$  sowie von (5) und (9) hat man

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}_n\| &\leq \|x - \tilde{x}_{n+1}\| + \|\tilde{x}_{n+1} - x_n\| + \|x_n - \tilde{x}_n\| \leq \\ &\leq \frac{3}{2}\zeta_n + \zeta_n + \frac{1}{5}\zeta_{n-1} \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\zeta_{n-1} + \frac{1}{2}\zeta_{n-1} + \frac{1}{5}\zeta_{n-1} < \frac{3}{2}\zeta_{n-1}, \quad \forall x \in \tilde{S}_n. \end{aligned}$$

$(B2)$  wird wie bei Satz 3 durch

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{5}{2}\zeta_n$$

bewiesen.

Auch die Beweise von  $(B3)$ ,  $(B4)$  und  $(B5)$  verlaufen analog wie bei Satz 3, bzw. 2.

$(B6)$ : Hier läßt sich die Ungleichung

$$(E)_n \quad \|\tilde{x} - x_n\| < \frac{5\zeta}{2^{n+1}}$$

erst von  $n = 4$  ab beweisen. Es würde ja im Hinblick auf das Ziel  $\|\tilde{x} - x_n\| \rightarrow 0$  genügen zu zeigen, daß  $(E)_n$  von einem gewissen  $n_0$  ab gilt; doch da der Beweis induktiv mittels (5.13) geführt wird, muß mit der Annahme  $\tilde{x} \in \tilde{S}$  begonnen, d.h.  $(E)_n$  sukzessive „von unten herauf“ bis zum kleinsten Wert von  $n$ , für den  $(E)_n$  gilt, abgeschätzt werden. Wir skizzieren den Beweis, da er in verschiedener Hinsicht von dem entsprechenden Beweisteil bei Satz 3 abweicht.

Wir bemerken, daß in (5.13) jetzt der Faktor  $\frac{6}{5}$  durch  $\frac{5}{4}$  zu ersetzen ist. Um  $\|\tilde{x} - x_4\|$  nach (5.13) abzuschätzen, muß man  $\|\tilde{x} - x_m\|$  für  $m = 1, 2, 3$  selbst oder obere Schranken dafür kennen. Die letzteren ergeben sich so: Aus  $\tilde{x} \in \tilde{S}$  und (.5) folgt

$$\|\tilde{x} - x_1\| \leq \|\tilde{x} - \tilde{x}_1\| + \|\tilde{x}_1 - x_1\| \leq \frac{17}{10} \zeta.$$

Damit wird nach (5.13) mit (V2), (V3) und (V4)

$$\|\tilde{x} - x_2\| \leq \frac{5}{4} \left[ \frac{2}{21} + \frac{1}{5^2} \right] \left( \frac{17}{10} \right)^3 \zeta = \frac{348823}{350000} \cdot \frac{5}{6} \zeta < \frac{5}{6} \zeta.$$

Aus (3.8a) und (.6) ergibt sich unter Berücksichtigung von (V2)

$$(7.10) \quad \|f_n^{-1}\| \leq 2^{n-1} \|f_1^{-1}\| \leq 2^{n-1} \beta.$$

Hiermit und mit (V3), (V4) ergibt sich sukzessive aus (5.13) durch möglichst scharfe Abschätzung  $\|\tilde{x} - x_3\| < \zeta/3$  und  $\|\tilde{x} - x_4\| < 5\zeta/32$ . Der Induktionsschritt verläuft analog zu dem Früheren. Ebenso

(B7). Wir zeigen nur (3.28) mit (.3), woraus sich dann mit (5.14) die Behauptung ergibt. Aus (.8) folgt mit (V5) bzw. (V5) und Beachtung von  $\zeta_n \leq \zeta$

$$\begin{aligned} \|F_n\| &\leq \frac{25}{16} M_2 \left[ \frac{5}{4} \cdot \frac{M_3}{M_2} \zeta_{n-1} + (\beta_{n-1} M_2 \zeta_{n-1}) \right] \zeta_{n-1} \leq \\ &\leq \frac{25}{16} M_2 \left[ \frac{5}{4} \cdot \frac{12}{25} + \frac{1}{5} \right] \zeta_{n-1}^2 = \frac{5}{4} M_2 \zeta_{n-1}^2 \end{aligned}$$

und

$$\eta_n = \frac{5}{2} \beta_n M_2 \zeta_n \leq \frac{5}{2} \beta_n^2 \|F_n\| M_2 \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} M_2 \zeta_{n-1}^2 \left( \frac{\beta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \right)^2 M_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{n-1}}{1 - \eta_{n-1}} \right)^2.$$

## 8. BEISPIELE

Wir illustrieren die neuen Ergebnisse über das Verfahren der tangierenden Hyperbeln (HV) an einigen Beispielen. Dabei beschränken wir uns auf die Anwendung des Standardsatzes auf eine einfache gewöhnliche Gleichung und eine nichtlineare Integralgleichung vom Hammerstein-Typ sowie auf ein einfaches Matrix-Eigen-

wertproblem. Diese Beispiele sind keineswegs als numerisch besonders günstige „Außenseiter“ ausgewählt worden, sondern lediglich im Hinblick auf eine einfache und übersichtliche Handhabung im vorliegenden Zusammenhang. Es kann im Rahmen des vorliegenden Artikels nicht darum gehen, umfangreichere Anwendungen des besprochenen Verfahrens auf konkrete Operatorgleichungen der Analysis – etwa auf Differential- und Integralgleichungen komplizierter Bauart – einzugehen. Es sei lediglich noch bemerkt, daß HV nur zur Lösung solcher Operatorgleichungen  $F(x) = \theta$  sinnvoll angewandt werden kann, bei denen sich die zweite Ableitung (neben der ersten) des Operators  $F$  leicht bilden läßt. Das ist bei den vorliegenden Beispielen der Fall.

Beispiel 1.  $F(x) := x^3 - 10 = 0$ .  $X := \mathbf{R}$ . In Abschnitt 1 hatten wir schon die Wahl  $x_0 := 2$  begründet. Man erhält

$$\zeta = \frac{|F(x_0)|}{|F'(x_0)|} = \frac{1}{6}; \quad \beta = \frac{1}{|F''(x_0)|} = \frac{1}{12}; \quad S := \{x \in \mathbf{R} \mid 1,73 \leq x \leq 2,27\};$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,27 = 6,81; \quad M_3 = 1; \quad \beta M_2 \zeta = 0,0946 < \frac{1}{3 \cdot 2!};$$

$$\beta M_3 \zeta^2 = \frac{1}{12 \cdot 6^2} < \frac{1}{3 \cdot 3!}; \quad \frac{M_3}{M_2} \zeta = \frac{1}{6 \cdot 6,81} < \frac{1}{2}.$$

Demnach sind die Bedingungen (V1)–(V4) von Satz 3 erfüllt. Also existiert nach diesem Satz im Intervall  $1,73 \leq x \leq 2,27$  genau eine Lösung der Gleichung  $x^3 = 0$  und HV konvergiert mit  $x_0 = 2$  von der Ordnung drei gegen diese Lösung  $x^*$ . Die neuen Schranken für den Abstand der so errechneten Näherung  $x_2$  von  $x^*$  werden in Tab. 2 bekannten Schranken und dem tatsächlichen Fehler gegenübergestellt.

Bemerkungen zu Tab. 2. 1. Bezüglich der angeführten Schranken vergleiche man auch die Diskussion in Abschn. 4.

2. Im Gegensatz zu den in der vorliegenden Arbeit angegebenen Sätzen ist der zugrunde zu legende Bereich bei Collatz durch die Ausgangsnäherung  $x_0$  allein noch nicht festgelegt, sondern muß seinerseits passend gewählt werden. Für den angegebenen Schrankenwert 461 ist das Intervall  $I := \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 2,17\} \subset S$  so gewählt worden, daß die Schranke kleinstmöglich wurde. Ähnliches gilt für die meisten anderen Autoren. Bei Ulm muß man z.B. außer dem Bereich auch noch einen gewissen in den Schranken auftretenden Parameter geeignet wählen. Auch diese Wahl ist hier so getroffen worden, daß die angegebene Schranke kleinstmöglich ist.

3. Altman, Grebenjuk und Šafiev führen den Beweis der in der Tabelle erwähnten Sätze mit der Majorantenmethode, die in Abschn. 4 kurz erläutert wurde. Danach ist die Schranke gleich dem Fehler des entsprechenden ebenfalls nach HV berechneten

Näherungswertes für eine Lösung einer gewissen zugeordneten eindimensionalen reellen Gleichung. Diesen Fehler könnte man nun seinerseits mit Hilfe von Satz 3 abschätzen, was aber allenfalls bei *Operatorgleichungen* sinnvoll ist. Dieser Tatbestand ist in Tab. 2 mit „nicht direkt anwendbar“ gemeint.

Tab. 2. Vergleich verschiedener oberer Schranken für den Fehler des nach HV berechneten Näherungswertes  $x_2$  der in  $1,73 \leq x \leq 2,27$  liegenden eindeutigen Lösung  $x^* \doteq 2,15443\ 46900\ 319$  von  $F(x) := x^3 - 10 = 0$  mit  $x_0 := 2$

Autor	Lit. — Quelle	$10^{11} x^* - x_2  \leq$
Altman	[3]	nicht direkt anwendbar
Belázs und Jankó	[4], Satz 1	1 970 000
Collatz	[7]	461
Grebenjuk	[14]	nicht direkt anwendbar
Jankó	[22]	Voraus. nicht erfüllt
Kaazik	[28], Satz 1 ( $A_0 := 3$ )	1 310
Mertvecova	[40]	1 970 000
Merz	[41], Satz 5.2	15 200
Mirakov	[43], Satz 1 ( $H(g, h) := 1/5\eta$ )	1 380
Šafiev	[48], Satz 3	nicht direkt anwendbar
Shafiyev	[58], Satz 1	1 270
Ulm	[62], Satz 2 ( $a := 0,29$ , kleinstmöglich)	2 010
Döring	(5.1a)	60 000
	(5.1b)	9,98
	(5.1c) mit (B7)	7,40
wirklicher Fehler	$ x^* - x_2  \doteq$	2,93

Beispiel 2. Eine einfache nichtlineare Integralgleichung vom Hammerstein-Typ:

$$(8.1) \quad x(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos x(t) dt = s.$$

Der Operator  $F$  und seine ersten beiden Fréchet-Ableitungen lauten:

$$(Fx)(s) := x(s) - s + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos x(t) dt,$$

$$[F'(x)z](s) = z(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 s \sin x(t) z(t) dt,$$

$$[F''(x)z_1z_2](s) = -\frac{1}{2} \int_0^1 s \cos x(t) z_1(t) z_2(t) dt.$$

Wir erhalten für HV folgende *lineare* Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art für die Korrekturen  $d_n(s)$

$$(8.2) \quad c_n(s) - \frac{s}{2} \int_0^1 \sin x_n(t) c_n(t) dt = g_n(s),$$

$$d_n(s) - \frac{s}{2} \int_0^1 \left[ \sin x_n(t) + \frac{1}{2} c_n(t) \cos x_n(t) \right] d_n(t) dt = g_n(s)$$

wobei die rechten Seiten jeweils bekannt sind:

$$g_n(s) := -x_n(s) + s - \frac{s}{2} \int_0^1 \cos x_n(t) dt.$$

Das Verfahren der tangierenden Hyperbeln besteht hier darin, bei jedem Iterationsschritt dieses Paar von linearen Integralgleichungen einmal zu lösen. Die neuen Näherungen berechnen sich jeweils zu  $x_{n+1}(s) := x_n(s) + d_n(s)$ . Dabei ist es naheliegend, die rechte Seite der gegebenen Integralgleichung als Ausgangsnäherung zu wählen:  $x_0(s) := s$ . Dann sind die Lösungen der beiden Integralgleichungen (.2) ebenfalls Geraden durch den Ursprung, d.h. für alle  $n \in N_0$  gilt

$$\tilde{x}_n(s) = \tilde{\xi}_n s \quad \text{und} \quad x_n(s) = \xi_n s.$$

(Es sei daran erinnert, daß  $\tilde{x}_{n+1}(s) := x_n(s) + c_n(s)$  gesetzt worden war.) Der Koeffizient  $\xi_n$  bestimmt sich im Falle der vorliegenden Integralgleichungen (.2) einfach aus folgenden Rekursionsformeln ( $\forall n \in N, \xi_0 := 1$ )

$$(8.3) \quad \tilde{\xi}_{n+1} := \xi_n + \frac{Z_n}{N_n},$$

$$\xi_{n+1} := \tilde{\xi}_{n+1} + \frac{P_n}{N_n - P_n} (\tilde{\xi}_{n+1} - \xi_n)$$

wobei

$$Z_n := 1 - \xi_n - \frac{\sin \xi_n}{2\xi_n}; \quad N_n := 1 - \frac{1}{2\xi_n^2} (\sin \xi_n - \xi_n \cos \xi_n);$$

$$P_n := -\frac{1}{4\xi_n^3} (\tilde{\xi}_{n+1} - \xi_n) [2\xi_n \cos \xi_n - (2 - \xi_n^2) \sin \xi_n].$$

Die Rechnung ergibt die in Tab. 3 zusammengestellten Zahlenwerte.

Wir wenden nun Satz 3 auf die Gleichung (8.1) an und schätzen den Fehler von  $x_2(s)$  ab.

Im Gegensatz zum ersten Beispiel ist bei einer nichtlinearen Integralgleichung nicht von vornherein klar, welchen Raum und welche Norm man bei deren Unter-

suchung nach dem gegebenen Satz zugrundelgt. Der Satz gilt unabhängig von dieser Wahl, doch ist unmittelbar ersichtlich, daß die Gültigkeit der Ungleichungen (V3) von der verwendeten Norm abhängt. Man wird also diese und den Raum  $X$  so wählen, daß die in (V3) auftretenden Produkte minimal werden. Das ist ein Problem

Tab. 3. Nach (8.3) berechnete Näherungswerte zu Beispiel 2

$n$	$\xi_n$
0	1,00000 00000 00000
1	0,52136 26915 34720
2	0,52243 66094 02055
3	0,52243 66093 99351
4	0,52243 66093 99351

für sich, auf das wir hier nicht eingehen. Aus Gründen der praktischen Durchführbarkeit kommen jedoch im wesentlichen nur zwei Kombinationen in Frage: In erster Linie der Raum  $C$  der stetigen Funktionen mit der Maximum-Norm und an zweiter Stelle der Raum  $L_2$  der quadratisch integrierbaren Funktionen mit der „ $L_2$ “-Norm. Wir beginnen mit

$X := C[0, 1]$ . (V1) ist erfüllt. Wir erhalten (bzgl. der Normen der Integraloperatoren s.z.B. Kantorowitsch und Akilow [34], S. 90–92 und S. 544/5):

$$\begin{aligned} \zeta &= \|\tilde{x}_1 - x_0\| = \max_{0 \leq s \leq 1} |\tilde{\xi}_1 s - \xi_0 s| = |\tilde{\xi}_1 - \xi_0| \doteq 0,495 \Rightarrow S := \\ &= \left\{ x \in C[0, 1] \mid \|x - x_0\| < \frac{4}{5} \right\}, \end{aligned}$$

$$\|F''(x)\| = \max_s \frac{s}{2} \int_0^1 |\cos x(t)| dt < \frac{1}{2} =: 2M_2 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{4},$$

$$\|F'''(x)\| = \max_s \frac{s}{2} \int_0^1 |\sin x(t)| dt < \frac{1}{2} =: M_3 \cdot 3! \Rightarrow M_3 = \frac{1}{12},$$

$\exists f_0^{-1}$ ? Wir bezeichnen den Integraloperator mit dem Kern  $\frac{1}{2}s \sin x(t)$  mit  $K'_x$ :

$$[K'_x z](s) := \int_0^1 \frac{s}{2} \sin x(t) \cdot z(t) dt.$$

Dann gilt

$$K'_x : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]; \quad F'(x) = I - K'_x;$$

$$\|K'_{x_0}\| = \max_s \frac{s}{2} \int_0^1 \sin t \, dt = \frac{1 - \cos 1}{2} \doteq 0,23 < 1.$$

Also folgt aus dem Banach-Lemma die Existenz der beschränkten Inversen  $f_0^{-1} = (I - K'_{x_0})^{-1}$  mit

$$\|f_0^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|K'_{x_0}\|} \doteq \frac{1}{1 - 0,23} \doteq 1,30 =: \beta.$$

Damit berechnet man

$$(V3): \beta M_2 \zeta \doteq 1,3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,495 \doteq 0,161 < \frac{1}{3 \cdot 2!}$$

$$\beta M_3 \zeta^2 \doteq 1,3 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,495^2 \doteq 0,0266 < \frac{1}{3 \cdot 3!}$$

$$(V4): \frac{M_3}{M_2} \zeta \doteq \frac{1/12}{1/4} \cdot 0,495 < \frac{1}{2}$$

Die Bedingungen (V1)–(V4) von Satz 3 sind also erfüllt. In dem schraffierten Bereich existiert also genau eine stetige Lösung  $x^*(s)$  von (.1), HV konvergiert von der Ordnung 3 ( $[F'(x)]^{-1} \leq \mu < 1 \forall x \in S$ ) gegen  $x^*(s)$ , und es gelten die in Tab. 4

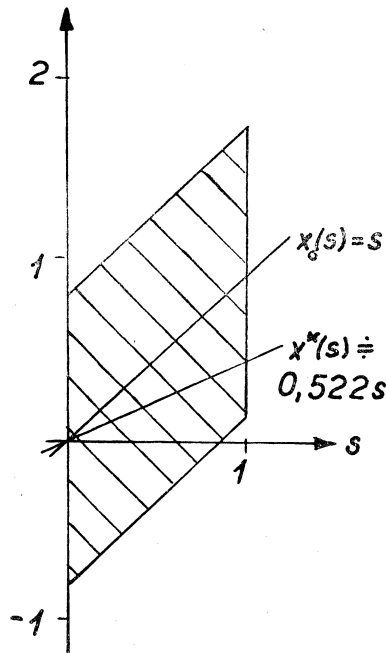


Abb. 2. Bereich, in dem die Ex. u. Eind. einer stet. Lsg. der Hammerstein-Gl.  $x(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos \cdot x(t) \, dt = s$  nach Satz 3 gesichert ist.



vergleichend zusammengestellten Fehlerschranken für den Abstand der Näherung  $x_2(s)$  von  $x^*(s)$  im Intervall  $0 \leq s \leq 1$ .

$X := L_2(0, 1)$ . (V1) ist erfüllt. Man erhält

$$\zeta = \|\tilde{x}_1 - x_0\| = \sqrt{\left(\int_0^1 (0,495 \cdot t)^2 dt\right)} = \frac{0,495}{\sqrt{3}} \doteq$$

$$\doteq 0,286 \Rightarrow S := \{x \in L_2(0, 1) \mid \|x - x_0\| \leq 0,458\}.$$

$$\|F''(x)\| \leq \sqrt{\left(\max_s \frac{s}{2} \int_0^1 |\cos x(t)| dt\right)} < \frac{1}{\sqrt{2}} =: 2! \cdot M_2,$$

$$\forall x \in S \Rightarrow M_2 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \doteq 0,354.$$

Tab. 4. Vergleich verschiedener oberer Schranken für den Fehler der nach HV berechneten Näherung  $x_2(s)$  zur eindeutigen Lösung  $x^*(s) \doteq 0,52243\ 66093\ 99\text{-s}$  der Hammersteinschen Integralgleichung.

$$s = x(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cdot \cos x(t) dt \quad \text{mit} \quad x_0(s) := s.$$

Autor	Lit.-Quelle	$10^{11} \ x^* - x_2\  \leq$	Raum
Altman	[3]	1 310 000 000	C[0, 1]
Belázs und Jankó	[4], Satz 1	580 000 000	
Collatz	[7]	8 280 000	
Grebenjuk	[14]	97 000 000	
Jankó	[22]	10 300 000 000	
Kaazik	[28], Satz 1 ( $A_0 := 0,945$ )	60 000 000	
Mertvecova	[40]	580 000 000	
Mirakov	[43], Satz 1 (Bereich wie bei Collatz)	2 290 000	
Šafiev	[48], Satz 3	Voraus. nicht erfüllt	
Shafiyev	[58], Satz 1	460 000 000	
Ulm	[62], Satz 2 ( $a := 1,25$ kleinstmöglich)	54 000 000	
Döring	(5.1a)	82 500 000	
	(5.1b)	91,3	
	(5.1c) mit (B7)	32,9	
wirklicher Fehler	$\ x^* - x_2\  \doteq$	2,7	
Döring	(5.1c) mit (B7)	10	$L_2(0, 1)$
wirklicher Fehler	$\ x^* - x_2\  \doteq$	1,6	

Entsprechend  $\|F'''(x)\| < 1/\sqrt{2} =: 3! \cdot M_3 \Rightarrow M_3 = (6 \cdot \sqrt{2}) \doteq 0,118$

$\exists f_0^{-1}$ ? Es ist  $K'_{x_0}: L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$  und

$$\begin{aligned} \|K'_{x_0}\| &\leq \sqrt{\left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{s}{2} \sin t\right)^2 ds dt\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{3} \int_0^1 \sin^2 t dt\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{3} (2 - \sin 2)\right)} \doteq 0,151 < 1. \end{aligned}$$

Damit sichert das Banach-Lemma die Existenz der beschränkten Inversen

$$f_0^{-1} = (I - K'_{x_0})^{-1} \quad \text{mit} \quad \|f_0^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|K'_{x_0}\|} \leq \frac{1}{1 - 0,151} \doteq 1,178 =: \beta.$$

(V1)–(V4) sind erfüllt, d.h. unter den Funktionen  $x(s)$ , deren Integralmittel  $\sqrt{(\int_0^1 |x(t) - t|^2 dt)} \leq 0,458$  beträgt, gibt es genau eine quadratisch Lebesgue-integrierte Funktion  $x^*(s)$ , die Lösung von (.1) ist, HV konvergiert von der Ordnung 3 gegen  $x^*(s)$ , und der (Integral-Mittel-) Abstand der Näherung  $x_2(s)$  von  $x^*(s)$  im Intervall  $0 \leq s \leq 1$  ist kleiner als die in Tab. 4 aufgeführte Schranke.

Bemerkungen zu Tab. 4. 1. Prinzipiell gelten hier die Bemerkungen zu Tab. 2 ebenfalls. Für die Schranken von Collatz u.a. ist der Bereich so gewählt worden, daß diese Schranken kleinstmöglich wurden.

2. Das Verhältnis der besten Schranke zum wirklichen Fehler ist im Raum  $L_2$  nur halb so groß wie im Raum  $C$ . Auch die Voraussetzungen (V3) sind in  $L_2$  besser erfüllt als im Raum  $C$ : Hier ist  $\beta M_2 \zeta = 0,161$  während  $\beta M_2 \zeta = 0,12$  für den  $L_2$  gilt.

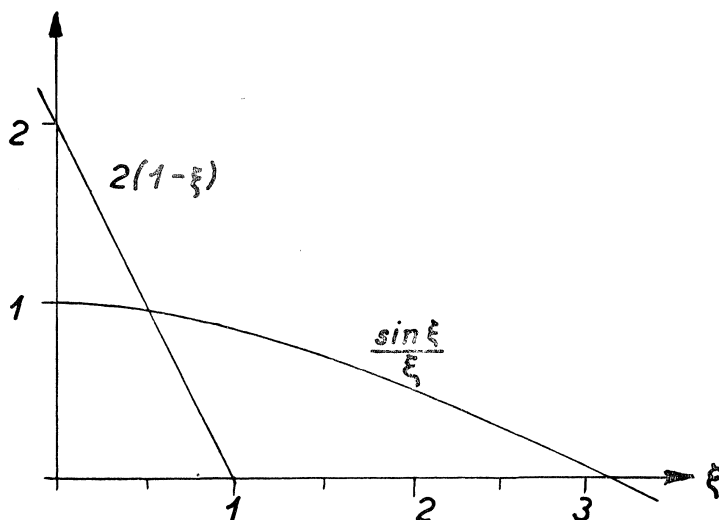


Abb. 3. Zur Lösung der Gleichung  $2(1 - \xi) = (\sin \xi)/\xi$ .

Dieser Vorzug des Raumes  $L_2$  ist z.B. auch von Kantorovich [33] festgestellt worden (vergl. die dortigen Beispiele zum Newton-Verfahren).

Abschließend sei zu Beispiel 2 noch bemerkt, daß sich die Lösung der gegebenen Integralgleichung im vorliegenden Falle auch leicht exakt gewinnen läßt:  $x^*(s) = \xi^* s$ , wobei  $\xi^*$  als einzige Lösung der transzendenten Gleichung

$$2(1 - \xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

bestimmt werden kann. (vergl. Abb. 3).

Beispiel 3. Ein von Collatz [7] betrachtetes einfaches, ebenfalls leicht exakt lösbares Matrix-Eigenwert-Problem:

$$(8.4) \quad Ay = \lambda By, \quad \text{wo} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tab. 5. Nach HV berechnete Näherungswerte zu Beispiel 3.

$n$	$x_n$
0	$\begin{pmatrix} -0,59 \\ 1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} -0,55827 \ 77262 \ 05428 \\ 1 \\ 0,73620 \ 37896 \ 57620 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -0,55825 \ 75694 \ 95594 \\ 1 \\ 0,73623 \ 73841 \ 74010 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -0,55825 \ 75694 \ 95584 \\ 1 \\ 0,73623 \ 73841 \ 74027 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -0,55825 \ 75694 \ 95584 \\ 1 \\ 0,73623 \ 73841 \ 74027 \end{pmatrix}$

Man faßt hierbei nach Unger [63] die Kombinationen aus Eigenvektor und Eigenwert

$$x := \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

als Elemente des zugrunde zu legenden Banach-Raumes  $X$  auf mit der Norm  $\|x\| := \max(|\eta_i|, |\lambda|)$ . (Eine Verwechslung der Komponenten von  $y$  mit den in den Sätzen 1, 2, 3 und 5 benutzten Zahlen  $\eta_n$  ist nicht zu befürchten.) Der Operator  $F$  wird durch die Differenz der beiden Seiten der Matrixgleichung (4) und einer Normierungsbedingung für den Eigenvektor gebildet:

$$F(x) := \begin{pmatrix} Ay - \lambda By \\ s(x) - 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Collatz wählen wir  $s(x) := \eta_2$  und als Matrix-Norm das Maximum der Zeilen-

Tab. 6. Vergleich verschiedener oberer Schranken für den Fehler der nach HV berechneten Näherung  $x_2$  für die in  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - x_0\| \leq 0,055\}$  eindeutige Lösung  $x^* \doteq \begin{pmatrix} -0,55825 \ 75694 \ 95584 \\ 1 \\ 0,73623 \ 73841 \ 74027 \end{pmatrix}$

der Matrix-Eigenwert-Aufgabe  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} y$  mit  $x_0 := \begin{pmatrix} -0,59 \\ 1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$ .

Autor	Lit. — Quelle	$10^{14} \ x^* - x_2\  \leq$
Altman	[3]	Vorauss. nicht erfüllt
Belázs und Jankó	[4], Satz 1	1 990 000 000
Collatz	[7]	Vorauss. nicht erfüllt
Grebenjuk	[14]	61 500 000
Jankó	[22]	Vorauss. nicht erfüllt
Kaazik	[28], Satz 1 ( $H_0 := 1$ )	36 900 000 000
Mertvecova	[40]	75 000 000 000
Mirakov	[43], Satz 1 ( $\ G_x\ $ abgeschätzt über $S$ )	50 000 000
Šafiev	[48], Satz 3	Vorauss. nicht erfüllt
Shafiyev	[58], Satz 1	204 000
Ulm	[62], Satz 2 ( $a := 0$ )	170 000 000
Döring	(5.1a)	252 000 000
	(5.1b)	35,1
	(5.1c) mit (B7)	22,7
wirklicher Fehler	$\ x^* - x_2\  \doteq$	1,61

betragssummen. Die ersten beiden Fréchet-Ableitungen lauten mit ihren Argumenten:

$$F'(x_0) x = \begin{pmatrix} Ay - \lambda B y_0 - \lambda_0 B y \\ \eta_2 \end{pmatrix}; \quad F''(x_0) x_1 x_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 B y_2 - \lambda_2 B y_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Verfahren der tangierenden Hyperbeln besteht also hier darin, bei jedem Iterationsschritt ein Paar von Gleichungssystemen einmal zu lösen.

Da die zweite Fréchet-Ableitung ein konstanter bilinearer Operator und somit die dritte Ableitung der Nulloperator ist, vereinfacht sich im Falle eines (beliebigen endlichdimensionalen) Matrix-Eigenwert-Problems der vorliegenden Gestalt die a-posteriori-Schranke (5.1c) mit (B7) zu ((V4) ist hier stets erfüllt!)

$$(8.5) \quad \|x^* - x_n\| \leq \alpha_n \beta_n M_2 \|d_{n-1}\| \|d_{n-1} - c_{n-1}\|, \quad \forall n \in N.$$

Mit  $x_0 := \begin{pmatrix} -0,59 \\ 1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$  berechnet man die in Tab. 5 zusammengestellten Näherungswerte und  $\zeta \doteq 0,0351 \Rightarrow S := \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x - x_0\| \leq 0,055\}$ ;  $M_2 = 3$ ;  $M_3 = 0$ . Die Matrix  $f_0$  ist nicht singulär, also existiert  $f_0^{-1}$ , und es ist  $\beta = 1,543$ . Hiermit sind die Bedingungen (V3) und (V4) ebenfalls erfüllt. Also gelten die Behauptungen (B1)–(B7) von Satz 3 für (.4) bezüglich  $S$ .

Wir schätzen den Fehler von  $x_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$  ab. Die nach Satz 3 berechneten Schranken für diesen Fehler sind in Tab. 6 aufgeführt. Daneben sind – wie bei den anderen Beispielen – die nach den Sätzen anderer Autoren ermittelten Zahlenwerte für deren Fehlerschranken und der tatsächliche Fehler angegeben.

Die Bemerkungen zu Tab. 2 gelten prinzipiell auch für Tab. 6.

#### Literatur

- [1] Altman, M.: Iterative methods of higher order. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961), 63–68.
- [2] Altman, M.: Extension and stability of certain iterative methods for solving non-linear functional equations in Banach spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961), 267–271.
- [3] Altman, M.: Concerning the method of tangent hyperbolas for operator equations. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961), 633–637.
- [4] Balázs, M. und B. Jankó: Über die Lösung von nichtlinearen Operatorgleichungen nach der Methode der tangierenden Hyperbeln. (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Bucureşti) 20 (1968), 809–817.
- [5] Bartisch, M. Ja.: Über gewisse Iterationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen. (Russ.) Ukrainskij Mat. Ž. 20 (1968), 104–113.
- [6] Bodewig, E.: On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation. Quart. Appl. Math. 7 (1949), 325–333.

- [7] Collatz, L.: Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen. Arch. Rat. Mech. Anal. 2 (1958/1959), 66—75.
- [8] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Springer Berlin 1964.
- [9] Dieudonné, J.: Foundations of modern analysis. Academic Press New York 1960.
- [10] Döring, B.: A higher order iterative method for the solution of nonlinear operator equations. In: Ghizzetti, A. (Ed.): Theory and Applications of Monotone Operators. Proc. of a NATO Advanced Study Institute held in Venice, Italy, June 17—30, 1968. Gubbio 1968, pp. 291—298.
- [11] Döring, B.: Über das Newtonsche Näherungsverfahren. Math.-Phys. Sem.-Ber. 16 (1969), 27—40.
- [12] Dubovik, L. I.: Allgemeine Gestalt eines Iterationsverfahrens dritter Ordnung für nicht-lineare Funktionalgleichungen. (Russ.) In: Erste Republ. Math. Konf. junger Forscher. Teil I. (Russ.) AN Ukrain. SSR Inst. Mat., Kiev 1965, pp. 219—225.
- [13] Ehrmann, H.: Konstruktion und Durchführung von Iterationsverfahren höherer Ordnung. Arch. Rat. Mech. Anal. 4 (1959/1960), 65—88.
- [14] Grebenjuk, V. S.: Anwendung der Majorantenmethode auf eine Klasse von Iterationsverfahren (Russ.) Ukrainiskij Mat. Ž. 18 (1966), no. 4, 102—106.
- [15] Jankó, B.: Sur l'analogie de la méthode de Tchebycheff et de la méthode des hyperboles tangentes. Mathematica (Cluj) 2(25) (1960), 269—275.
- [16] Jankó, B.: Sur la théorie unitaire des méthodes d'itération pour la résolution des équations opérationnelles non-linéaires, I. Math. Inst. Hung. Acad. Soc. A6 (1961), 301—311.
- [17] Jankó, B.: Sur les méthodes d'itération appliqués dans l'espace de Banach pour la résolution des équations fonctionnelles non-linéaires. Mathematica (Cluj) 4(27) (1962), 261—266.
- [18] Jankó, B.: Über die verallgemeinerte Methode der tangierenden Hyperbeln. (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Cluj) 13 (1962), 301—308.
- [19] Jankó, B.: Über ein allgemeines Iterationsverfahren der Ordnung  $k$ . (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Cluj) 14 (1963), 63—71.
- [20] Jankó, B.: Sur une nouvelle généralisation de la méthode des hyperboles tangentes pour la résolution des équations fonctionnelles non-linéaires définies dans l'espace de Banach. Ann. Polon. Math. 12 (1963), 279—288.
- [21] Jankó, B.: Über die Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen nach der verallgemeinerten Methode der tangierenden Hyperbeln (I). (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (Cluj) 14 (1963), 265—271.
- [22] Jankó, B.: Sur la résolution des équations opérationnelles non-linéaires. Mathematica (Cluj) 7(30) (1965), 257—262.
- [23] Jankó, B.: Rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare în spații Banach. Editura Acad. Republ. Soc. România. București 1969.
- [24] Jankó, B. und M. Balázs: Über die Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen nach der verallgemeinerten Methode der tangierenden Hyperbeln (II). (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (București) 18 (1966), 817—828.
- [25] Jankó, B., Fornwald, F. und A. Gaidici: Über die Lösung von nichtlinearen Funktionalgleichungen. (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (București) 21 (1969), 611—616.
- [26] Jankó, B. und V. Pop: Über die Methode der tangierenden Hyperbeln zur Lösung von nichtlinearen Operatorgleichungen. (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (București) 18 (1966), 1147—1153.
- [27] Jankó, B. und V. Pop: Über die Lösung von Operatorgleichungen in metrischen Räumen nach von der Ordnung  $k$  konvergenten Iterationsverfahren. (Rumän.) Stud. Cerc. Mat. Acad. Republ. Pop. Romine (București) 19 (1967), 1155—1158.
- [28] Kaazik, Yu. Ya.: Über eine Klasse von Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung von Operatorgleichungen. (Russ.) DAN SSSR 112 (1957), 579—582.

- [29] *Kaazik, Yu. Ya.*: On the approximate solution of nonlinear operator equations by iterative methods. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)* 12 (1957), no. 1 (73) 195—199 (Russ.). Engl. Übersetzung in: *AMS Transl. Ser. 2*, 16 (1960), 410—413.
- [30] *Kaazik, Yu. Ya.*: Über die Konvergenz von Iterationsverfahren. (Russ.) *Tartu Riikl. Ülik. Toimetised Ser. Mat. Nauk.* 62 (1958), 80—98.
- [31] *Kaazik, Yu. Ya.* und *A. V. Jygi*: Die Konvergenz von Iterationsverfahren im Falle nicht-analytischer Operatoren. (Russ.) *Učen. Zap. Tartusk. GU* 73 (1959), 130—136.
- [32] *Kačurovskij, R. L.*: Nonlinear monotone operators in Banach spaces. (Russ.) *Uspehi Mat. Nauk* 13, 2 (140) (1968), 121—168.  
Engl. Übersetzung in: *Russian Mathematical Surveys* 23 (1968), No. 2, Cleaver-Hume Press, London.
- [33] *Kantorovich, L. V.*: Functional analysis and applied mathematics. (Russ.) *Uspehi Mat. Nauk* 3 (1948) 6, 89—185. Transl. from Russ. by C. D. Benster, NBS Washington 1952. Editor: G. E. Forsythe.
- [34] *Kantorowitsch, L. W.* und *G. P. Akilow*: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin 1964 (russ. Original: Fizmatgiz Moskva 1959).
- [35] *Kivistik, L. A.*: Über eine Klasse von Iterationsverfahren in Hilberträumen. (Russ.) *Tartu Riikl. Ülik. Toimetised* No. 129 (1962), 365—381.
- [36] *Lang, S.*: Analysis I, II. Addison-Wesley, Reading/Mass. 1969.
- [37] *Lika, D. K.*: Ein Iterationsverfahren für nichtlineare Funktionalgleichungen. (Russ.) *Stud. Algebra Math. Anal. (Russ.)* S. 134—139. Izdat. „Karta Moldovenjaske“, Kishinev 1965.
- [38] *Lika, D. K.*: Das Majorantenprinzip bei gewissen Iterationsverfahren. (Russ.) *Mat. Issled.* 2 (1967), vyp. 1, 26—44.
- [39] *Ludwig, R.*: Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. *ZAMM* 34 (1954), 210—225 und 404—416.
- [40] *Mertvecova, M. A.*: Ein Analogon der Methode der tangierenden Hyperbeln. (Russ.) *DAN SSSR* 88 (1953), 611—614.
- [41] *Merz, G.*: Padésche Näherungsbrüche und Iterationsverfahren höherer Ordnung. *Computing* 3 (1968), 165—183.
- [42] *Michal, A. D.*: Le calcul différentiel dans les espaces de Banach. Vol. I. Fonctions analytiques-Équations intégrales. Paris 1958.
- [43] *Mirakov, V. E.*: Über die Konvergenz der Methode der tangierenden Hyperbeln für nicht-lineare Funktionalgleichungen unter Bedingungen vom Cauchyschen Typ. (Russ.) *Trudy Moskovsk. Inst. Fiz.-Techn.* 1 (1958), 204—213.
- [44] *Moore, R. H.*: Newton's method and variations. In: Anselone, P. M. (Ed.): *Nonlinear integral equations*. The University of Wisconsin Press, Madison 1964, pp. 65—98.
- [45] *Petry, W.*: Eine Verallgemeinerung des Newtonschen Iterationsverfahrens. Erscheint in *Kürze* in *Computing*.
- [46] *Pugachev, E. P.*: Notes on the proofs of certain iterative processes. (Russ.) *Ž. Vyč. Mat. u. Mat. Fiz.* 2 (1963) vyp. 5, 912—915. Übersetzung ins Englische in: *USSR Comp. Math. Math. Phys.* 2 (1963), 1059—1064.
- [47] *Rjabčenko, N. M.*: Die Konvergenz eines Iterationsverfahrens höherer Ordnung. (Russ.). In: *Erste Republ. Math. Konf. junger Forscher. Teil I.* (Russ.) *AN Ukrain. SSR Inst. Mat.*, Kiev 1965, pp. 580—587.
- [48] *Šafiev, R. A.*: The method of tangent hyperbolas. (Russ.) *DAN SSSR* 149 (1963), 788—791. Engl. Übersetzung: *Sov. Math. Dokl.* 4 (1963), 482—485.
- [49] *Šafiev, R. A.*: Eine Modifikation der Methode der tangierenden Hyperbeln. (Russ.) *AN Azerbaidžan. SSR Dokl.* 19 (1963), 3—8.

- [50] Šafiev, R. A.: Gewisse Iterationsverfahren zur Lösung von Funktionalgleichungen. (Russ.) Funktional-Anal. gewisse Probl. Theorie Dgl. und Funktionentheorie. (Russ.) S. 173–179. Izdat. AN Azerbaidžan SSR, Baku 1967.
- [51] Salehov, G. S.: Über die Konvergenz der Methode der tangierenden Hyperbeln. DAN SSSR 82 (1952), 525–528.
- [52] Schmidt, J. W.: Ein Konvergenzsatz für Iterationsverfahren. Math. Nachr. 37 (1968), 67–82.
- [53] Schmidt, J. W.: Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banach-Räumen. ZAMM 43 (1963), 1–8 und 97–110.
- [54] Schröder, E.: Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. 2 (1870), 317–365.
- [55] Schröder, J.: Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. Math. Z. 66 (1956), 111–116.
- [56] Schröder, J.: Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung. Arch. Math. 7 (1956), 471–484.
- [57] Schröder, J.: Über das Newtonsche Verfahren. Arch. Rat. Mech. Anal. 1 (1957/1958), 154–180.
- [58] Šafiyev, R. A.: Certain iteration processes. (Russ.) Ž. Vyč. Mat. u. Mat. Fiz. 4 (1964) vyp. 1, 139–143. Engl. Übersetzung: USSR Comp. Math. Math. Phys. 4 (1964), No. 1, 187–193.
- [59] Šisler, M.: Approximative Formeln für den Fehler bei Iterationsverfahren höherer Ordnung. Apl. Mat. 12 (1967), 1–14.
- [60] Ting Ch'uan-sung: Globale Konvergenz der Methode der tangierenden Hyperbeln zur Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen. (Chines.) Shuxue Jinzhan 6 (1963), 352–359.
- [61] Traub, J. F.: Iterative methods for the solution of equations. Prentice-Hall 1964.
- [62] Ulm, S.: Über die Konvergenz gewisser Iterationsverfahren in Banach-Räumen. (Russ.) Učen. Zap. Tartusk. GU 42 (1956), 135–142.
- [63] Unger, H.: Nichtlineare Behandlung von Eigenwertaufgaben. ZAMM 30 (1950), 281–282.
- [64] Vainberg, M. M.: Variational methods in the study of nonlinear operators. Holden-Day. San Francisco 1964. (russ. Original Moskva 1956.)
- [65] Zajta, A.: Untersuchungen über die Verallgemeinerungen der Newton-Raphsonschen Wurzelapproximation. Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 15 (1956), 233–260 und 19 (1957), 25–60.

Souhrn

## NĚKOLIK VĚT O METODĚ TEČNÝCH HYPERBOL V BANACHOVÝCH PROSTORECH

BORO DÖRING

Dokazují se tři různá zobecnění Kantorovičovy věty o Newtonově metodě týkající se metody tečných hyperbol (iterační metoda třetího řádu pro přibližné řešení nelineárních operátorových rovnic v Banachových prostorech). Za stejných slabých podmínek je zaručena existence a jednoznačnost řešení, konvergence, řádový odhad a odhad chyby. Získané odhady chyby jsou mnohem lepší než dosud známé, zejména v prostorech funkcí. Výsledky jsou ilustrovány příklady operátorových rovnic různého typu.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Boro Döring, Mathematisches Institut der Universität Düsseldorf, BRD.