Miloš Pavlík

Transformace náhodné veličiny s rozložením beta v důsledku zjemnění experimentální metody

Aplikace matematiky, Vol. 15 (1970), No. 2, 97–105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103273

TRANSFORMACE NÁHODNÉ VELIČINY S ROZLOŽENÍM BETA V DŮSLEDKU ZJEMNĚNÍ EXPERIMENTÁLNÍ METODY

MILOŠ PAVLÍK

(Došlo dne 23. července 1968)

ÚVOD

Definice elementárního jevu jakožto výsledku náhodného pokusu závisí na jemnosti, s jakou se rozlišují jednotlivé výsledky, resp. na charakteru použité experimentální metody. V mnoha vědních oborech se např. používá metod kvalitativních a kvantitativních; obecně lze pokus kvalitativní (kvantitativní) považovat za zjednodušení (zjemnění) pokusu kvantitativního (kvalitativního). Uvažme např. kvalitativní pokus s množinou $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}\}$ elementárních jevů; lze-li jev $\mathbf{e}$ definovat jako spočetnou množinu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \ldots\}$ jevů, pak je možno pokus zjemnit tak, že za množinu elementárních jevů budeme považovat $\mathbf{E}^* = \{\bar{\mathbf{e}}\} \cup \mathbf{e} = \{\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2. \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \ldots\}$. Na $\mathbf{E}$ lze definovat náhodnou veličinu Y s alternativním rozložením; definujeme-li pak na $\mathbf{E}^*$ náhodnou veličinu X tak, že $X(\bar{\mathbf{e}}) = 0$, $X(\mathbf{e}_x) = x$, převedli jsme pokus kvalitativní v kvantitativní se spočetnou množinou elementárních jevů. Takováto dvojice experimentálních postupů je obvyklá např. v mikrobiologii při důkazu resp. stanovení počtu mikrobů nějaké skupiny v daném vzorku vyšetřovaného materiálu.

Parametr rozložení Y může ovšem být rovněž náhodně proměnný. Je-li tomu tak, pak jsou náhodně proměnné i parametry rozložení X. Experimentální výsledky vedou v některých případech k domněnce, že má parametr rozložení Y rozložení beta [1]; jelikož veličina X má v řadě konkrétních aplikací rozložení Poissonovo, vyvstává otázka, jaké rozložení má za daného předpokladu parametr Poissonova rozložení X resp. jaké má X rozložení marginální.

ROZLOŽENÍ NÁHODNÉ VELIČINY Λ

Buď F náhodný experiment, na kterém buď definována náhodná veličina X s Poissonovým rozložením o parametru λ. Pravděpodobnost q náhodného jevu $X > 0$

nechť je hodnotou náhodné veličiny Q, která nechť má rozložení beta o hustotě

$$\vartheta(q \mid r, s) = \begin{cases} 0, \; q \notin (0, 1) \\ [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \, q^{r-1}(1-q)^{s-1}, \; q \in (0, 1) \, ; \end{cases}$$

$$\left(s > 0, r > 0, \mathrm{B}(r, s) = \int_0^1 q^{r-1}(1-q)^{s-1} \, \mathrm{d}q\right). \tag{1}$$

Potom je parametr λ hodnotou náhodně proměnné veličiny $\Lambda = -\ln(1 - Q)$. Tato veličina má rozložení o hustotě

$$\omega(\lambda \mid r, s) = \begin{cases} 0, \; \lambda \leqq 0 \\ \vartheta(1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \mid r, s) \mid \mathrm{d}q/\mathrm{d}\lambda \mid = [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \, \mathrm{e}^{-\lambda s}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{r-1} = \end{cases} \tag{2}$$
$$= [s/(r + s)] \, \vartheta(\mathrm{e}^{-\lambda} \mid s + 1, r), \quad \lambda > 0$$

a distribuční funkci

$$\Omega(\lambda \mid r, s) = \int_0^\lambda [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \, \mathrm{e}^{-\lambda s}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{r-1} \, \mathrm{d}\lambda = \tag{3}$$
$$= [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \int_{\exp(-\lambda)}^1 p^{s-1}(1-p)^{r-1} \, \mathrm{d}p = 1 - \mathrm{I}_{\exp(-\lambda)}(s, r) = \mathrm{I}_{1-\exp(-\lambda)}(r, s) \, ;$$

$$\mathrm{I}_x(a, b) = [\mathrm{B}(a, b)]^{-1} \, \mathrm{B}_x(a, b) = [\mathrm{B}(a, b)]^{-1} \int_0^x p^{a-1}(1-p)^{b-1} \, \mathrm{d}p \, .$$

Moment k-tého řádu $\mathsf{m}_k(\Lambda)$ je dán výrazem

$$\mathsf{m}_k(\Lambda) = [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \int_0^\infty \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda s}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{r-1} \, \mathrm{d}\lambda = \tag{4}$$
$$= [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \int_0^1 (-\ln p)^k \, p^{s-1}(1-p)^{r-1} \, \mathrm{d}p =$$
$$= (-1)^k \, [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \, \partial^k \mathrm{B}(r, s)/\partial s^k \, ,$$

takže pro střední hodnotu $\mathsf{E}\Lambda$ a rozptyl $\mathsf{D}\Lambda$ nabýváme vztahů

$$\mathsf{E}\Lambda = -[\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \, \partial \mathrm{B}(r, s)/\partial s \, , \tag{5}$$
$$\mathsf{D}\Lambda = [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \, \partial^2 \mathrm{B}(r, s)/\partial s^2 - \{[\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \, \partial \mathrm{B}(r, s)/\partial s\}^2 \, .$$

Zavedeme-li $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{z-1} \, \mathrm{d}x$, máme

$$\partial \mathrm{B}(r, s)/\partial s = \mathrm{B}(r, s) \, [\psi(s) - \psi(r + s)] \tag{*}$$

a tedy

$$\mathsf{E}\Lambda = \psi(r + s) - \psi(s) \, , \quad \mathsf{D}\Lambda = \psi'(s) - \psi'(r + s) \, . \tag{6}$$

Charakteristická funkce $\varphi_A(t)$ rozložení Λ je dána výrazem

$$(7) \qquad \varphi_A(t) = \int_0^\infty \omega(\lambda \mid r, s)\, e^{it\lambda}\, d\lambda = [B(r, s)]^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda(s-it)}(1 - e^{-\lambda})^{r-1}\, d\lambda = \\ = [B(r, s)]^{-1}\, B(s - it, r)\,.$$

Položme

$$(**) \qquad \zeta_A(t) = \ln \varphi_A(t) = \ln \Gamma(s - it) - \ln \Gamma(r + s - it) + C\,,$$

kde C není funkcí t. Zřejmě platí

$$(8) \qquad \zeta_A^{(k)}(t) = (-i)^k\, \partial^{k-1}[\psi(s - it) - \psi(r + s - it)]/\partial t^{k-1}\,.$$

Semiinvariant (kumulant) k-tého řádu $\varkappa_k(\Lambda)$ je tedy dán výrazem

$$(9) \qquad \varkappa_k(\Lambda) = (-1)^k\, [\psi^{(k-1)}(s) - \psi^{(k-1)}(r + s)]\,.$$

Je-li $r > 1$, má funkce $\omega(\lambda \mid r, s)$ v intervalu $(0, \infty)$ jedno maximum a to v bodu $\lambda_{\max} = \ln[(r + s - 1)/s]$; při $r < 1$ funkce monotónně klesá a v bodu $\lambda = 0$ má nespojitost 2. druhu tak, že $\omega(0 + 0 \mid r, s) = \infty$. Ve zvláštním případě $r = 1$ přechází rozložení Λ v exponenciální s parametrem s.

MARGINÁLNÍ ROZLOŽENÍ VELIČINY X.

Je-li parametr Λ rozložení X náhodně proměnná veličina s rozložením o hustotě (2), je na experimentu $\boldsymbol{F}$ definován dvojrozměrný náhodný vektor $\{X, \Lambda\}$, jehož rozložení má hustotu

$$(10) \qquad \lim_{\Delta\lambda \to 0} (\Delta\lambda^{-1})\, \mathsf{P}\{(X = x) \cap (\lambda \leqq \Lambda < \lambda + \Delta\lambda) \mid r, s\} = \\ = [x!\, B(r, s)]^{-1}\, e^{-\lambda(s+1)}(1 - e^{-\lambda})^{r-1}\, \lambda^x\,.$$

Marginální rozložení X má pravděpodobnostní funkci

$$(11) \qquad u(x \mid r, s) = \mathsf{P}\{X = x \mid r, s)\} = \\ = [x!\, B(r, s)]^{-1} \int_0^\infty e^{-\lambda(s+1)}(1 - e^{-\lambda})^{r-1}\, \lambda^x\, d\lambda = \\ = [x!\, B(r, s)]^{-1}\, (-1)^x\, \partial^x B(r, s + 1)/\partial s^x\,.$$

Rozvineme-li $B(r, s)$ jako funkci s do Taylorovy řady

$$(11a) \qquad B(r, s) = \sum_{x=0}^{\infty} (x!)^{-1}\, (s - a)^x\, [\partial^x B(r, s)/\partial s^x]_{s=a}\,,$$

rovná se hodnota $u(x \mid r, s)$ zřejmě poměru pravé strany v (11a) po formálním dosazení $a = s + 1$ k hodnotě $B(r, s)$. Marginální distribuční funkce je dána výrazem

$$(12) \qquad U(x \mid r, s) = B(r, s)^{-1} \sum_{n=0}^{x} (n!)^{-1} (-1)^n \partial^n B(r, s + 1)/\partial s^n .$$

Hodnoty $u(x \mid r, s)$ lze stanovit pomocí tabulek funkce $\psi(z)$ a jejích derivací [6]; položíme-li $f_{x+1} = \psi^{(x)}(s + 1) - \psi^{(x)}(r + s + 1)$, máme

$$(13a) \qquad u(0 \mid r, s) = (r + s)^{-1} s ,$$

$$(13b) \qquad u(1 \mid r, s) = -(r + s)^{-1} sf_1 ,$$

$$(13c) \qquad u(2 \mid r, s) = [2(r + s)]^{-1} s(f_1^2 + f_2) ,$$

$$(13d) \qquad u(3 \mid r, s) = -[3!(r + s)]^{-1} s(f_1^3 + 3f_1f_2 + f_3)$$

$$(13e) \qquad u(4 \mid r, s) = [4!(r + s)]^{-1} s(f_1^4 + 3f_2^2 + 4f_1f_3 + 6f_1^2f_2 + f_4) ,$$

$$(13f) \qquad u(5 \mid r, s) = -[5!(r + s)]^{-1} s(f_1^5 + 10f_1^3f_2 + 10f_1^2f_3 + \\ + 15f_1f_2^2 + 6f_1f_2 + 5f_1f_4 + 4f_2f_3 + f_5)$$

atd. Nechť $\varkappa_n$ (m_n) značí n-tý semiinvariant (moment) libovolného rozložení; pak platí, jak známo,

$$(***) \qquad \begin{aligned} m_1 &= \varkappa_1 \\ m_2 &= \varkappa_1^2 + \varkappa_2 \\ m_3 &= \varkappa_1^3 + 3\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3 \\ m_4 &= \varkappa_1^4 + 6\varkappa_1^2\varkappa_2 + 4\varkappa_1\varkappa_3 + 3\varkappa_2^2 + \varkappa_4 \\ m_5 &= \varkappa_1^5 + 10\varkappa_1^3\varkappa_2 + 10\varkappa_1^2\varkappa_3 + 15\varkappa_1\varkappa_2^2 + 6\varkappa_1\varkappa_2 + 5\varkappa_1\varkappa_4 + 4\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_5 . \end{aligned}$$

Označíme-li x-tý semiinvariant (moment) rozložení Λ s parametry $r, s + 1$ symbolem $\varkappa_x^*$ (m_x^*), je zřejmě $\varkappa_x^* = (-1)^x f_x$ a $u(x \mid r, s) = [x!(r + s)]^{-1} sm_x^*$.

Rozvineme-li výraz $(1 - e^{-\lambda})^{r-1}$ v integrálu v (11) do binomické řady, lze vyjádřit funkci $u(x \mid r, s)$ ve tvaru

$$(14) \qquad u(x \mid r, s) = [B(r, s)]^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r - 1}{h} (-1)^h (s + h + 1)^{-(x+1)} ;$$

tato řada je při větších x, kdy rychle konverguje, výhodnější k výpočtu $u(x \mid r, s)$ než vzorce (13), které opět s rostoucím x rychle nabývají na složitosti. K výpočtu $(h + 1)$-tého členu a_h řady (14) lze snadno odvodit rekurentní vzorec

$$(15) \qquad |a_h| = \left| a_{h-1} \left(\frac{s + h}{s + h + 1}\right)^{x+1} . \frac{r - h}{h} \right| .$$

Vzorce pro momenty marginálního rozložení X lze nejsnadněji odvodit pomocí semiinvariantů. Charakteristická funkce $\varphi_X(t)$ je dána výrazem

$$\varphi_X(t) = [B(r, s)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} (-1)^n \, \partial^n B(r, s+1)/\partial s^n \, . \, e^{itn} = \tag{16}$$

$$= [B(r, s)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} (-e^{it})^n \, \partial^n B(r, s+1)/\partial s^n =$$

$$= [B(r, s)]^{-1} \, B(r, s + 1 - e^{it}) \, ;$$

píšeme-li obdobně jako v (**) $\zeta_X(t) = \ln \varphi_X(t)$, máme

$$\zeta_X^{(n)}(t) = (-ie^{it})^n \, \partial^{n-1}[\psi(s + 1 - e^{it}) - \psi(r + s + 1 - e^{it})]/\partial t^{n-1} \, . \tag{17}$$

Položme $g_{x+1} = \psi^{(x)}(s) - \psi^{(x)}(r + s)$; semiinvarianty prvních 5 řádů jsou pak

$$\varkappa_1(X) = -g_1 \tag{18a}$$

$$\varkappa_2(X) = g_2 - g_1 \tag{18b}$$

$$\varkappa_3(X) = -g_3 + 3g_2 - g_1 \tag{18c}$$

$$\varkappa_4(X) = g_4 - 6g_3 + 7g_2 - g_1 \tag{18d}$$

$$\varkappa_5(X) = -g_5 + 10g_4 - 25g_3 + 15g_2 - g_1 \tag{18e}$$

Je tedy obecně n-tý semiinvariant $\varkappa_n(X)$ rozložení X dán výrazem

$$\varkappa_n(X) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \, b_{nj} g_j \, , \tag{19}$$

kde koeficient b_{nj} je dán součtem všech koeficientů při členech j-tého řádu v n-tém mnohočlenu v (***).

Střední hodnota $\mathsf{E}X$ a rozptyl $\mathsf{D}X$ jsou tedy dány výrazy

$$\mathsf{E}X = -g_1 = \psi(r + s) - \psi(s) \, , \tag{20}$$

$$\mathsf{D}X = g_2 - g_1 = \psi'(s) - \psi'(r + s) + \psi(r + s) - \psi(s) \, .$$

Průběh funkce $u(x \mid r, s)$ závisí na hodnotách parametrů obdobně jako průběh $\omega(\lambda \mid r, s)$ s odlišnostmi vyplývajícími z toho, že veličina X je diskrétní.

ODHAD PARAMETRŮ r A s Z EXPERIMENTÁLNÍCH DAT

Jestliže při n opakováních experimentu F nabude veličina X právě n_x-krát hodnoty x $(\sum n_x = n)$, je věrohodnostní funkce k odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti dána výrazem

$$L = \prod_{x=0}^{\infty} \{[x! B(r, s)]^{-1} (-1)^x \, \partial^x B(r, s + 1)/\partial s^x\}^{n_x} \, , \tag{21}$$

ze kterého pro odhady r a s vyplývá systém rovnic

$$(22a)\qquad \sum_{x=0}^{\infty} n_x \frac{\partial^{x+1}\mathrm{B}(r, s+1)/\partial s^{x+1}}{\partial^x \mathrm{B}(r, s+1)/\partial s^x} = [\mathrm{B}(r, s)]^{-1}\, n\, \partial\mathrm{B}(r, s)/\partial s\,,$$

$$(22b)\qquad \sum_{x=0}^{\infty} n_x \frac{\partial^{x+1}\mathrm{B}(r, s+1)/\partial s^x\, \partial r}{\partial^x \mathrm{B}(r, s+1)/\partial s^x} = [\mathrm{B}(r, s)]^{-1}\, n\, \partial\mathrm{B}(r, s)/\partial r\,.$$

Po úpravě máme

$$(22^*a)\qquad -\sum_{x=0}^{\infty} n_x (m_{x+1}^*/m_x^*) = n[\psi(s) - \psi(r+s)]\,,$$

$$(22^*b)\qquad \sum_{x=0}^{\infty} n_x (\partial m_x^*/m_x^*\, \partial r) = n\,.\,(r+s)^{-1}\,.$$

Použitím tabulek funkce $\psi(z)$ a jejích derivací [6] lze tento systém graficky řešit, postup však je dosti pracný, zvláště jestliže X nabývá větších hodnot. Mnohem jednodušší je metoda momentová; značí-li m resp. d výběrovou střední hodnotu resp. výběrový rozptyl X, lze podle (20) odhadnout parametry pomocí systému rovnic

$$(23a)\qquad m = \psi(r+s) - \psi(s)\,,$$

$$(23b)\qquad d - m = \psi'(s) - \psi'(r+s)\,.$$

Jelikož pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $\psi'(x) > 0$ a $\psi''(x) < 0$, je tato metoda použitelná jen při $d > m$. Systém (23) lze snadno řešit postupnou aproximací na grafech funkcí ψ a ψ'. Má-li empirická frekvenční křivka průběh přibližně monotónní nebo s jedním výrazným maximem v bodu $x_{\max}$, lze pro první orientaci předpokládat, že zhruba platí $s/(r+s) \doteq n_0/n$, případně $x_{\max} + 0{,}5 > \ln[(r+s-1)/s] > x_{\max} - 0{,}5$.

ODHAD HODNOTY λ Z EXPERIMENTÁLNÍCH DAT

Má-li veličina Λ rozložení o hustotě (2) se známými parametry, lze konstruovat odhad její okamžité hodnoty z výsledku experimentu $\boldsymbol{F}$ použitím Bayesovy věty. Hustota aposteriorního rozložení veličiny Λ, podmíněného jevem $X = x$, je dána výrazem

$$(24)\qquad \lim_{\Delta\lambda \to 0} (\Delta\lambda)^{-1}\, \mathsf{P}\{\lambda \leqq \Lambda < \lambda + \Delta\lambda \mid (X = x) \cap r, s\} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda s}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{r-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{r-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x\, \mathrm{d}\lambda} = \frac{(-1)^x\, \mathrm{e}^{-\lambda(s+1)}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{r-1}\lambda^x}{\partial^x \mathrm{B}(r, s+1)/\partial s^x}\,.$$

Tato funkce má maximum při hodnotě λ_{max}, která je kladným kořenem rovnice

$$(25) \qquad e^{-\lambda} = [\lambda(s + r) - x]^{-1} [\lambda(s + 1) - x] ;$$

kladný kořen existuje při $r \neq 1$ pro všechna kladná x a je-li $r > 1$, i pro $x = 0$. Za těchto podmínek jej tedy lze považovat za bodový odhad $\hat{\lambda}$ hodnoty λ. Při $x = 0$, $r < 1$ nutno klásti $\hat{\lambda} = 0$. Rovnici (25) lze snadno řešit graficky.

Při $r = 1$ platí $\hat{\lambda} = x/(s + 1)$.

Meze intervalového odhadu na hladině $1 - \alpha$ jsou dány kořeny rovnic

$$(26a) \qquad (-1)^x [\partial^x B(r, s + 1)/\partial s^x]^{-1} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda(s+1)}(1 - e^{-\lambda})^{r-1} \lambda^x \, d\lambda =$$
$$= 1 - [\partial^x B(r, s + 1)/\partial s^x]^{-1} \partial^x B_{\exp(-\lambda)}(s + 1, r)/\partial s^x = \tfrac{1}{2}\alpha .$$

$$(26b) \qquad (-1)^x [\partial^x B(r, s + 1)/\partial s^x]^{-1} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda(s+1)}(1 - e^{-\lambda})^{r-1} \lambda^x \, d\lambda =$$
$$= [\partial^x B(r, s + 1)/\partial s^x]^{-1} \partial^x B_{\exp(-\lambda)}(s + 1, r)/\partial s^x = \tfrac{1}{2}\alpha ,$$

Rozvineme-li $(1 - e^{-\lambda})^{r-1}$ opět do binomické řady, máme

$$(27a) \qquad \int_0^{\lambda} e^{-\lambda(s+1)}(1 - e^{-\lambda})^{r-1} \lambda^x \, d\lambda =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s + h + 1)^{-(x+1)} \Gamma[x + 1, \lambda(s + h + 1)] ,$$

$$(27b) \qquad \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda(s+1)}(1 - e^{-\lambda})^{r-1} \lambda^x \, d\lambda =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s + h + 1)^{-(x+1)} \{x! - \Gamma[x + 1, \lambda(s + h + 1)]\} ,$$

kde

$$\Gamma(x + 1, a) = \int_0^a e^{-t} t^x \, dt .$$

Neúplná funkce gamma je tabelována [3], [4], její hodnoty však lze stanovit i pomocí tabulek Poissonova rozložení [2], neboť jak známo, platí

$$\Gamma(x + 1, a) = x![1 - P(x \mid a)] ,$$

kde

$$P(x \mid a) = e^{-a} \sum_{n=0}^{x} (n!)^{-1} a^n$$

je distribuční funkce Poissonova rozložení.

Systém (26) tedy lze vyjádřit ve tvaru

(28a)

$$\frac{\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s+h+1)^{-(x+1)} \{1 - \mathrm{P}[x \mid \lambda(s+h+1)]\}}{\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s+h+1)^{-(x+1)}} = \tfrac{1}{2}\alpha ,$$

(28b)

$$\frac{\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s+h+1)^{-(x+1)} \mathrm{P}[x \mid \lambda(s+h+1)]}{\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s+h+1)^{-(x+1)}} = \tfrac{1}{2}\alpha .$$

Hypotézu $\mathsf{H}_c(\lambda \geqq \lambda_c)$, o jejíž platnosti je v praxi často třeba rozhodnout, lze zamítnout na $100\alpha\%$ hladině významnosti, je-li

(29)

$$[\partial^x \mathrm{B}(s+1, r)/\partial s^x]^{-1} [\partial^x \mathrm{B}_{\exp(-\lambda_c)}(s+1, r)/\partial s^x] =$$

$$= \frac{\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s+h+1)^{-(x+1)} \mathrm{P}[x \mid \lambda_c(s+h+1)]}{\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1}{h} (-1)^h (s+h+1)^{-(x+1)}} \leqq \alpha .$$

Při $x = 0$ platí

(30)

$$\mathsf{P}\{\lambda \geqq \lambda_c \mid (X = 0) \cap r, s\} = \mathrm{I}_{\exp(-\lambda_c)}(s+1, r) .$$

Minimální rozsah pokusu, potřebný k tomu, aby aspoň při $x = 0$ mohla být H_c zamítnuta na $100\alpha\%$ hladině významnosti, je pak roven hodnotě v dané rovnicí

(31)

$$\mathrm{I}_{\exp(-v\lambda_c)}(s+1, r) = \alpha ,$$

přičemž rozsahem pokusu se rozumí velikost intervalu, který vyšetřujeme, a parametr λ je průměrná hodnota x v intervalu jednotkovém.

Literatura

[1] *Fisz, M.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Z polštiny přel. J. Wloka. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.

[2] *Janko, J.:* Statistické tabulky. Praha, NČSAV, 1958.

[3] *Pearson, K.:* Tables for the incomplete Γ-function. London, Cambridge University Press, 1922. Citováno podle 1.

[4] *Слуцкий Е. Е.* Таблицы для вычисления неполной гамма-функции и функции вероятности. Москва,Издат. АНССР, 1950. Cit. podle 5.

[5] *Šor, J. B.:* Statistické metody analýzy a kontroly jakosti a spolehlivosti. Z ruštiny přel. L. Kubát. Praha, SNTL, 1965.
[6] Таблицы логарифмической производной гамма-функции и её производных в комплексной области. Москва, Вычислительный центр АНССР, 1965.

Summary

A TRANSFORMATION OF A BETA-DISTRIBUTED RANDOM VARIATE AS A RESULT OF MINUTIZED EXPERIMENTAL METHOD

MILOŠ PAVLÍK

1. Let X be a Poisson random variate with a random variable parameter $\Lambda = -\ln(1 - Q)$, Q having a beta distribution with parameters r and s. Then Λ has a distribution the density of which is given by

$$\omega(\lambda \mid r, s) = [\mathrm{B}(r, s)]^{-1} \mathrm{e}^{-\lambda s}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{r-1} .$$

The marginal distribution of X is given by the probability function

$$\mathrm{u}(x \mid r, s) = [x!\, \mathrm{B}(r, s)]^{-1} (-1)^x \partial^x \mathrm{B}(r, s + 1)/\partial s^x .$$

2. A system of graphically solvable equations is derived for estimating the parameters of the marginal distribution of X from experimental data, using the method of maximum likelihood as well as the method of moments.

3. Equations are derived for the construction of both point and interval estimates of the actual Λ-value by application of Bayes theorem.

Adresa autora: RNDr. *Miloš Pavlík*, OHS Dolný Kubín, laboratórne oddelenie v Trstenej.