Aplikace matematiky

Ján Pidany

O možnosti riešenia sústavy rovníc nomogramami s orientovaným transparentom

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 4, 298–308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103237

O MOŽNOSTI RIEŠENIA SÚSTAVY ROVNÍC NOMOGRAMAMI S ORIENTOVANÝM TRANSPARENTOM

JÁN PIDANY

(Došlo dne 22. ledna 1968)

V článku [2] je rozpracovaná metodika konštrukcie nomogramov s orientovaným transparentom, nájdené základné kanonické tvary a ukázaný spôsob transformácie takýchto nomogramov. V tejto práci hľadáme nutné a postačujúce podmienky, kedy sústava dvoch rovníc s ômimi premennými a štyroch rovníc s dvanástimi premennými dajú sa upraviť na základné kanonické tvary, ktoré je možné zobraziť nomogramami s orientovaným transparentom.

I.

Uvažujme sústavu rovníc

(1)
$$x_7 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,$$
$$x_8 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,.$$

Hľadajme podmienky možnosti úpravy sústavy rovníc (1) na kanonický tvar

(2)
$$A_{7,8} - A_{3,4} = A_{1,2} + A_{5,6}\,,$$
$$B_{7,8} - B_{3,4} = B_{1,2} + B_{5,6}\,,$$

ktorý môžeme zobraziť pomocou nomogramov s orientovaným transparentom [2] (obr. 1).

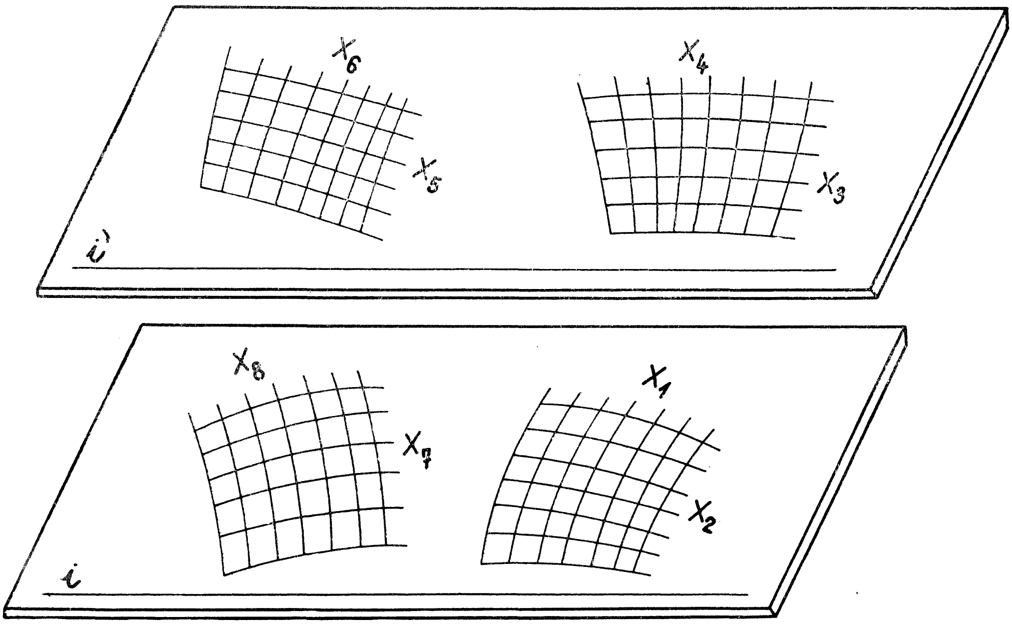
Veta 1. *Nech je daná sústava dvoch rovníc* (1), *kde f, g v oblasti* **G** *sú dostatočne hladké a* $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G} f'_{x_i} \cdot g'_{x_i} \not\equiv 0$ (*i jedno z dvojice čísel* 1,2; 3,4; 5,6).

Aby

(3)
$$A_{7,8}(f, g) \equiv A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}\,,$$
$$B_{7,8}(f, g) \equiv B_{1,2} + B_{3,4} + B_{5,6}\,,$$

pričom $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ sú dostatočne hladké a

$$\frac{D(A_{i,i+1}, B_{i,i+1})}{D(x_{i}, x_{i+1})} \neq 0\,, \quad i = 1, 3, 5, 7 \tag{4}$$



Obr. 1. Kľúč: $(x_1, x_2) \models\!\dashv (x_3, x_4)$, $(x_5, x_6) \mapsto (x_7, x_8)$.

je nutné a postačujúce, aby

$$f'_{x_i} : g'_{x_i} = Q(f, g)\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial A_{j,k}}{\partial x_i} : f'_{x_i} = R(f, g)\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial B_{j,k}}{\partial x_i} : f'_{x_i} = S(f, g)\,, \tag{7}$$

kde i jedna z dvojice čísel 1,2; 3,4; 5,6; $j = k - 1$,

$$k = \begin{cases} 2\,, & ak \quad i = 1, 2\,, \\ 4\,, & ak \quad i = 3, 4\,, \\ 6\,, & ak \quad i = 5, 6\,, \end{cases}$$

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 A_{7,8}(f, g)}{\partial x_{2n}\, \partial x_{2n+2}} = \frac{\partial^2 B_{7,8}(f, g)}{\partial x_{2n}\, \partial x_{2n+2}} = 0\,, \quad n = 1, 2\,,^1)$$

$$(9) \qquad \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \neq 0\,.$$

Poznámka 1. Podmienka (4) zaručuje regulárnosť binárnych polí (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 3, 5, 7$.

Poznámka 2. V ďalšom bez ujmy na obecnosti budeme považovať $i = 1, 3, 5$, potom $i = j$ a $k = 2, 4, 6$.

Dôkaz. a) Podmienka nutná. Predpokladajme, že sústava (3) existuje a vyhovuje (4). Derivujme (3) podľa x_i, $i = 1, 3, 5$

$$(10) \qquad \frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} f'_{x_i} + \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} g'_{x_i} \equiv \frac{\partial A_{i,k}}{\partial x_i}\,,$$

$$(11) \qquad \frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} f'_{x_i} + \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} g'_{x_i} \equiv \frac{\partial B_{i,k}}{\partial x_i}\,.$$

Po úprave z (10) a (11) dostaneme

$$(12) \qquad \frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + (g'_{x_i} : f'_{x_i}) \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} \equiv \frac{\partial A_{i,k}}{\partial x_i} : f'_{x_i}\,,$$

$$(13) \qquad \frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} + (g'_{x_i} : f'_{x_i}) \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} \equiv \frac{\partial B_{i,k}}{\partial x_i} : f'_{x_i}\,.$$

Aby sme mohli považovať (12) a (13) za parciálne diferenciálne rovnice vzhľadom na $A_{7,8}(f, g)$ a $B_{7,8}(f, g)$, musia platiť podmienky (5), (6) a (7). Z (12) dostaneme

$$(14) \qquad f'_{x_i} : f'_{x_n} \equiv \frac{\partial A_{i,k}}{\partial x_i} : \frac{\partial A_{n,k}}{\partial x_n}\,,$$

$n = 3$ a $n = 5$, ak $i = 1$; $n = 5$ ak $i = 3$.

Logaritmujme (14), potom derivujme podľa x_i

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \lg (f'_{x_i} : f'_{x_n}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \lg \frac{\partial A_{i,k}}{\partial x_i}\,.$$

Ak označíme pravú stranu (15) $P_1(x_i, x_k)$, potom

$$(16) \qquad \frac{\partial A_{i,k}}{\partial x_i} = \varphi(x_k)\, e^{\int P_1(x_i, x_k) \mathrm{d}x_i}\,.$$

[1]) Je len podmienka postačujúca.

Analogicky dostaneme

$$\frac{\partial B_{i,k}}{\partial x_i} = \psi(x_k)\, e^{\int P_2(x_i, x_k) \mathrm{d} x_i} \tag{17}$$

$\varphi(x_k)$, $\psi(x_k)$ sú ľubovoľné funkcie.

Z (3) dostaneme

$$\frac{D(A_{1,2}, B_{1,2})}{D(x_1, x_2)} \equiv \frac{D(A_{7,8}, B_{7,8})}{D(x_7, x_8)} \cdot \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} . \tag{18}$$

Podmienka (9) vyplýva z (4) a (18).

b) Podmienka postačujúca. Predpokladajme, že pre f a g sú splnené podmienky (5)–(9). Pretože funkcie f a g sú dané z (5) určíme $Q(f, g)$ a z (6), (7), (16), (17) $M(f, g)$, $N(f, g)$.

Zostavme rovnice

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} = M(f, g) , \tag{19}$$

$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} + Q(f, g) \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} = N(f, g) , \tag{20}$$

ktorých riešenia nech sú

$$A_{7,8}(f, g) = F_1(f, g) + \Phi_1[K(f, g)] , \tag{21}$$

$$B_{7,8}(f, g) = F_2(f, g) + \Phi_2[K(f, g)] . \tag{22}$$

F_1, F_2 sú partikálne riešenia (19), (20) a Φ_1, Φ_2 obecné riešenia homogénnych rovníc prislúchajúcich (19), (20).

Berme do úvahy podmienky (5), (6), (7) pre riešenie (21) a (22), potom (19) a (20) môžeme písať v tvare (12) a (13), alebo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [A_{7,8}(f, g)] \equiv \frac{\partial A_{i,k}}{\partial x_i} , \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [B_{7,8}(f, g)] \equiv \frac{\partial B_{i,k}}{\partial x_i} . \tag{24}$$

Z (8), (23) a (24) vyplýva, že

$$\begin{aligned} A_{7,8}(f, g) &\equiv A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6} , \\ B_{7,8}(f, g) &\equiv B_{1,2} + B_{3,4} + B_{5,6} . \end{aligned} \tag{25}$$

II.

Určme podmienky možnosti úpravy sústavy rovníc

$$
\begin{aligned}
x_7 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,\\
x_8 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,\\
x_9 &= m(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,,\\
x_{10} &= n(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,,
\end{aligned} \tag{26}
$$

na základný kanonický tvar

$$
\begin{aligned}
A_{1,2} + A_{3,4} &= A_{7,8} - A_{5,6} = A_{9,10} - A_{11,12}\,,\\
B_{1,2} + B_{3,4} &= B_{7,8} - B_{5,6} = B_{9,10} - B_{11,12}\,,
\end{aligned}
$$

ktorý se dá zobraziť pomocou nomogramov s orientovanou priesvitkou [2] (obr. 2).

Veta 2. *Nech je daná sústava rovníc* (26), *pričom* f, g, m, n *v oblasti* $\mathbf{G}$ *sú dostatočne hladké a v* $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}\, f'_{x_i} \,.\, g'_{x_i} \,.\, m'_{x_k} \,.\, n'_{x_k} \not\equiv 0$ (*i je jedno z dvojice čísel* 1, 2; 3, 4; 5, 6 *a k jedno z čísel* 1,2; 3,4; 11, 12).

Aby sa sústava rovníc (26) *dala upraviť na tvar*

$$
\begin{aligned}
A_{1,2} + A_{3,4} &\equiv A_{7,8}(f, g) - A_{5,6} \equiv A_{9,10}(m, n) - A_{11,12}\,,\\
B_{1,2} + B_{3,4} &\equiv B_{7,8}(f, g) - B_{5,6} \equiv B_{9,10}(m, n) - B_{11,12}\,,
\end{aligned} \tag{27}
$$

pričom $A_{i,k}, B_{i,k}$ *sú dostatočne hladké a*

$$
\frac{D(A_{i,i+1}, B_{i,i+1})}{D(x_i, x_{i+1})} \neq 0\,, \quad i = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \tag{28}
$$

je nutné a postačujúce, aby

$$
n'_{x_k} : m'_{x_k} = H(m, n)\,, \tag{29}
$$

$$
\frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_k} : m'_{x_k} = V(m, n)\,, \tag{30}
$$

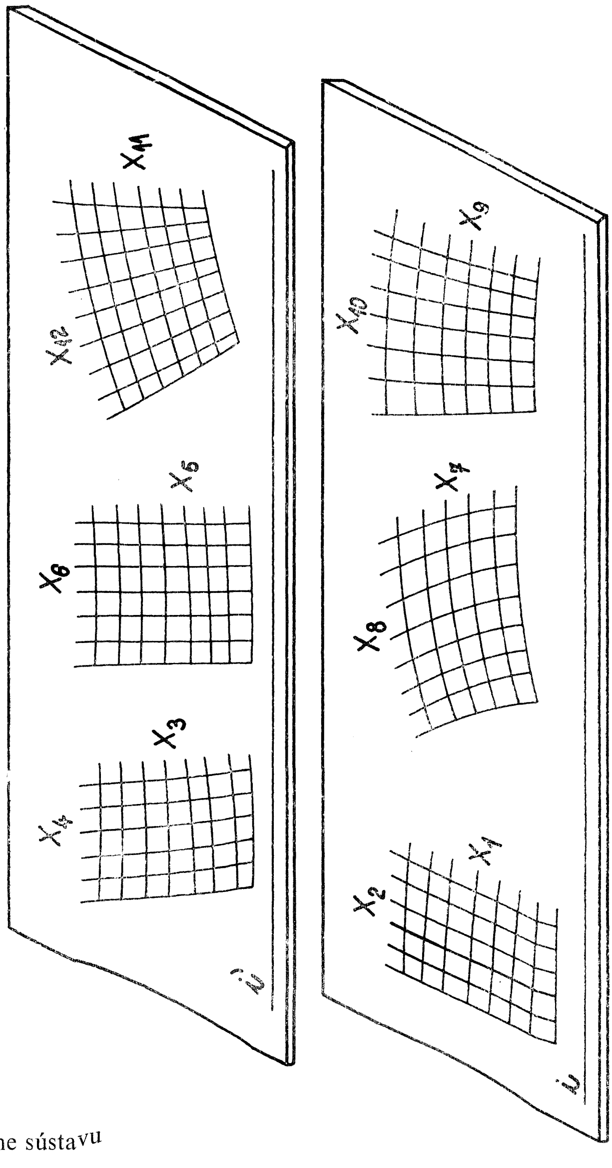
$$
\frac{\partial B_{11,12}}{\partial x_k} : m'_{x_k} = T(m, n)\,, \tag{31}
$$

kde k je jedno z čísel 11, 12,

$$
\frac{D(f, g)}{D(x_2, x_3)} : \frac{D(m, n)}{D(x_2, x_3)} = \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_3)} : \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_3)} = \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} : \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_2)}\,. \tag{32}
$$

Poznámka 3. V ďalšom budeme považovať $k = 11$.

D ô k a z. a) Podmienka nutná. Predpokladajme, že sústava rovníc (27) existuje a vyhovuje (28).



Obr. 2. Kľúč: $(x_1, x_2) \amalg (x_3, x_4), (x_5, x_6) \mapsto (x_7, x_8), (x_9, x_{10}) \mapsto (x_{11}, x_{12})$.

Uvažujme sústavu

$$A_{1,2} + A_{3,4} \equiv A_{7,8}(f, g) - A_{5,6}\,, \tag{33}$$
$$B_{1,2} + B_{3,4} \equiv B_{7,8}(f, g) - B_{5,6}\,.$$

Podmienky existencie sústavy (33) sme odvodili vo vete 1. Predpokladajme, že tieto sú splnené, potom môžeme určiť funkcie $A_{i,i+1}$, $B_{i,i+1}$, $i = 1, 3, 5, 7$ a (27) upraviť na tvar

(34) $$A_{9,10}(m, n) \equiv u(x_1, x_2, x_3, x_4) + A_{11,12}\,,$$
$$B_{9,10}(m, n) \equiv v(x_1, x_2, x_3, x_4) + B_{11,12}\,,$$

kde

(35) $$u = A_{1,2} + A_{3,4}\,, \quad v = B_{1,2} + B_{3,4}\,.$$

Derivujme

(36) $$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial m} m'_{x_i} + \frac{\partial A_{9,10}}{\partial n} n'_{x_i} \equiv u'_{x_i}\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,,$$

(37) $$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial m} m'_{x_{11}} + \frac{\partial A_{9,10}}{\partial n} n'_{x_{11}} \equiv \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{11}}\,,$$

(38) $$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial m} m'_{x_i} + \frac{\partial B_{9,10}}{\partial n} n'_{x_i} \equiv v'_{x_i}\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,,$$

(39) $$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial m} m'_{x_{11}} + \frac{\partial B_{9,10}}{\partial n} n'_{x_{11}} \equiv \frac{\partial B_{11,12}}{\partial x_{11}}\,.$$

Utvorme maticu

$$\mathbf{A} = \left\| m'_{x_i} n'_{x_i} u'_{x_i} v'_{x_i} \right\|\,, \quad i = 1, 2, 3, 4, 11\,,$$

kde $u'_{x_{11}} = \partial A_{11,12}/\partial x_{11}$, $v'_{x_{11}} = \partial B_{11,12}/\partial x_{11}$.

Z (28) a (35) vyplývá, že

(40) $$\frac{D(u, v)}{D(x_1, x_2)} \neq 0\,,$$

tj. $h(\mathbf{A}) \geqq 2$.

Ak zoberieme do úvahy (36)–(39) vidíme, že tretí a štvrtý stĺpec matice $\mathbf{A}$ sa dajú lineárne vyjadriť pomocou prvých dvoch stĺpcov, preto $h(\mathbf{A}) = 2$ a

(41) $$\frac{D(m, n, u)}{D(x_1, x_2, x_{11})} = 0\,, \quad \frac{D(m, n, v)}{D(x_1, x_2, x_{11})} = 0\,.$$

Z (34) dostaneme

(42) $$\frac{D(u, v)}{D(x_1, x_2)} \equiv \frac{D(A_{9,10}, B_{9,10})}{D(x_9, x_{10})} \cdot \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_2)}\,.$$

Zo (40) a (42) vyplýva, že det $|m'_{x_i} n'_{x_i}| \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Po úprave zo (41) dostaneme

$$\left[u'_{x_1} \frac{D(m, n)}{D(x_2, x_{11})} + u'_{x_2} \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_{11})}\right] : \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_2)} = \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{11}}, \tag{43}$$

$$\left[v'_{x_1} \frac{D(m, n)}{D(x_2, x_{11})} + v'_{x_2} \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_{11})}\right] : \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_2)} = \frac{\partial B_{11,12}}{\partial x_{11}}. \tag{44}$$

Z (37) a (39) dostaneme

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial m} + (n'_{x_{11}} : m'_{x_{11}}) \frac{\partial A_{9,10}}{\partial n} \equiv \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{11}} : m'_{x_{11}}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial m} + (n'_{x_{11}} : m'_{x_{11}}) \frac{\partial B_{9,10}}{\partial n} \equiv \frac{\partial B_{11,12}}{\partial x_{11}} : m'_{x_{11}}. \tag{46}$$

Aby sme (45) a (46) mohli považovať za parciálne diferenciálne rovnice vzhľadom na $A_{9,10}(m, n)$ a $B_{9,10}(m, n)$, musia byť splnené podmienky (29), (30) a (31).

Z (36) dostaneme

$$\frac{D(m, n)}{D(x_2, x_3)} u'_{x_1} - \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_3)} u'_{x_2} + \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_2)} u'_{x_3} \equiv 0. \tag{47}$$

Podľa predpokladu podmienky existencie sústavy (33) sú splnené, preto podmienka (47) platí aj pre f a g.

$$\frac{D(f, g)}{D(x_2, x_3)} u'_{x_1} - \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_3)} u'_{x_2} + \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} u'_{x_3} \equiv 0. \tag{48}$$

Podmienka riešiteľnosti sústavy (47), (48) vzhľadom na u má tvar (34).

b) Podmienka postačujúca. Predpokládajme, že podmienky (29)–(32) sú splnené. Pretože funkcie m, n, u, v poznáme, z (29), (30), (31), (43), (44) určíme $H(m, n)$, $V(m,n)$, $T(m, n)$, a zostavíme parciálne diferenciálne rovnice

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial m} + H(m, n) \frac{\partial A_{9,10}}{\partial n} = V(m, n), \tag{49}$$

$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial m} + H(m, n) \frac{\partial B_{9,10}}{\partial n} = T(m, n), \tag{50}$$

ktorých riešenia nech sú

$$A_{9,10}(m, n) = A_1(m, n) + C_1[B(m, n)], \tag{51}$$

$$B_{9,10}(m, n) = A_2(m, n) + C_2[B(m, n)], \tag{52}$$

kde A_1 a A_2 sú partikulárne riešenia (51), (52) a C_1 a C_2 obecné riešenia homogénnych rovníc prislúchajúcich (51) a (52).

Ak berieme do úvahy podmienky (29), (30) a (31) pre riešenia (51) a (52), potom (49) a (50) môžeme písať v tvare (45) a (46), alebo

$$\frac{\partial}{\partial x_{11}} [A_{9,10}(m, n)] \equiv \frac{\partial A_{11,12}}{\partial x_{11}}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{11}} [B_{9,10}(m, n)] \equiv \frac{\partial B_{11,12}}{\partial x_{11}}, \tag{54}$$

odkiaľ

$$A_{9,10}(m, n) \equiv A_{11,12} + \bar{u}(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{55}$$

$$B_{9,10}(m, n) \equiv B_{11,12} + \bar{v}(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{56}$$

Derivujme (55) podľa x_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial m} m'_{x_i} + \frac{\partial A_{9,10}}{\partial n} n'_{x_i} \equiv \bar{u}'_{x_i} \tag{57}$$

odkiaľ

$$\frac{D(m, n)}{D(x_2, x_3)} \bar{u}'_{x_1} - \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_3)} \bar{u}'_{x_2} + \frac{D(m, n)}{D(x_1, x_2)} \bar{u}'_{x_3} \equiv 0. \tag{58}$$

Ak berieme do úvahy podmienku (32) pre (58), potom

$$\frac{D(f, g)}{D(x_2, x_3)} \bar{u}'_{x_1} - \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_3)} \bar{u}'_{x_2} + \frac{D(f, g)}{D(x_1, x_2)} \bar{u}'_{x_3} \equiv 0. \tag{59}$$

Z (47), (48) a (58), (59) vyplýva

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, x_4) = u(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{60}$$

Podobne dostaneme

$$\bar{v}(x_1, x_2, x_3, x_4) = v(x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{61}$$

Dosadíme do (55) a (56) pravé strany (60) a (61) dostaneme identitu (34).

Príklad. Majme sústavu

$$\begin{aligned}
x_7 &= \sin \tfrac{1}{2}[x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5(x_5 + x_6)], \\
x_8 &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}[x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5(x_6 - x_5)], \\
x_9 &= x_{12}\, e^{x_1 + 2x_3 + 2x_4 + \operatorname{sh} x_{11}} \\
x_{10} &= (x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + \operatorname{sh} x_{11} - x_{11} + 3 \lg x_{12})^2.
\end{aligned}$$

Ľahko sa presvedčíme, že predpoklady vety sú splnené, pričom

$$Q(f, g) = 1 : 2g\sqrt{(1 - f^2)}\,, \quad S(f, g) = 0\,, \quad R(f, g) = 2 : \sqrt{(1 - f^2)}\,,$$
$$H(m, n) = 6\sqrt{n} : m\,, \quad V(m, n) = 1 : m\,, \quad T(m, n) = -2 : m\,.$$

Zostavme rovnice

$$\frac{\partial A_{7,8}}{\partial f} + \frac{1}{2g\sqrt{(1 - f^2)}} \cdot \frac{\partial A_{7,8}}{\partial g} = \frac{2}{\sqrt{(1 - f^2)}}\,,$$
$$\frac{\partial B_{7,8}}{\partial f} + \frac{1}{2g\sqrt{(1 - f^2)}} \cdot \frac{\partial B_{7,8}}{\partial g} = 0\,,$$
$$\frac{\partial A_{9,10}}{\partial m} + \frac{6\sqrt{n}}{m}\,\frac{\partial A_{9,10}}{\partial n} = \frac{1}{m}\,,$$
$$\frac{\partial B_{9,10}}{\partial m} + \frac{6\sqrt{n}}{m}\,\frac{\partial B_{9,10}}{\partial n} = -\frac{2}{m}\,,$$

odkiaľ

$$A_{7,8}(f, g) = \arcsin f + g^2\,, \quad B_{7,8}(f, g) = \arcsin f - g^2\,,$$
$$A_{9,10}(m, n) = \lg m\,, \quad B_{9,10}(m, n) = \lg m - \sqrt{n}\,,$$

tj.

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = \arcsin x_7 + x_8^2 - x_5 x_6\,,$$
$$x_2 - x_3 = \arcsin x_7 - x_8^2 - x_5^2\,,$$
$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = \lg x_9 - \operatorname{sh} x_{11} - \lg x_{12}\,,$$
$$x_2 - x_3 = \lg x_9 - \sqrt{x_{10}} - x_{11} + 2\lg x_{12}\,,$$

alebo

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = \arcsin x_7 + x_8^2 - x_5 x_6 = \lg x_9 - \operatorname{sh} x_{11} - \lg x_{12}\,,$$
$$x_2 - x_3 = \arcsin x_7 - x_8^2 - x_5^2 = \lg x_9 - \sqrt{x_{10}} - x_{11} + 2\lg x_{12}\,.$$

Literatúra

[1] *Ю. И. Боголюбов:* О представимости системы четырех уравнений с девятью переменными в виде, допускающем построение номограмм с ориентированным транспарантом, Номографический сборник № 3, Вычислительный центр АН СССР, 1965, 150—157.

[2] *Г. С. Хованский:* Исследование возможностей преобразования номограмм с прозрачным ориентированным транспарантом, Вычисл. мат. 7, АН СССР, 1961, 133—150.

[3] *V. Pleskot,* Nomografie, SNTL, Praha, 1963.

[4] *J. Pidany,* O možnosti úpravy sústavy dvoch rovníc o siedmich premenných na tvar $A_{6,7} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{3,5}$, $B_{6,7} = B_{1,2}$, ktorý môžeme zostrojiť pojocou nomogramov s priesvitkov o dvoch stupňoch voľnosti, Aplikace mat. 5, 1966, 410—416.
[5] *J. Pidany,* O možnosti úpravy sústavy dvoch rovníc s ôsmimi neznámými na tvar $A_{7,8} = A_{1,2} + A_{3,4} + A_{5,6}$, $B_{7,8} = B_{1,2} + B_3 + B_5$, ktorý môžeme zostrojiť pomocou nomogramov s priesvitkou o dvoch stupňoch voľnosti, Aplikace mat. 2, 1967, 136—142.

Summary

ON THE POSSIBILITY OF REPRESENTATION OF A SYSTEM OF EQUATIONS BY NOMOGRAMS WITH ORIENTED TRANSPARENCY

JÁN PIDANY

The paper derives the necessary and sufficient conditions under which the system of equations

$$x_7 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,$$
$$x_8 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,$$

can be modified to the form

$$A_{7,8} - A_{3,4} = A_{1,2} + A_{5,6}\,,$$
$$B_{7,8} - B_{3,4} = B_{1,2} + B_{5,6}\,,$$

and the system of equations

$$x_7 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,$$
$$x_8 = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\,,$$
$$x_9 = m(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,,$$
$$x_{10} = n(x_1, x_2, x_3, x_4, x_{11}, x_{12})\,,$$

to the form

$$A_{1,2} + A_{3,4} = A_{7,8} - A_{5,6} = A_{9,10} - A_{11,12}\,,$$
$$B_{1,2} + B_{3,4} = B_{7,8} - B_{5,6} = B_{9,10} - B_{11,12}\,,$$

which can be represented by means of nomograms with oriented transparency.

Adresa autora: Ján Pidany, Nám. Februároveho víť. 9, Košice.