

Aplikace matematiky

Jozef Klimčík

Riešenie niektorých technických problémov pomocou kótovane-vektorovej
zobrazovacej metódy v 4P

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 4, 259–277

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103235>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

RIEŠENIE NIEKTORÝCH TECHNICKÝCH PROBLÉMOV POMOCOU KÓTOVANE-VEKTOROVEJ ZOBRAZOVACEJ METÓDY V 4P

JOZEF KLIMČÍK

(Došlo dňa 14. marca 1967)

I. ÚVOD

Na zobrazenie štvorrozmerného euklidovského lineárneho priestoru 4P boli vypracované rôzne premietacie metódy. V tejto práci bude podaný princíp novej zobrazovacej metódy v 4P a poukážeme na jej použitie pri riešení niektorých problémov v mineralógii, v chémii a v banskom meračstve.

Zobrazme body A štvorrozmerného euklidovského lineárneho operačného priestoru ${}^4P \equiv [0; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}]$ ortogonálne do priemetného priestoru $\Pi \equiv [0; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ do bodov \bar{A} . Pre Π použijeme známe vektorové premietanie [6], [11], [13] s tým, že kótu u_A bodu $A(x_A, y_A, z_A, u_A)$ pripíšeme k jeho koncovému priemetu $A'(u)$. Z toho dôvodu nazvali sme uvedené zobrazenie *kótovane-vektorovým*.

Dohovor. Podpriestory štvorrozmerného euklidovského lineárneho priestoru 4P a to:

- 0-rozmerný priestor 0P – bod označíme veľkými písmenami A, B, C, \dots ,
- 1-rozmerný priestor 1P – priamku označíme malými písmenami a, b, c, \dots ,
- 2-rozmerný priestor 2P – rovinu označíme gréckymi písmenami α, β, \dots ,
- 3-rozmerný priestor 3P – nadrovinu označíme gréckymi písmenami Ψ, Ω, \dots ,

Priemetný trojrozmerný priestor – nadrovinu v 4P odlišíme označením Π .

Miesto názvov „kótovane-vektorové obrazy bodu, priamky, ...“ použijeme tiež názvy „vektorove združené obrazy bodu, priamky, ...“, alebo len „združené obrazy“, miesto „trojrozmerný euklidovský lineárny priestor“ povieme len nadrovina. Kvôli jednoduchosti zvolíme koeficient úmernosti vektorového premietania $q = 1$ [6], [11].

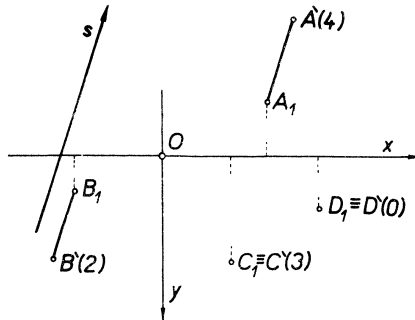
II. ZÁKLADNÉ ÚLOHY V 4P

V tomto odseku bude podaný princíp zobrazenia základných lineárnych podpriestorov, elementárnych metrických úloh a základných úloh o incidencii podpriestorov v 4P . Pôjde teda o konštrukcie potrebné pre riešenie ďalších úloh.

1. Zobrazenie bodu. **Def. 1,1.** Štvorrozmerný euklidovský lineárny priestor 4P o pravouhlej báze $[0; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}]$ nazveme *operačným priestorom*. Trojrozmerný euklidovský lineárny podpriestor 3P o pravouhlej báze $[0; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ *priemetným priestorom* (priemetnou nadrovinou).

Veta 1,1. Nech je daný bod $A(x_A, y_A, z_A, u_A) \in {}^4P$ a priemetná nadrovina Π . Premietnime vzor A do bodu $\bar{A} \in \Pi$ v smere $\mathbf{u} \perp \Pi$ a zobrazme bod \bar{A} priemetného priestoru Π vo vektorovom premietaní (vzhľadom na π) do dvojice bodov $A_1 A'$. K bodu A' pripíšeme v zátvorke jeho kótu u_A : $A'(u_A)$. Taktó zavedené zobrazenie medzi množinou vzorov $A \in {}^4P$ a množinou dvojíc obrazov je (1,1)-značným zobrazením.

Dôkaz. Predpoklady vo vete 1,1 umožňujú ku každému bodu $A \in {}^4P$ ako vzoru určiť dvojicu kótovane-vektorových obrazov $A_1, A'(u_A)$. Zo súradníc x_A, y_A, z_A, u_A vieme ich vnesením určiť dvojicu kótovane-vektorových obrazov $A_1, A'(u_A)$. Na obr. 1 sú zobrazené body: $A(3; -1,5; 2,5; 4)$, $B(-2,5; 1; -2; 2)$, $C(2; 3; 0; 3)$, $D(4,5; 1,5; 0; 0)$. Z nich stanovíme body $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ a tiež vzory A, B, C, D pretože medzi bodmi A, B, C, D , priestoru 4P a bodmi $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \in \Pi$ je (1,1)-značné zobrazenie.



Obr. 1.

Def. 1,2. Vetou 1,1 zavedené zobrazenie nazveme *kótovane-vektorovým zobrazením* v 4P .

V ďalšom použijeme vetu, ktorej dôkaz je zřejmý:

Veta 1,2. Ak platí pre bod $A : A \in \Pi$, potom pre jeho kótu platí: $u_A = 0$ a naopak.

2. Zobrazenie priamky. Def. 2,1. Kolmopremietajúcou rovinou priamky a , ktorá nie je kolmá na Π , je touto priamkou a preložená rovina $\kappa^a \frac{1}{2} \perp \Pi$.

Združenými obrazmi bodu A je dvojica bodov $A_1, A'(u_A)$. Priamka je určená dvomi bodmi, preto platí pri nej vzťah vyjadrený

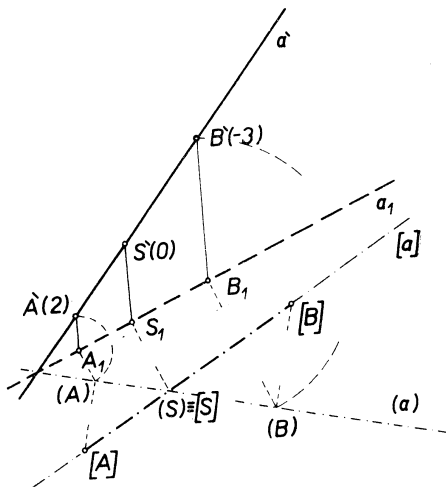
Vetou 2,1. Združenými obrazmi priamky a , ktorá nie je kolmá na podpriestory Π, π , je dvojica priamok a_1, a' , ktoré dostaneme vektorovým zobrazením tak, že za vzor zoberieme priamku $\bar{a} \equiv \kappa^a \cap \Pi$ a ku dvom rôznym bodom $A' \neq B'$ priamky a' pripíšeme ich kóty u_A, u_B .

Dôk az. Pravouhle premietajúci lúč (vzhľadom na Π) zvoleného bodu M priamky a pretína Π v bode \bar{M} . Premietajúce lúče všetkých bodov M priamky a vytvárajú kolmopremietajúcu rovinu κ^a priamky a . Po zobrazení všetkých bodov $\bar{M} \in \bar{a} \equiv \kappa^a \cap \Pi$ vo vektorovom premietaní, vyplnila ich obrazy $M_1, M'(u_M)$ združené obrazy priamok a_1, a' . Naopak, každej dvojici $M_1 \in a_1, M'(u_M) \in a'$ obráteným postupom, ako bolo vyššie ukázané, vieme priradiť bod $M \in a$.

Def. 2,2. Bod $S \in a$, ktorého kóta je $u_S = 0$ ($a \cap \Pi = S$) nazveme (priestorovým) stopníkom priamky a .

Konstr. 2,1. Majme združené obrazy $a_1 = A_1B_1, a' = A'(2) B'(-3)$ priamky a . Určiť skutočnú veľkosť $d = \overline{AB}$, stopník S priamky $a = AB$ a polohu priamky a v 4P (obr. 2).

Prevedenie. Určíme skutočnú veľkosť \overline{AB} na priamke (a) na kolmom priemetu priamky a do Π sklopením kolmopremietajúcej roviny do π užitím súradníc z_A, z_B . Potom sklopíme kolmopremietajúcu rovinu κ^a priamky a , pomocou kót u_A, u_B , ktorá je polkolmá na premietajúcu rovinu. Pre stopník S platí: $[S] \equiv (S) = (a) \cap [a] = a \cap \Pi$. Mohli by sme tiež najprv sklopiť rovinu κ^a pomocou kót u_A, u_B a až potom sklopiť kolmopremietajúcu rovinu súradníc z_A, z_B (na obr. 2 nezostrojené). Sklápanie môžeme uskutočniť tiež okolo koncového priemetu nielen tu ale i v ďalšom. Ak by išlo len o určenie stopníka S alebo nájdenie nejakého bodu u určitej kóte, nájdeme ho vystupňovaním priamky a vzhľadom na kótu u .

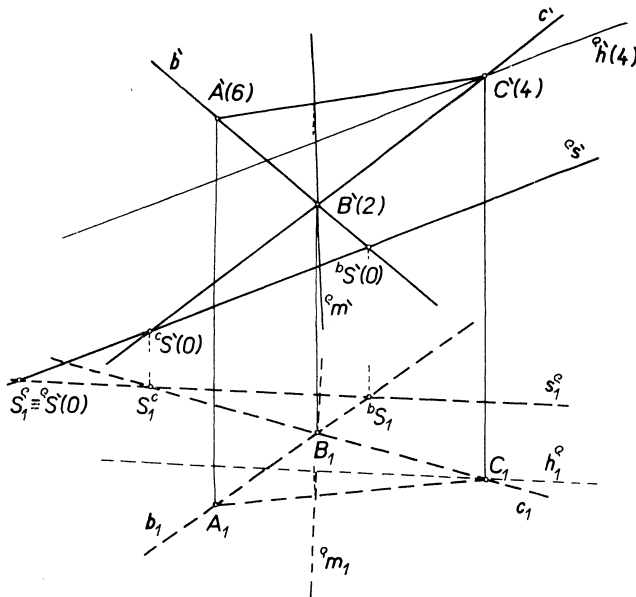


Zrejme platí: $\overline{(AB)} = \overline{([A] [B])} = \overline{([A] [\overline{B}])} = [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 + (u_A - u_B)^2]^{1/2}$.

Poznámka. Keď A, B, \dots, M sú rôzne body priamky a a $u_A = u_B \dots = u_M \dots \neq 0$, potom je $a \parallel \Pi$. Ak $A'(u_A) \equiv B'(u_B)$ ($A \neq B$), $A_1 \equiv B_1$ (potom aj $S \equiv \overline{A} \equiv \overline{B}$), tak je $a \perp \Pi$.

3. Zobrazenie roviny. Def. 3.1. Rovina $\varrho \not\parallel \Pi$, $\varrho \notin \Pi$ pretína priemerný priestor v priamke s^ϱ , ktorú nazveme *stopnou priamkou roviny* resp. jej *priestorovou stopou*.

Veta 3.1. Združené obrazy roviny ϱ vo všeobecnej polohe vzhľadom na Π sú (1,1)-značne určené združenými obrazmi $A_1, B_1, C_1, A'(u_A), B'(u_B), C'(u_C)$, troch nekolineárnych bodov, pričom $A, B, C \in \varrho$ (obr. 3).



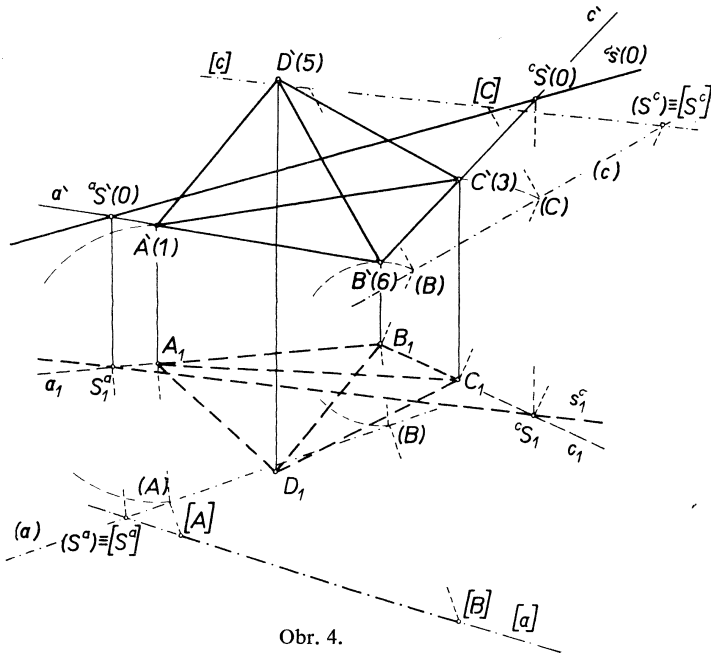
Obr. 3.

Dôkaz. Troma bodmi A, B, C , neležiacimi na priamke, prechádza jediná rovina [4], ktorá tieto obsahuje. Zvoľme tri body $A, B, C \in \varrho$. Združené obrazy A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2$) vieme (1,1)-značne stanoviť podľa vety 1.1 a podľa konstrukcie 2.1. Potom každým trom párom obrazov A_i, B_i, C_i ($A, B, C \in \varrho$) odpovedá trojica A, B, C ($A, B, C \in \varrho$). Dôkaz druhej časti vety je obdobný.

Poznámka. Na obr. 3 združené obrazy bodov $A, B, C \in \varrho$ sú $A_1, B_1, C_1, A'(6), B'(2), C'(4)$. Na obr. 3 sú zobrazené ešte tieto elementy roviny ϱ : stopná priamka s^ϱ , stopný bod S^ϱ , hlavná priamka h^ϱ v bode $C'(4)$, spádová priamka m^ϱ [9].

4. Zobrazenie nadroviny. Veta 4.1. Združené obrazy nadroviny Ψ , danej vo všeobecnej polohe vzhľadom na Π sú (1,1)-značne určené, ak poznáme kótované-vektorové obrazy štyroch bodov ($A, B, C, D \in \Psi, i = 1, 2$) A_i, B_i, C_i, D_i , ktoré nie sú totožné a ani jeden z bodov neleží na priamkach určených ďalšími dvoma bodmi, ani jeden z nich neleží v rovine určenej zvyšnými troma bodmi.

Dôkaz. Body $A, B, C, D \in \Psi$ sa zobrazia do bodov $\bar{A}(u_A), \bar{B}(u_B), \bar{C}(u_C), \bar{D}(u_D) \in \Pi$ (obr. 4). Tieto pri podmienkach vety 4.1 a ako to vyplýva zo zachovania incidencie pri lineárnom zobrazení, majú tie isté vlastnosti ako ich vzory. Potom platí: $\bar{A}(u_A), \bar{B}(u_B), \bar{C}(u_C), \bar{D}(u_D) \equiv \Psi \equiv \Pi$, čo bolo treba dokázať. Z dôkazu plyývajú



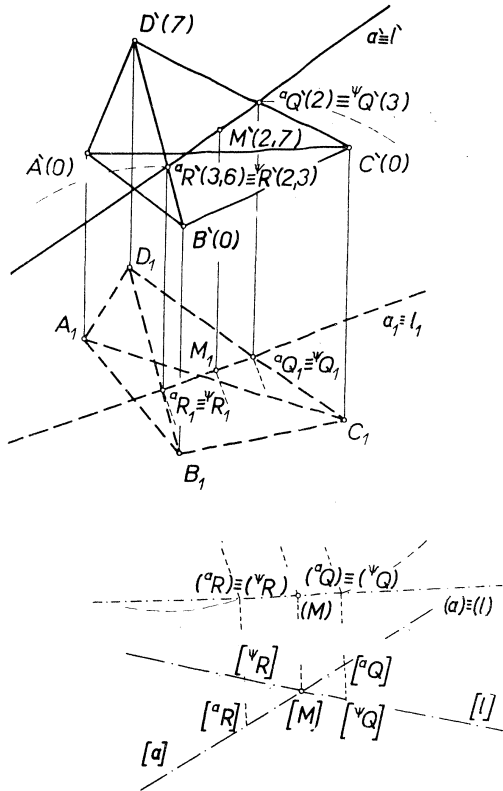
Obr. 4.

Veta 4.2. Kolmý priemet nadroviny Ψ (ktorá nie je kolmá na Π) v smere u je priemetná nadrovina Π (keď premietame do Π).

Poznámka. Na obr. 4 je nadrovina Ψ daná združenými obrazmi $A_1, B_1, C_1, D_1, A'(1), B'(6), C'(3), D'(5)$. Nájdené sú stopné elementy stopnej roviny $\sigma : s_1^a, s_1^c$; stopníky priamok $a, c : S^a, S^c$; skutočná veľkosť $(A)(B)$ [9].

5. Priesečník priamky s nadrovinou Def. 5.1. Nech je daná nadrovina Ψ a priamka $a \not\parallel u$. Kolmopremietajúcou rovinou priamky a nech je κ . Krycou priamkou (vzhľadom na Ψ a na smer u) nazveme priamku $l = \kappa \cap \Psi$. Krycími bodmi (vzhľadom na Ψ, a , smer u) nazveme všetky body $\in l$.

Konstr. 5,1. Majme nadrovinu $\Psi = (A, B, C, D)$, priamku $a \equiv {}^aR {}^aQ$. Treba zostrojiť ich priesečník $M = a \cap \Psi$ (obr. 5).



Obr. 5.

Prevedenie. Pre zadanie zvolíme tieto údaje: $A_1, B_1, C_1, D_1, {}^aR_1, {}^aQ_1, A'(0), B'(0), C'(0), D'(7)$. Kvôli jednoduchosti nech sú ${}^aR, {}^aQ$ krycie body. Ďalej ${}^aR(3,6) \equiv {}^yR(2,3)$, ${}^aQ(2) \equiv {}^yQ(3)$. V kolmopremietajúcej rovine α^a priamky a je krycia priamka $l \subset \Psi$. Sklopme α^a okolo $(a) \equiv (l)$ do polohy $[a] \cap [l] = [M]$. Určíme v sklopení kótu $u_M = \overline{(M)} \overline{[M]}$ a ďalej zo sklopenia obrazy $M_1, M'(2,6)$ hľadaného bodu M .

III. ZAČLENENIE MINERÁLU DO URČITEJ SKUPINY MINERÁLOV

Minerál zložený z piatich komponent – po chemickej stránke – je charakterizovaný pomerom týchto komponent napr. v %. Štyri čísla, udávajúce percentuálny obsah štyroch z piatich komponent, sú na sebe nezávislé. Považujeme ich za súradnice bodu, ktorý bude reprezentovať príslušný minerál v štvorrozmernom euklidovskom lineárnom priestore 4P .

Ak majú patriť minerály s tými istými piatimi zložkami s rôznym pomerom obsahu zložiek do toho istého izomorfného radu, tak body zobrazujúce minerály musia ležať v tej istej nadrovine [5], [9].

Nadrovina 3P v štvorrozmernom priestore 4P je všeobecne určená štyrmi bodmi (musia byť splnené určité podmienky, ktoré tu nebudeme uvádzať). Ak chceme zistiť, či určitý minerál s tými istými zložkami, akými zložkami sú charakterizované minerály tvoriace určitý izomorfný rad, patrí do tohoto radu, stačí ak dokážeme, že bod reprezentujúci tento minerál v 4P , leží v nadrovine 3P určenej štyrmi bodmi zobrazujúcimi štyri minerály z príslušného izomorfného radu.

1. Začlenenie silikátu. Kryštalochemické vzorce, získané prepočtom kompletnej chemickej analýzy, sú jednou z dôležitých charakteristík ílových materiálov. Grafické zobrazenie kryštalochemických vzorcov dá sa uskutočniť rôznymi zobrazovacími metódami. Tak napr. boli zobrazené *dvojrastevné silikáty* [7] vo vektorovom premietaní trojrozmerného priestoru 3P . *Trojvrstevné silikáty* zobrazíme v štvorrozmernom priestore 4P . Na určenie príslušnosti silikátu [10] bola použitá staršia zobrazovacia metóda v 4P a metóda vektorového premietania v 4P pri použití pentasterickej súradnej sústavy [12]. Na určenie príslušnosti silikátu použijeme kótovane-vektorovú zobrazovaciu metódu v 4P . Z tabuľky III [10], v ktorej je podaný prehľad silikátov – montmorillonitov, vyberieme silikáty č. 2, 5, 7, 9.

silikát	zložky v %				
	Si^{4+}	Al^{3+}	Al^{3+}	Fe^{3+}	Mg^{2+}
2	64,20	1,50	27,60	0,70	6,00
5	66,10	0,70	25,90	2,30	5,00
7	61,80	4,60	24,00	3,20	6,00
9	63,20	1,80	21,90	0,80	12,30

Vyberme ďalší silikát č. 6

6	64,50	2,40	25,20	3,50	4,40
---	-------	------	-------	------	------

Vyššie uvedené hodnoty zložiek sú hodnoty iónov s tetraedrickou a oktaedrickou koordináciou získané vždy prepočtom chemických analýz jednotlivých minerálov, kde Si^{4+} a Al^{3+} majú tetraedrickú koordináciu iónov a Al^{3+} , Fe^{3+} , Mg^{2+} oktaedrickú koordináciu iónov.

Silikáty 2, 5, 7, 9 patria k silikátom – montmorillonitom. Treba zistiť, či silikát 6 patrí tiež do tejto skupiny silikátov.

Jednotlivé minerály 2, 5, 6, 7, 9 sú reprezentované obrazmi 2_1 , $2'(6)$, 5_1 , $5'(5)$, 6_1 , $6'(4,4)$, 7_1 , $7'(6)$, 9_1 , $9'(12,3)$ bodov 2, 5, 6, 7, 9, ktoré sme zobrazili (podľa vety 1,1) vo zvolenej mierke kótovane-vektorovou zobrazovacou metódou v 4P ($Al^{3+} = x$, $Al^{3+} = y$, $Fe^{3+} = z$, $Mg^{2+} = u$) (obr. 6).

Príslušnosť silikátu 6 určíme tak, že vyšetríme, či priamka q vedená bodom 6 a jedným bodom (napr. 2) nadroviny Ψ určenej bodmi 2, 5, 7, 9 pretína rovinu ϱ určenú bodmi 5, 7, 9. Ide teda o vyriešenie priesečníka priamky q s nadrovinou 3P podľa def. 5,1, konštr. 5,1.

V kolmopremietajúcej rovine π^q priamky q je krycia priamka $l \subset \Psi$ ($q_1 \equiv l_1$; $l_1 \cap 5_1$, $7_1 = 1'_1$; $l_1 \cap 7_1 9_1 = 2'_1$; odvodíme ďalej $l' = '1' '2'$ na príslušných spojnicach bodov $'1' \in 5'7'$; $'2' \in 7'9'$). Nájdemé súradnice $u_1 = 5,44$ a $u_2 = 9$ vystupňovaním $5'(5)$ $7'(6)$ a $7'(6)$ $9'(12,3)$. Potom sklopíme priamku q ($(q) = (2) (6)$) a priamku l ($(l) = (1') (2')$), kde $(l) \cap (q) = (Q)$ a ďalej $[q] = [2] [6]$ a $[l] = [1'] [2']$. Určíme $[Q'] \in [l]$ a $[Q'] \in [q]$.

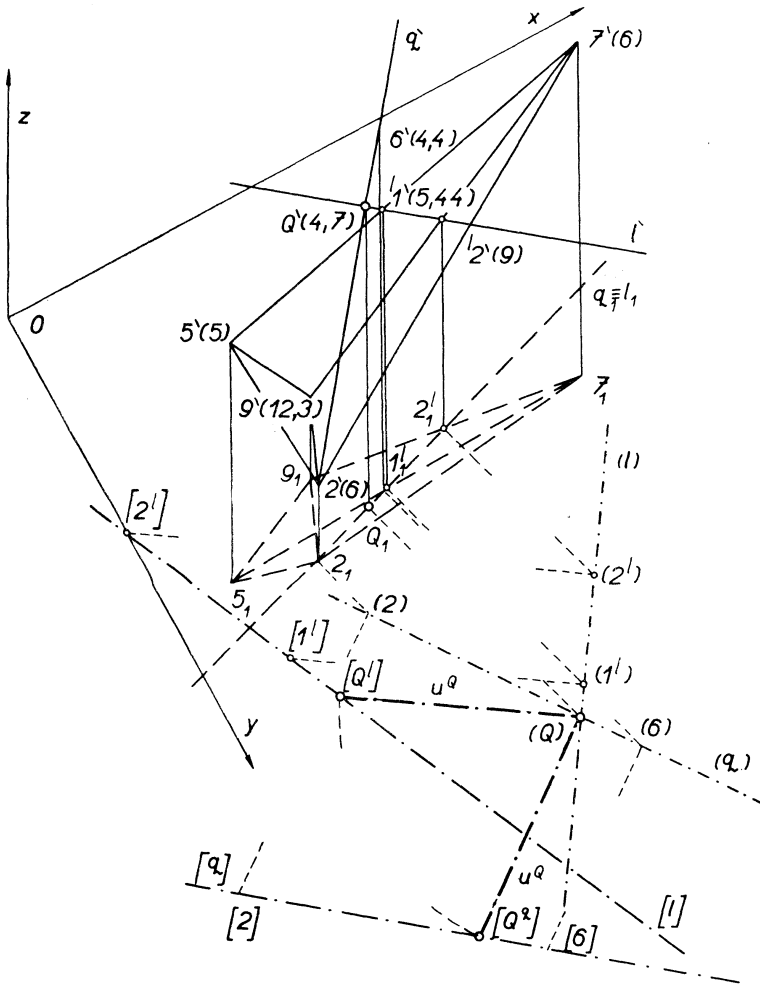
Pretože súradnice u_Q bodu Q na priamke q je rovná súradnici u_Q bodu Q na priamke l usudzujeme, že bod Q leží v rovine $\varrho = 579$. Tým sme dokázali, že bod 6 leží v nadrovine $\Psi = 2579$ a minerál 6 prislúcha do tej istej skupiny silikátov (t.j. montmorillonitov) ako minerály 2, 5, 7, 9.

IV. ZOBRAZENIE CHEMICKÝCH SÚSTAV SO ŠTYRMI ZLOŽKAMI

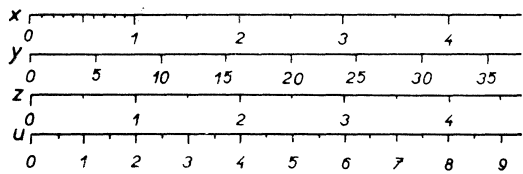
Zložky zobrazených chemických sústav vyjadrujú vzťahy koncentrácií zložiek chemickej sústavy, závislosti zložiek a tým aj vlastnosti sústav. Tak napr. na zobrazenie štvoritého systému bol použitý tetraéder [7], [8]. V ďalšom ukážeme zobrazenie chemických sústav (napr. zliatin) so štyrmi zložkami ako aj určité operácie s nimi v štvorrozmernom euklidovskom lineárnom priestore 4P .

1. Určenie percentuálneho zastúpenia zložiek výslednej sústavy dvoch štvoritých chemických sústav. Dané sú dve chemické sústavy L, M s tými istými zložkami A, B, C, D s rôznym percentuálnym zastúpením takto:

L : $a = 16\%$ zložky A , $b = 18\%$ zložky B , $c = 36\%$ zložky C , $d = 30\%$ zložky D , pričom $a + b + c + d = 100\%$; M : $a = 60\%$ zložky A , $b = 11\%$ zložky B , $c = 16\%$ zložky C , $d = 13\%$ zložky D , kde opäť $a + b + c + d = 100\%$. Súčet koncentrácií



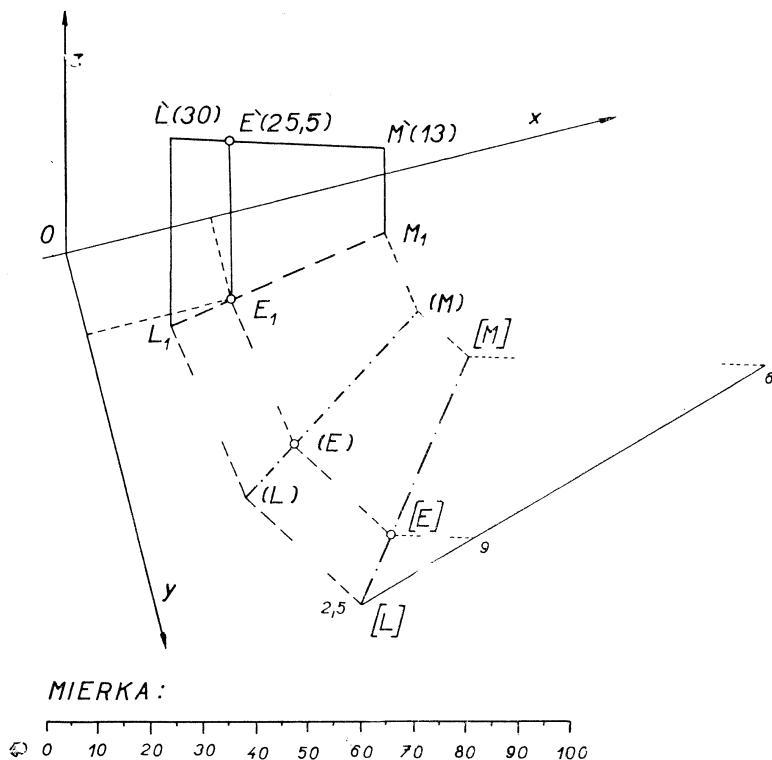
MIERKY:



Obr. 6.

všetkých zložiek každej sústavy teda = 100%. Váhové množstvá sústav: $L = 6,5$ kp; $M = 2,5$ kp. Treba určiť výslednú sústavu zmesi daných sústav L, M .

Ak dáme do súvisu zložky sústavy so súradnicami $[0; x, y, z, u]$ kótovane-vektorovej zobrazovacej metódy v 4P tak, že $a = x, b = y, c = z, d = u$, budú sústavy L a M reprezentované kótovane-vektorovými priemetmi bodov $L_1, L(30), M_1, M'(13)$ (obr. 7).



Obr. 7.

Výslednú sústavu, resp. jej zložky, nájdeme pomocou sklopení $\overline{(L)(M)}$, $\overline{[L][M]}$ úsečky \overline{LM} . Na obr. 7 bolo pákové pravidlo (výsledná sústava bude zobrazená bodom na priamke LM , ktorý vytína úsečky v obrátenom pomere k váhovým množstvám sústav L a M) použité na sklopenej polohe $\overline{[L][M]}$ a nájdený bol bod $[E]$. Zo sklopenej polohy bodu $[E]$ nájdeme späťne $(E), E_1$ a $E'(25,5)$. Odčítame súradnice bodu E (28; 16; 30,5; 25,5), z čoho usudzujeme o zložkách výslednej sústavy E : $a = 28\%$ zložky A , $b = 16\%$ zložky B , $c = 30,5\%$ zložky C , $d = 25,5\%$ zložky D . Váhové množstvo $E = 9$ kp.

Poznámka. Pákové pravidlo môžeme použiť na začiatočnom priemete L_1M_1 alebo na LM' úsečky \overline{LM} , nájsť E_1 alebo E' , odčítať súradnice x, y, z , resp. zložky a, b, c , a doplniť do 100%; čiže $100 - a + b + c = d$ sústavy E . Sklápanie úsečky môžeme uskutočniť tiež iným spôsobom [9].

2. Diagram určenia výslednej sústavy troch chemických sústav so štyrmi zložkami a jednej s tromi zložkami. Chemické sústavy L, M, N, P sú dané ako vo vyššie uvedeních prípadoch podľa tabuľky

chemická sústava	zložky v %				váhové množstvá
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
<i>L</i>	13,5	10,3	42,2	34	8 kp
<i>M</i>	34,5	43,2	12,3	10	3 kp
<i>N</i>	84	6	10	—	11 kp
<i>P</i>	28	35	38,5	30	38 kp

Úlohu vyriešime, ak nájdeme výslednú sústavu $G = L + M + N$. Toto dosiahneme určením váhového ťažiska G' trojúholníka $LM'N'$ a potom určíme výslednú sústavu $H = G + P$.

Pomocou pákového pravidla nájdeme $E = L + M (E' \in LM')$. Určíme súradnicu $u_E = 27,5$ bodu E (obr. 8). Podobne zostrojíme $F = M + N (F' \in M'N')$. Potom $E'N' \cap F'L = G'$, čo je váhové ťažisko trojúholníka $LM'N'$. Súradnicu $u_G = 13,5$ bodu G odčítame v sklopení $[G] \in \overline{[E][N]}$, keď predtým sme našli $G_1 \in E_1N_1$ a sklopené $\overline{(E)(G)}$.

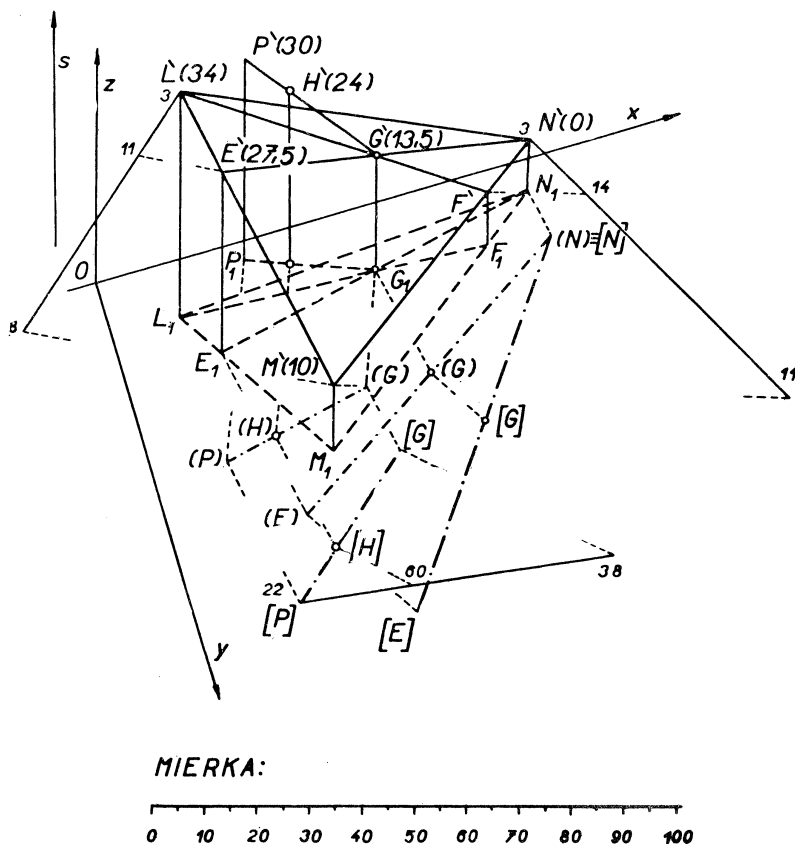
Zostáva ešte nájsť výslednú sústavu dvoch chemických sústav $H = P + G$ podľa predchádzajúceho prípadu. Užitím pákového pravidla nájdeme v sklopení $[H] \in \overline{[P][G]}$ ($P = 38$ kp; $M + N + L = G$ t.j. 8 kp + 3 kp + 11 kp = 22 kp; $P + G = 38$ kp + 22 kp = 60 kp). Späťne odvodíme $(H), H_1, H'(24)$. Známych spôsobom odčítame súradnice bodu $H(37; 6,5; 32,5; 24)$, čo sú čísla vyjadrujúce percentuálne zastúpenie zložiek A, B, C, D výslednej chemickej sústavy podľa tabuľky

chemická sústava	zložky v %				váhové množstvo
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
<i>H</i>	37	6,5	32,5	24	60 kp

Výsledná chemická sústava H sústav L, M, N, P je teda zložená takto: $a = 37\%$ zložky A , $b = 6,5\%$ zložky B , $c = 32,5\%$ zložky C , $d = 24\%$ zložky D . Jej váhové množstvo = 60 kp.

V. ZOBRAZENIE CHEMICKÝCH SÚSTAV S PIATIMI ZLOŽKAMI

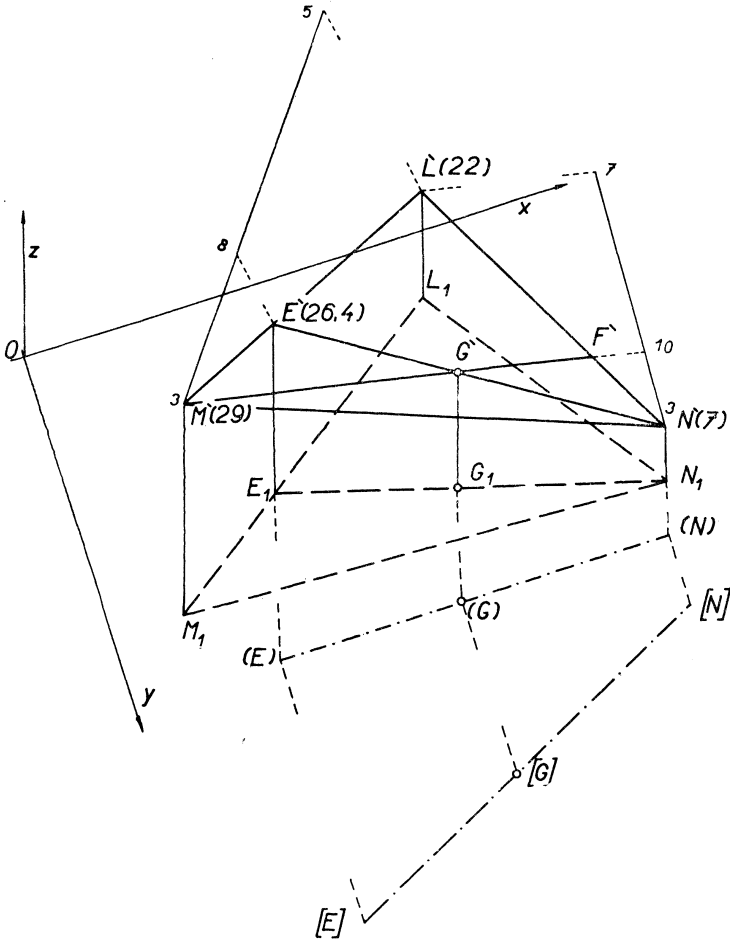
1. Diagram určenia výslednej chemickej sústavy troch päťkomponentných sústav. Treba graficky určiť výslednú chemickú sústavu G (resp. percentuálne zastúpenie jej zložiek) troch päťkomponentných sústav L, M, N , daných zložkami A, B, C, D, E



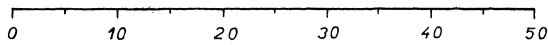
Obr. 8.

v percentách a svojimi váhovými množstvami. Ak uvážime predpoklady a skutočnosti z predchádzajúcich kapitol s tým, že $0 \equiv E$ (čiže $a = x, b = y, c = z, d = u$; súčet koncentrácií všetkých komponent každej sústavy nech je 100%, z čoho vyplýva, že z piatich zložiek sústavy, sú len štyri komponenty nezávislé; piatu zložku vždy vieme určiť) vieme zobrazit $L_1, L(22), M_1, M(29), N_1, N(7)$ podľa tabuľky zložiek vyjadrených v %

chemické sústavy	zložky v %					váhové množstvá
	A	B	C	D	E	
L	38	6	10	22	24	3 kp
M	7	28	20	29	16	5 kp
N	55	30	5	7	3	7 kp



MIERKA:



Obr. 9.

V zásade môžeme riešiť úlohu dvojakým spôsobom:

a) postupne, t.j. nájdeme najprv výslednú chemickú sústavu ľubovoľných dvoch (použijeme pákové pravidlo), ďalej výslednú sústavu tejto sústavy s ďalšou ľubovoľnou sústavou atď., až vyčerpáme všetky sústavy;

b) použijeme váhového ťažiska trojúhelníka troch chemických sústav a pákového pravidla.

Prevedenie prípadu a) je veľmi jednoduché, preto sa nebudeme ním podrobne zaoberať. Odčítanie a určenie súradníc bodu, ktorý reprezentuje výslednú sústavu uskutočníme ako v nasledujúcom prípade b).

V prípade b) postupujeme takto: Zostrojíme kótovane-vektorové obrazy bodu, ktorý reprezentuje výslednú chemickú sústavu daných dvoch sústav L , M (obr. 9) pomocou pákového pravidla z váhových množstiev priamo na koncovom priemete $\overline{M'L} \ni E'$ a vystupňovaním $M'(29)$ $L'(22)$ nájdeme $u_E = 26,4$. Podobne určíme $F' \in LN'$. $M'F' \cap E'N' = G'$, čo je váhové ťažisko trojúhelníka $LM'N'$. Známym spôsobom zostrojíme $E_1N_1 \ni G_1$, $(\overline{E})(N) \ni (G)$, $[\overline{E}][N] \ni [G]$. Po odčítaní súradníc – zložiek bodu G , kde $x = a$, $y = b$, $z = c$, $u = d$ t.j. hodnôt vyjadrujúcich v % zastúpenie zložiek A , B , C , D , určíme zložku E zo vzťahu $e = 100 - a + b + c + d$.

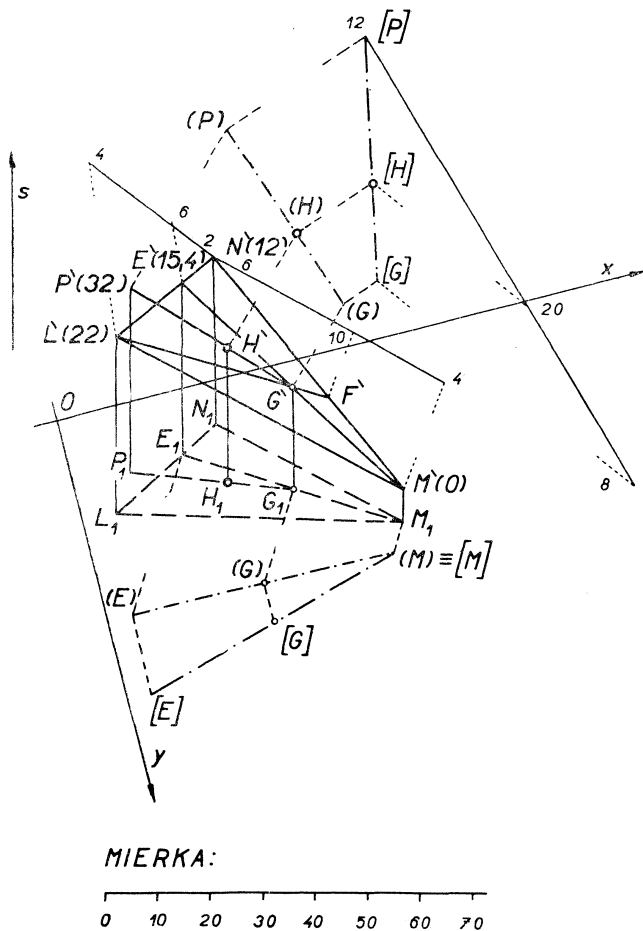
Zastúpenie zložiek a váhové množstvo výslednej chemickej sústavy $G = L + M + N$ je nasledovné:

chemická sústava	zložky v %					váhové množstvo
	A	B	C	D	E	
G	36	24,5	11	17	11,5	15 kp

3. Diagram určenia výslednej chemickej sústavy troch pätkomponentných sústav a sústavy s tromi zložkami. Za predpokladu, že zložky všetkých sústav sú tie isté, len ich percentuálne zastúpenie v sústavách je rôzne, postupujeme obdobne ako v predchádzajúcich prípadoch. Percentuálne zastúpenie zložiek jednotlivých sústav ako aj váhové množstvá je dané v tabuľke

chemická sústava	zložky v %					váhové množstvá
	A	B	C	D	E	
L	6	20	34	22	18	2 kp
M	59	35	6	—	—	6 kp
N	29	8	32	12	19	4 kp
P	11	13	35	32	9	8 kp

Chemické sústavy L , M , N , P zobrazíme kótovane-vektorovou zobrazovacou metódou do bodov $L_1, L'(22), M_1, M'(0), N_1, N'(12), P_1, P'(32)$ štvorrozmerného euklidovského lineárneho priestoru 4P , použijúc opäť prvých štyroch zložiek vyjadrených v % ako súradnic jednotlivých bodov, ktoré reprezentujú tieto sústavy.



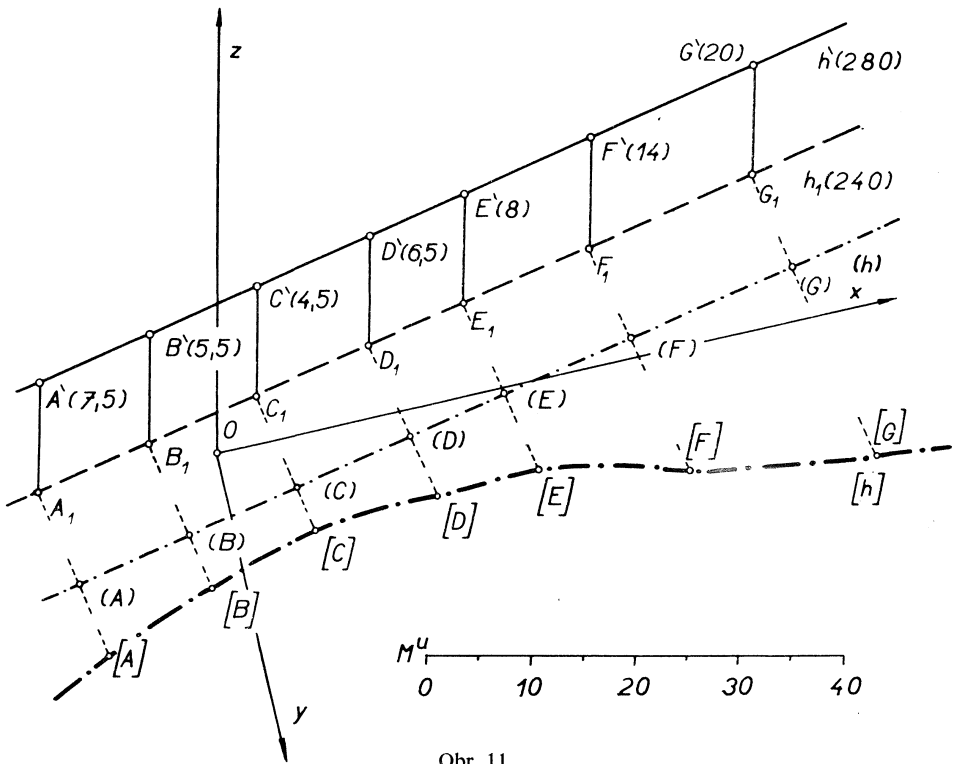
Obr. 10.

Pri určovaní výslednej sústavy $H = L + M + N + P$ zostrojíme najprv váhové ťažisko G' koncového priemetu trojúholníka $L'M'N'$ (použitím pákového pravidla určíme $E = L + N$ z váhových množstiev $6 \text{ kp} = 2 \text{ kp} + 4 \text{ kp}$ a $F = M + N$, $10 \text{ kp} = 6 \text{ kp} + 4 \text{ kp}$; $u_E = 15,4$ dostaneme vystupňovaním alebo sklopením $L'(22)N'(12)$; ďalej $E'M' \cap L'F' = G'$). Súradnicu $u_G = \overline{(G)}[G]$ vidíme v sklopení keď

predtým sme zostrojili $\overline{E_1M_1}$, $\overline{(E)(M)}$ pričom $(M) \equiv [M]$ (obr. 10). Teraz určíme $P + G = H$. Nájďme $\overline{(P)(G)}$, $\overline{[P][G]}$ a tu podľa pákového pravidla určíme $[H]$ ($G = 12 \text{ kp}$, $P = 8 \text{ kp}$, $H = 20 \text{ kp}$). Späťne odvodíme (H) , H' . Znáмым spôsobom odčítame súradnice bodu H , ktoré udávajú percentuálne zastúpenie zložiek A, B, C, D výslednej chemickej sústavy a doplníme do 100%; $a + b + c + d + e = 100\%$. Výsledok vidieť v tabuľke

chemická sústava	zložky v %					váhové množstvo
	A	L	C	D	E	
H	28,5	19,5	12,5	17,5	9	20 kp

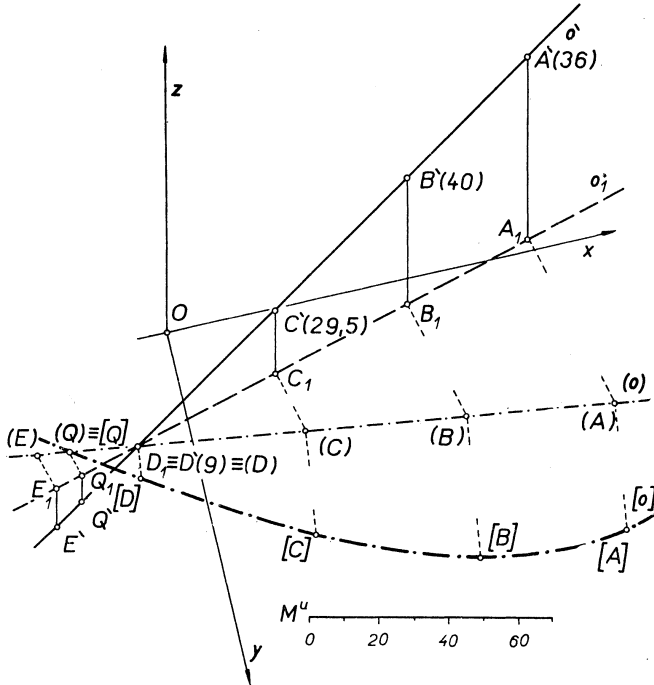
Vyššie uvedenými spôsobmi môžeme určiť výslednú chemickú sústavu i viac ako štyroch päťkomponentných sústav a to pri použití pákového pravidla a váhového ťažiska trojuholníka.



Obr. 11.

VI. ZNÁZORNENIE KOVNATOSTI ŽILY A VRTU

1. Diagram kovnatosti žily v bodoch priamočiarej horizontálnej chodby. Uvažujme horizontálnu banskú chodbu s osou h (280), na ktorej zvolíme vhodné body A, B, C, D, E, F, G s polohovými súradnicami x, y, z . V týchto bodoch bola zistená kovnosť v ‰: $u_A = 7,5\%$; $u_B = 5,5\%$; $u_C = 4,5\%$; $u_D = 6,5\%$; $u_E = 8\%$; $u_F = 14\%$; $u_G = 20\%$ [12].



Obr. 12.

Rovinu úrovné 240 zvolíme za priemeňňu (i nákrešňu) π a známym spôsobom z vektorového premietania 3P vynesieme súradnice x, y, z príslušných bodov v primeranej mierke a súradnice u pripíšeme (ako kóty) ku koncovým prietom bodov (obr. 11), takže dostaneme $A_1, A'(7,5), B_1, B'(5,5), C_1, C'(4,5), \dots G_1, G'(20)$. Sklopme h' (280) do priemetne v úrovni 240 t.j. do (h). Po sklopení všetkých bodov $A, B, \dots G$ do $[A], [B], \dots [G]$ ich spojnicu – krivku $[h]$, za predpokladu spojitej zmeny kovnatosti, znázorňuje zmenu kovnatosti v smere chodby.

Na sklopenej polohe $[h]$ krivky kovnatosti môžeme názorne sledovať priebeh kovnatosti žily. Minimálna kovnosť javí sa v okolí bodu C (280), v ktorom dotyčnica krivky kovnatosti je $\parallel (h)$. Kovnosť žily smerom k bodu G stúpa.

2. Diagram kovnatosti v bodech prieskumného vrtu. Zvoľme na osi o šikmého priamočiareho vrtu vhodné body A (352), B (336), C (318), D (300), E (289). Rovinu úrovne bodu D (300) zvoľme za priemetňu. Polohové súradnice vieme zistiť a tak vieme zobraziť priemety bodov: $A_1, A'(36), B_1, B'(40), \dots, E_1, E'(0)$. Kóty pri koncových priemetoch bodov sú zistené kovnatosti, ktoré predstavujú súradnice $u_A = 36\%$; $u_B = 40\%$; $u_C = 29,5\%$; $u_D = 9\%$; $u_E = 0\%$ (v bode E kovnatosť nebola zistená) príslušného bodu (obr. 12). Ak zostrojíme $o_1(o)$ a $[A], [B], \dots, [D]$, ktoré ak je zmena kovnatosti spojitá, môžeme spojiť krivkou kovnatosti $[o]$.

Ak predĺžime priebeh krivky kovnatosti (interpoláciou) $[o]$ za bod $[D]$, dostaneme v priesečníku $[o] \cap (o)$ bod $(Q) \equiv [Q]$ uvažovaného vrtu. Ak v danom prípade napr. súradnice $z_Q = -10$, potom nadmorská výška bodu Q je 290 m a v ňom predpokladáme vyhluchnutie vrtu.

VII. ZÁVER

Zo zobrazovacích metód štvorrozmerného euklidovského lineárneho priestoru 4P , sú len niektoré vhodné pre technickú prax. Len niektoré z nich bývajú preto používané na riešenie technických problémov. Voľba metódy pre praktické použitie závisí od viacerých činiteľov najmä však od: a) prehľadnosti a ľahkej „čitateľnosti“; b) názornosti vzťahov; c) jednoduchého prevedenia konštrukcií a tým aj od rýchleho dosiahnutia výsledkov.

Cieľom tejto práce bolo ukázať na riešených príkladoch z mineralógie resp. z kryštalografie, z chémie resp. z metalurgie a na príkladoch z banského meračstva, na možnosť a vhodnosť použitia kótovane vektorovej zobrazovacej metódy v štvorrozmernom euklidovskom lineárnom priestore 4P . Za tým účelom bolo prevedené riešenie základných úloh pomocou uvedenej zobrazovacej metódy.

Metóda je výhodná najmä pre jednoduchosť konštrukcií a pre prehľadnosť výsledkov. Môžeme ju použiť tiež na riešenie problémov rôznych technických oborov.

Literatúra

- [1] *Dalman, H.*: Einführung in eine Darstellende Geometrie des vierdimensionalen Raumes. Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich-Schiller-Universität, Jena, Jahrgang 6, Heft 3/4, 1956/57, 211—217.
- [2] *De Vries, Hk.*: Die vierte Dimension, Ins Deutsche übertragen von R. Struik. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1926.
- [3] *Harant, M.*: Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom euklidovskom priestore. Spisy, vyd. Přír. fak. MU, č. 379, Brno, 1956, 455—485.
- [4] *Hilbert, D.*: Grundlagen der Geometrie. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1922.
- [5] *Klíma, J.*: Deskriptivní geometrie čtyřrozměrného prostoru. Sborník Vysoké školy technické v Brne, sv. XII., spis 44., Brno, 1938.

- [6] Klimčík, J.: Vektorové premietanie a jeho použitie. Aplikace matematiky, zv. 11., ČSAV, Praha, 1966, 467—477.
- [7] Klimčík, J.; Radzo, V.: Grafické zobrazenie kryštalochemických vzorcov halloyzitov a kaolinitu. Sborník vedeckých prác VŠT, zv. 2., Košice, 1966, 27—34.
- [8] Klimčík, J.: Diagram chemickej sústavy so štyrmi zložkami vo vetkorovom premietaní a niektoré z jeho použití. Sborník vedeckých prác VŠT, zv. 1., Košice, 1967.
- [9] Klimčík, J.: Kótovane-vektorová zobrazovacia metóda v 4P . Úlohy polohy. Sborník vedeckých prác VŠT, zv. 2., Košice, 1967.
- [10] Klimčík, J., Radzo, V.: Grafické zobrazenie trojvrstevných silikátov. Sborník vedeckých prác VŠT, zv. 2., Košice 1967.
- [11] Klimčík, J., Kopas, M.: Výhodné zostrojenie priestorového diagramu zliatiny s tromi zložkami. Sborník vedeckých prác VŠT, zv. 2., Košice, 1967.
- [12] Klimčík, J., Maligda, J.: Príspevok k použitiu pentasterickej súradnej sústavy vektorového premietania štvorrozmerného priestoru 4P . Sborník vedeckých prác VŠT, zv. 1., Košice, 1967.
- [13] Методы начертательной геометрии и его приложения. Sborník statej pod redakciej N. F. Četveruchina, Moskva, 1955.
- [14] Nagy, L.: Úlohy polohy v kótovane-Mongeovom zobrazení v E_4 . Acta facul. rerum nat. UC, tom. IV., fasc. III.—V., Bratislava, 1959.
- [15] Schoute, P. H.: Mairdimensionale Geometrie I. G. J. Göschen'sche Verlags-handlung, Leipzig, 1902.

Summary

SOLUTION OF SOME ENGINEERING PROBLEMS BY DIMENSIONAL VECTOR REPRESENTATION METHOD IN 4P

JOZEF KLIMČÍK

The first two sections of this work deal with the basis of the dimensional-vector representation method in the Euclidean four-dimensional linear space 4P . There are graphical solutions of elementary tasks needful for this paper.

The further sections of this paper bring forward solutions of some crystallographic, chemical and mine surveying problems, e.g. assigning of silicates to the group of silicates-montmorillonites, determination of the percentage content of components of the resulting chemical system of two, three, four chemical systems with two, three, four, and five components, drawing a diagram of a vein metal content, etc.

The solution of actual problems of engineering practice proved the convenience and advantages of employing this new representation method in 4P because of its simplicity and lucidity of constructions.

Adresa autora: Ing. Jozef Klimčík CSc., Švermova 5, Košice.