Aplikace matematiky

Adolf Karger

Grundlagen der räumlichen kinematischen Geometrie. I.

Aplikace matematiky, Vol. 14 (1969), No. 2, 87–93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103211

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

GRUNDLAGEN DER RÄUMLICHEN KINEMATISCHEN GEOMETRIE I

ADOLF KARGER

(Eingegangen am 23. Juni 1967)

1. EINFÜHRUNG

Im Artikel sind die fundamentalen Beziehungen der kinematischen räumlichen Geometrie auf dem Grund der Theorie der Lieschen Gruppen und Algebras abgeleitet. Zuerst wird gezeigt, daß die Liesche Algebra der Lieschen Gruppe der gewöhnlichen Kongruenzen in dem Raum E_3 eigentlich die Algebra der sogenannten dualen Vektoren ist. Die Anwendung des Apparates der dualen Vektoren in der klassischen Auffassung der räumlichen kinematischen Geometrie ist also natürlich. Zugleich folgt daraus, daß die in dieser Arbeit benützte Arbeitsmethode keine grundsätzliche Bereicherung des in der Raumkinematik benützten Apparats mit sich bringen kann.

Die Prozedur der Ableitung von Frenetschen Formeln für die räumliche Bewegung ist folgend:

Der Regelfläche wird das einparametrige System der Cartanschen Unteralgebras der Lieschen Algebra $\mathfrak{g}$ der Gruppe von räumlichen Kongruenzen beigeordnet — es sind die Lieschen Algebras der isotropischen Gruppen einzelner erzeugender Geraden. Die Invarianten dieses Systems sind dann gefunden und zugleich wird gezeigt, daß sie eben die Invarianten der gegebenen Regelfläche sind.

Wenn nun die Bewegung gegeben wird, kann man den Vektor des Richtkegels in die Cartansche Unteralgebra, die durch diesen Vektor bestimmt wird, einbetten. (Wir setzen voraus, daß der Vektor des Richtkegels das reguläre Element aus $\mathfrak{g}$ ist.) Wir gewinnen damit einparametrige Systeme der Cartanschen Unteralgebras und können vielleicht die Invarianten der Bewegung finden.

Die beigeordnete Vektorbewegung der räumlichen Bewegung ist die sphärische Bewegung. Da die Frenetschen Formeln für räumliche Bewegung die Formeln für beigeordnete Vektorbewegung als einen Teil enthalten, ist damit der Zussammenhang zwischen der räumlichen und der sphärischen kinematischen Geometrie beschrieben.

2. LIESCHE ALGEBRA DER LIESCHEN GRUPPE VON KONGRUENZEN IN DEM RAUM

Es sei die Liesche Gruppe $\boldsymbol{G}$ der geraden Kongruenzen des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathscr{E}_3$ gegeben, und $\mathfrak{g}$ sei ihre Liesche Algebra. Man kann jeden Vektor $X \in \mathfrak{g}$ in der Form

$$(1) \qquad X = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ a_1, & 0, & -b_3, & b_2 \\ a_2, & b_3, & 0, & -b_1 \\ a_3, & -b_2, & b_1, & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben. Bezeichnen wir E^i_j die Matrizen der Standardbasis der Algebra $\mathfrak{gl}(4)$, also $E^i_j(a^\alpha_\beta) = \delta^{i\alpha}\delta_{j\beta}$, wo $i, j, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ sind. Bezeichnen wir $\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ i\,j\,k \end{pmatrix}$, $B_i = \varepsilon_{ijk}E^k_j$. Dann kann man den Vektor $X \in \mathfrak{g}$ als ein Paar $X = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)$ der gewöhnlichen Vektoren $\boldsymbol{x}_2$ und $\boldsymbol{x}_1$, wo $\boldsymbol{x}_1 = \sum_{i=1}^{3} a_i E^i_0$ und $\boldsymbol{x}_2 = \sum_{i=1}^{3} b_i B_i$ ist, schreiben.

Bezeichnen wir $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ das übliche Vektorprodukt der gewöhnlichen Vektoren und es seien $X = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)$, $Y = (\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_1)$ die beliebigen Vektoren aus $\mathfrak{g}$. Dann gilt

$$(2) \qquad [X, Y] = [(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1), (\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_1)] = (\boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{y}_1, + \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{y}_2)\,.$$

Man siehr aus der Beziehung (2), daß $\mathfrak{g}$ die Algebra der sogenannten dualen Vektoren ist. (Bemerkung: Die Algebra der dualen Vektoren ist als eine Algebra über dem Körper der reellen Zahlen betrachtet.)

Bedienen uns im weiteren dieser invarianten quadratischen Formen auf $\mathfrak{g}$:

$$(3) \qquad \langle X, X\rangle = \sum_{i=1}^{3} (b_i)^2 \quad \text{und} \quad \{X, X\} = 2\sum_{i=1}^{3} (a_i b_i)\,,$$

wo X die Koordinaten wie in (1) hat.

Bezeichnen wir

$$E = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

und betrachten wir den Vektorraum $\boldsymbol{F} = \mathfrak{g} \oplus \{E\}$. Wenn $X = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \in \mathfrak{g}$ ist, dann gilt $[X, E] = (0, \boldsymbol{x}_1)$. Der Vektorraum $\boldsymbol{F}$ ist also die Liesche Algebra. Der dreidimensionale euklidische Raum $\boldsymbol{E}_3$ wird in $\boldsymbol{F}$ durch die Gleichung $X = E + (0, \boldsymbol{x}_1)$ definiert. Sein Stellung V_3 wird durch die Vektoren $V = (0, \boldsymbol{x}_1) = \sum_{i=1}^{3} a_i E^i_0 \in \mathfrak{g}$ gebildet. Seine Metrik ist durch die invariante Form $(V; V) = \sum_{i=1}^{3} (a_i)^2$, welche zugleich die Metrik in $\boldsymbol{E}_3$ ergibt, gegeben. Da die Gruppe ad $\boldsymbol{G}$ in diesem E_3 eben so, wie die Gruppe $\boldsymbol{G}$ im vorigen Raum $\mathscr{E}_3$ operiert, werden wir uns im folgenden nur mit der Gruppe ad $\boldsymbol{G}$ und dem Raum $\boldsymbol{E}_3$ befassen.

Es sei $X = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \in \mathfrak{g}$ und $\boldsymbol{x}_2 \neq 0$. Der durch Vektoren X und $Y = (0, \boldsymbol{x}_2)$ generierte Vektorraum bildet eine komutative Unteralgebra der Algebra $\mathfrak{g}$; bezeichnen wir sie $\mathfrak{h}_X$. ($\mathfrak{h}_X$ ist natürlich die Cartansche Unteralgebra in $\mathfrak{g}$, die das reguläre Element X enthält.) In $\mathfrak{h}_X$ existieren solche Vektoren h_1 und h_2, daß

$$\{h_1, h_1\} = \langle h_2, h_2 \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle h_1, h_1 \rangle = (h_2; h_2) = 1 \tag{3}$$

gilt. (Dann ist auch $\langle h_1, h_2 \rangle = \{h_2, h_2\} = 0$ und $\{h_1, h_2\} = 1$.) Dabei setzen wir voraus, daß die zweite Komponente des Vektors h_2 so orientiert wird, daß sie der ersten Komponenten des Vektors h_1 gleicht. Dann existieren genau zwei Paare h_1, h_2. Wir werden die durch die Vektoren h_1, h_2 gebildete Basis kanonische Basis nennen. Es geht offensichtlich aus ihrer Konstruktion hervor, daß sie nicht von ad $\boldsymbol{G}$ abhängt.

Es sei eine (genügendmal differenzierbare) Regelfläche in $\boldsymbol{E}_3$ gegeben, deren sphärisches Bild keine singuläre Punkte hat. Setzen wir voraus, daß sie durch die Gleichung

$$\mathscr{X}(\mathrm{t}, \mathrm{u}) = E + (0, \boldsymbol{x}_2(\mathrm{t}) \times \boldsymbol{x}_1(\mathrm{t}) + \mathrm{u} \,.\, \boldsymbol{x}_2(\mathrm{t}))$$

gegeben ist. Es sei $(\boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_2) = 1$ und $(\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{x}_2) = 0$. Finden wir die isotropische Algebra $\mathfrak{h}_{\mathscr{X}(\mathrm{t}_0, \mathrm{u})}$ der Geraden $\mathscr{X}(\mathrm{t}_0, \mathrm{u})$, bezeichnen wir sie kurz $\mathfrak{h}_X$. Leicht resultieren wir, daß $\mathfrak{h}_X$ durch die Vektoren $\mathbf{R}_1 = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)$ und $\mathbf{R}_2 = (0, \boldsymbol{x}_2)$ generiert ist. Die Vektoren $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$ bilden die kanonische Basis in $\mathfrak{h}_X$, denn sie erfüllen (3). Die durch Vektoren $\dot{\mathbf{R}}_1$ und $\dot{\mathbf{R}}_2$ generierte kommutative Unteralgebra werden wir die tangentiale Unteralgebra nennen. Bezeichnen wir sie $\mathfrak{t}_X$. Wählen wir die kanonische Basis $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ in $\mathfrak{t}_X$. Weiter wählen wir den Parameter t so, damit $\dot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{T}_2$ gilt. In diesem Fall nennen wir ihn den Bogen und bezeichnen ihn s. Setzen wir im folgenden voraus, daß die Fläche als Funktion der Parameter s und u gegeben ist. Aus der Definition der Vektoren $\mathbf{R}_2$ und $\mathbf{T}_2$ sieht man, daß s der Bogen des sphärischen Bildes der Fläche ist. Nennen wir die durch die Vektoren $\mathbf{N}_1 = [\mathbf{R}_1, \mathbf{T}_1]$, $\mathbf{N}_2 = [\mathbf{R}_1, \mathbf{T}_2] = -[\mathbf{R}_2, \mathbf{T}_1]$ generierte kommutative Unteralgebra die normale Unteralgebra. Die Vektoren N_1 und N_2 bilden ihre kanonische Basis. Die normale Unteralgebra bezeichnen wir $\mathfrak{n}_X$.

Satz 1. *Man kann für die Algebras $\mathfrak{h}_X$, $\mathfrak{t}_X$, $\mathfrak{n}_X$ der Regelfläche $\mathscr{X}$ die Frenetschen Formeln schreiben:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_1}{\mathrm{d}s} = \mathbf{T}_1 + \sigma_1 \mathbf{T}_2 \,, && \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_2}{\mathrm{d}s} = \mathbf{T}_2 \,, \\
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}_1}{\mathrm{d}s} = -\mathbf{R}_1 + k\mathbf{N}_1 - \sigma_1 \mathbf{R}_2 - \sigma_2 \mathbf{N}_2 \,, && \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}_2}{\mathrm{d}s} = -\mathbf{R}_2 + k\mathbf{N}_2 \,, \\
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}_1}{\mathrm{d}s} = -k\mathbf{T}_1 + \sigma_2 \mathbf{T}_2 \,, && \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}_2}{\mathrm{d}s} = -k\mathbf{N}_2 \,.
\end{aligned} \tag{4}$$

s ist dabei der Bogen des sphärischen Bildes der Fläche, k ist die sphärische Krümmung des sphärischen Bildes der Fläche, σ_1 ist der distributive Parameter und σ_2 ist die übrige Invariante der Fläche. ([1].)

Beweis. Mit Rücksicht darauf, daß wir zugleich die geometrische Bedeutung der Invarianten finden wollen, führen wir die direkte Ausrechnung durch. Der Beweis der ersten Formel der zweiten Zeile ist kompliziert, der Rest ist einfach. Da die Ausrechnung mechanisch ist, führen wir nur die Hauptteile ein. Bezeichnen wir die Determinante der Vektoren $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ aus V_3 als $|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|$. Dann bekommen wir

$$\mathbf{T}_1 = (\dot{\boldsymbol{x}}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_1 - (\dot{\boldsymbol{x}}_1; \dot{\boldsymbol{x}}_2)\, \dot{\boldsymbol{x}}_2)\,, \quad \mathbf{T}_2 = (0, \dot{\boldsymbol{x}}_2)\,,$$

$$\mathbf{N}_1 = (\boldsymbol{x}_2 \times \dot{\boldsymbol{x}}_2, \boldsymbol{x}_2 \times \dot{\boldsymbol{x}}_1 + \boldsymbol{x}_1 \times \dot{\boldsymbol{x}}_2 - (\dot{\boldsymbol{x}}_1; \dot{\boldsymbol{x}}_2)\, \boldsymbol{x}_2 \times \dot{\boldsymbol{x}}_2)\,, \quad \mathbf{N}_2 = (0, \boldsymbol{x}_2 \times \dot{\boldsymbol{x}}_2)\,,$$

$$k = (\mathbf{T}_2; \mathbf{N}_2) = |\boldsymbol{x}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_2, \ddot{\boldsymbol{x}}_2|\,.$$

Man sieht aus der Beziehung für k, daß k wirklich die sphärische Krümmung ist. ([1].)

$$\dot{\mathbf{T}}_1 + \mathbf{R}_1 - k\mathbf{N}_1 = (0, \ddot{\boldsymbol{x}}_1 - (\dot{\boldsymbol{x}}_1; \dot{\boldsymbol{x}}_2)^{\cdot} \,.\, \dot{\boldsymbol{x}}_2 - (\dot{\boldsymbol{x}}_1; \dot{\boldsymbol{x}}_2)\, \ddot{\boldsymbol{x}}_2 + \boldsymbol{x}_1)\,.$$

Wenn wir die Komponenten dieses Vektors in der Basis $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{N}_2$ finden, bekommen wir:

1. Die Komponente in $\mathbf{T}_2$ ist gleich Null.

2. Die Komponente in $\mathbf{R}_2$ ist gleich $-(\dot{\boldsymbol{x}}_1; \dot{\boldsymbol{x}}_2)$. Diese Komponente ist wirklich der negativ genommene distributive Parameter der Fläche.

3. Die Komponente in $\mathbf{N}_2$ ist gleich

$|\ddot{\boldsymbol{x}}_1, \boldsymbol{x}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_2| + |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dot{\boldsymbol{x}}_2| - k(\dot{\boldsymbol{x}}_1; \dot{\boldsymbol{x}}_2)$. Diese Komponente ist wirklich der negativ genommenen übrigen Invariante gleich ([1]). Den Rest beweisen wir ähnlich. Der Satz ist also bewiesen.

4. INVARIANTEN DER RÄUMLICHEN BEWEGUNG

Die Bewegung $g(\mathrm{t})$ aus $\boldsymbol{G}$ sei der Klasse mindestens C^5 und es sei $\mathbf{R}(\mathrm{t})$ ihr Richtkegel (der Rastrichtkegel). $\mathbf{R}(\mathrm{t}) = (\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1)$. Setzen wir voraus, das der Parameter t kanonisch ist, d.h. $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle = 1$ ([2]). Die zugeordnete Vektorbewegung hat zwei invariante Unterräume ([3]):

a) $\mathscr{V}_0 = \{(0, \boldsymbol{r}_2)\}$,

b) $\mathscr{V}_1$ ist solcher 2-dimensionaler Unterraum, daß $\mathscr{V}_0$ und $\mathscr{V}_1$ senkrecht sind.

Das 1^m-System wird durch den ganzen Raum $\boldsymbol{E}_3$ gebildet. Es hat also triviale Bedeutung und wir werden es nicht betrachten. Das 0^m-System ist eine Regelfläche. Sie ist durch die Punkte $X = E + (0, \boldsymbol{x}_1)$ aus $\boldsymbol{E}_3$ gebildet, für welche ([3]) gilt:

$$[\mathbf{R}, X] \in \mathscr{V}_0\,. \tag{5}$$

Diese Regelfläche wird die Rastpohlfläche genannt. Lösen wir die Gleichung (5). Nach der Multiplizierung bekommen wir die Gleichung

$$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{x}_1 = \lambda \boldsymbol{r}_2\,, \quad \text{wo } \lambda \text{ die reelle Zahl ist}\,.$$

Wir wissen ([3]), daß die Lösung (für jedes t) eine Gerade ist und ihre Richtung wird durch den Vektor $(0, \boldsymbol{r}_2)$ bestimmt. Es genügt also einen Punkt der Gerade zu finden. Wie sehen leicht, daß der Punkt $Y = E + (0, \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1)$ die Beziehung (5) erfüllt. Die Rastpohlfläche ist also durch die Gleichung

$$\mathscr{X}(\mathrm{t}, \mathrm{u}) = E + (0, \boldsymbol{r}_2(\mathrm{t}) \times \boldsymbol{r}_1(\mathrm{t}) + \mathrm{u}\,.\,\boldsymbol{r}_2(\mathrm{t}))$$

gegeben.

Betten wir nun der Vektor **R** in die isotropische Algebra $\mathfrak{h}_X$ der Geraden der Rastpohlfläche ein. (Aus der Gleichung der Rastpohlfläche sieht man leicht, das es möglich ist.) Wählen wir in $\mathfrak{h}_X$ die kanonische Basis $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$. Im folgenden setzen wir voraus, daß $\langle \dot{\mathbf{R}}_1, \dot{\mathbf{R}}_1 \rangle \neq 0$ ist. (In dem Fall, daß $\langle \dot{\mathbf{R}}_1, \dot{\mathbf{R}}_1 \rangle = 0$ für alle t gilt, ist die Rastpohlfläche die Zylinderfläche. Schließen wir diesen Fall aus!) Die Algebras $\mathfrak{t}_X$ und $\mathfrak{n}_X$ sind dann gegeben. Wählen wir in ihnen die kanonische Basen wie in dem Absatz 3. Hinsichtlich der Beziehung (4) gilt dann

Satz 2. *Bei den erwähnten Voraussetzungen und den Bezeichnungen gilt:*

(6)
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + v\mathbf{R}_2\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_1}{\mathrm{d}t} = \varkappa_1 \mathbf{T}_1 + \mu_1 \mathbf{T}_2 \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_2}{\mathrm{d}t} = \varkappa_1 \mathbf{T}_2$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}_1}{\mathrm{d}t} = -\varkappa_1 \mathbf{R}_1 + \varkappa_2 \mathbf{N}_1 - \mu_1 \mathbf{R}_2 - \mu_2 \mathbf{N}_2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}_2}{\mathrm{d}t} = -\varkappa_1 \mathbf{R}_2 + \varkappa_2 \mathbf{N}_2\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}_1}{\mathrm{d}t} = -\,\varkappa_2 \mathbf{T}_1 + \mu_2 \mathbf{T}_2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}_2}{\mathrm{d}t} = -\,\varkappa_2 \mathbf{T}_2\,,$$

wo t, v, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, μ_1, μ_2 *die Invarianten der Bewegung sind.*

Die Formeln der zweiten Spalte sind dabei die Frenetschen Formeln für die zugeordnete Vektorbewegung. (Es ist die sphärische Bewegung.) Der kanonische Parameter t ist der Winkel der Drehung, v ist der Parameter der momentanen Schraubbewegung. Nach dem Vergleich mit (4) erhalten wir weiter:

$$\varkappa_1 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{dt}}\,, \quad \text{wo } s \text{ der Bogen des sphärischen Bildes der Pohlfläche ist,}$$

$$\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = k, \ \frac{\mu_1}{\varkappa_1} = \sigma_1, \ \frac{\mu_2}{\varkappa_1} = \sigma_2.$$

5. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN INVARIANTEN DES RASTRICHTKEGELS UND GANGRICHTKEGELS

Satz 3. *Es seien v, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, μ_1, μ_2 die Invarianten des Rastrichtkegels und es seien $\bar{v}$, $\bar{\varkappa}_1$, $\bar{\varkappa}_2$, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ die Invarianten des Gangrichtkegels. Dann gilt*

$$v = \bar{v}\,, \quad \varkappa_1 = \bar{\varkappa}_1\,, \quad \mu_1 = \bar{\mu}_1\,,$$

$$\varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2 = 1\,, \quad \mu_2 - \bar{\mu}_2 = -v\,.$$

Beweis. Aus den Beziehungen $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + v\mathbf{R}_2$, $\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}_1 + \bar{v}\overline{\mathbf{R}}_2$ und $\mathbf{R} = \operatorname{ad} g(t)\,\overline{\mathbf{R}}$ folgt $\mathbf{R}_1 = \operatorname{ad} g\overline{\mathbf{R}}_1$, $\mathbf{R}_2 = \operatorname{ad} g\overline{\mathbf{R}}_2$ und $v = \bar{v}$. Nach der Differenzierung erhalten wir $\dot{\mathbf{R}}_1 = \operatorname{ad} g\dot{\overline{\mathbf{R}}}_1 + \operatorname{ad} g[\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}}_1]$. Wenn wir betrachten, daß $[\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{R}}_1] = 0$ ist und wenn wir aus den Beziehungen (6) einsetzen, erhalten wir

$$\varkappa_1\mathbf{T}_1 - \mu_1\mathbf{T}_2 = \bar{\varkappa}_1\mathbf{T}_1 - \bar{\mu}_1\mathbf{T}_2 \quad \text{und} \quad \varkappa_1 = \bar{\varkappa}_1\,, \quad \mu_1 = \bar{\mu}_1\,, \quad \mathbf{T}_1 = \operatorname{ad} g\overline{\mathbf{T}}_1\,.$$

Nach der weiteren Ableitung der letzten Beziehung setzen wir wieder aus (6) ein und bekommen $\dot{\mathbf{T}}_1 = \operatorname{ad} g\dot{\overline{\mathbf{T}}}_1 + \operatorname{ad} g[\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{T}}_1]$,

$$\varkappa_2\mathbf{N}_1 = \bar{\varkappa}_2\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1\,, \quad \mu_2\mathbf{N}_2 = \bar{\mu}_2\mathbf{N}_2 - v\mathbf{N}_2 \ \text{und also}\ \varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2 = 1\,, \quad \mu_2 - \bar{\mu}_2 = -v\,.$$

Dieser Satz ist damit bewiesen.

Die räumliche Bewegung ist also (im Sinne der kinematischen Geometrie) gegeben, wenn zwei Regelflächen (Rast- und Gangpohlfläche) gegeben sind, für welche gilt:

1. Ihre sphärische Bilder haben keine singuläre Punkte.
2. Sie berühren sich längs einer erzeugender Geraden.
3. Sie haben den gleichen distributiven Parameter in den entsprechenden erzeugenden Geraden.

Daraus sieht man, daß die entsprechenden Punkte der Striktionlinien bei der Bewegung zusammenfallen werden. (In dem Falle, daß die Pohlflächen abwickelbar sind, fallen die Punkte ihrer Rückkehrkurven zusammen.) Finden wir endlich die Differenz der tangentialen Vektoren der Striktionkurven.

Wenn S bzw. $\bar{S}$ die Striktionlinie der Rast- bzw. Gangpohlfläche ist, dann gilt für ihre tangentiale Vektoren $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ bzw. $\mathrm{d}\bar{S}/\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\mu_2\mathbf{R}_2 - \mu_1\mathbf{N}_2 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}t} = -\,\bar{\mu}_2\overline{\mathbf{R}}_2 - \bar{\mu}_1\mathbf{N}_2\,.$$

Daraus folgt, daß wir in der zuständigen Lage, das heißt bei der Zusammenfallung der Vektoren $\mathbf{R}_2$ mit $\overline{\mathbf{R}}_2$ und $\mathbf{N}_2$ mit $\overline{\mathbf{N}}_2$, die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}t} = v\,.\,\mathbf{R}_2$$

haben. Wenn also die momentanen Bewegungen die Drehungen um die erzeugende Gerade der Pohlfläche sind, entrollen sich die Striktionslinien. Damit wird zugleich eine andere geometrische Interpretation des Invariants v gegeben.

Literaturverzeichnis

[1] *J. Favard:* Cours de Géometrie différentielle locale. Moskau 1960 (Russische Übersetzung).

[2] *A. Karger:* Lieovy grupy a kinematická geometrie v rovině. Čas. pro pěst. mat., 93 (1968), str. 186—200.

[3] *A. Karger:* Axoidy obecného afinního pohybu. Čas. pro pěst. mat., 93 (1968), str. 378—385.

Souhrn

ZÁKLADY PROSTOROVÉ KINEMATICKÉ GEOMETRIE

ADOLF KARGER

V článku jsou odvozeny základní vlastnosti prostorového pohybu z hlediska kinematické geometrie a s použitím teorie Lieových grup a Lieových algeber. Je ukázáno, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ grupy $\boldsymbol{G}$ prostorových shodností je isomorfní s algebrou tzv. duálních vektorů.

Dále jsou nalezeny invarianty jednoparametrické soustavy Kartanových podalgeber v $\mathfrak{g}$ a jejich souvislost s invarianty přímkové plochy v euklidovském prostoru.

Je-li dán prostorový pohyb, ukazuje se, že řídící kužel tohoto pohybu lze vnořit do jednoparametrické soustavy Kartanových podalgeber. Pomocí invariantů této soustavy se už snadno naleznou i invarianty prostorového pohybu.

Anschrift des Verfassers: Adolf Karger, Strojní fakulta ČVUT, Praha 2, Horská 4.