Aplikace matematiky

Pavel Bartoš

Matematika v rodinnom práve australských domorodcov

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 5, 398–405

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103116

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

MATEMATIKA V RODINNOM PRÁVE AUSTRÁLSKYCH DOMORODCOV

PAVEL BARTOŠ

(Došlo dňa 22. augusta 1966.)

Zákazy manželstva medzi blízkymi príbuznými vyskytujú sa aj u primitívnych národov. Cestovateľ BENGT DANIELSSON v diele [1] na strane 65–66 uvádza formu týchto zákazov u austrálskych domorodcov a podotýka, že ju možno vyjadriť matematicky, ale nič bližšieho o tom neudáva a niet o tom zmienky v literatúre ani inde. V tomto článku ukážeme matematické vyjadrenie týchto rodinnoprávnych zvykových ustanovení jednak pomocou pojmov teórie množín, jednak pomocou istej algebraickej operácie definovanej v tzv. genealogickom priestore tabuľkou aj axiomaticky.

Podľa citovaného prameňa boli napr. príslušníci jedného už vymretého kmeňa z Nového Južného Walesu zaradení do štyroch skupín (u niektorých kmeňov bolo týchto skupín i viac). Tieto skupiny mali pomenovania: kambu, mari, kabi, ipai; my ich budeme označovať v uvedenom poradí a, b, c, d. K skupine $x \in \{a, b, c, d\}$ boli priradené dve z týchto skupín zvané polovica z otcovej strany, budeme ich označovať P_x a dve skupiny ako polovica z matkinej strany M_x; sú uvedené v tabuľke 1.

Tab. 1

x	a	b	c	d
P_x	a, c	b, d	c, a	d, b
M_x	a, d	b, c	c, b	d, a

Uvidíme, že $P_x(M_x)$ tvoria tie skupiny, do ktorých patrili predkovia osôb zo skupiny x v mužskej (ženskej) línii. Dvojice skupín

$$\bar{P}_x = \{a, b, c, d\} - P_x\,, \quad \bar{M}_x = \{a, b, c, d\} - M_x$$

sú tzv. opačné polovice skupiny x z otcovej resp. z matkinej strany. V ďalšom budeme označovať symbolom $p_x(m_x)$ skupinu otca (matky) príslušníka skupiny x, symbolom u_x skupinu manžela či manželky príslušníka skupiny x a f_{xy} skupinu osoby, ktorej otec patrí do skupiny x a matka do skupiny y.

Pravidlá kmeňa môžeme teraz už vyjadriť v tejto forme[1])

$$\{p_x\} = P_x \cap \overline{M}_x\,, \tag{1.1}$$

$$\{m_x\} = \overline{P}_x \cap M_x\,, \tag{1.2}$$

$$\{u_x\} = \overline{P}_x \cap \overline{M}_x\,, \tag{1.3}$$

$$\{f_{xy}\} = P_x \cap M_y\,, \quad x = u_y\,, \quad y = u_x\,. \tag{1.4}$$

Príklad. Osoba (muž alebo žena) zo skupiny c má otca v skupine $\{p_c\} = P_c \cap \cap \overline{M}_c = \{c, a\} \cap \{d, a\} = \{a\}$, matku v skupine $\{m_c\} = \{d, b\} \cap \{c, b\} = \{b\}$, manžela (manželku) v skupine $\{u_c\} = \{d, b\} \cap \{d, a\} = \{d\}$. Muž zo skupiny c má dieťa v skupine $\{f_{cd}\} = P_c \cap M_d = \{c, a\} \cap \{d, a\} = \{a\}$ a žena zo skupiny c má dieťa v skupine $\{f_{dc}\} = P_d \cap M_c = \{d, b\} \cap \{c, b\} = \{b\}$. Teraz uvedieme niekoľko dôsledkov vyplývajúcich z (1.1)–(1.4).

$$\{x\} = P_x \cap M_x\,, \quad p_x \neq x\,, \quad m_x \neq x\,, \quad u_x \neq x\,. \tag{2.1}$$

Prvý vzťah je zrejmý z tabuľky 1, ostatné vyplývajú z (1.1)–(1.3) vzhľadom na to, že $p_x \in P_x$, $\overline{M}_x$, $m_x \in \overline{P}_x$, M_x a že $x \notin \overline{P}_x$, $\overline{M}_x$. Zrejme teda platí

$$P_x = \{x, p_x\}\,, \quad M_x = \{x, m_x\}\,. \tag{2.2}$$

Ďalej platí

$$f_{xy} \neq u_x\,, \quad f_{xy} \neq x\,. \tag{2.3}$$

Prvý vzťah je dôsledkom (1.3) a (1.4), druhý dokážeme priamym overením podľa tabuľky č. 1.

Tiež platí

$$p_x \neq m_x\,, \quad u_x \neq p_x\,, \quad u_x \neq m_x\,. \tag{2.4}$$

Prvý vzťah je dôsledkom (1.1) a (1.2), ostatné vyplývajú z (1.1)–(1.3).

Vidno, že p_x, m_x, u_x, x sú medzi sebou rôzne skupiny, z čoho vyplýva, že f_{xy} sa niektorej z nich rovná a vzhľadom na (2.3) môže byť len $f_{xy} = p_x$ alebo $f_{xy} = m_x$. Keďže však $m_x \notin P_x$, je podľa (1.4)

$$f_{xy} = p_x \quad \text{a obdobne} \quad f_{yx} = m_x\,. \tag{2.5}$$

---

[1]) V diele [1] sa uvádza ich pôvodné znenie, napr. (1.1) takto: Otec príslušníka kmeňa náleží do polovice z otcovej strany a súčasne do opačnej polovice z matkinej strany tohoto príslušníka.

Z (2.5) vyplýva

(2.6) $$p_{p_x} = x\,, \quad m_{m_x} = x\,.$$

To znamená, že všetci predkovia (a potomkovia) príslušníka skupiny x v mužskej línii sú v skupine p_x alebo x a v ženskej línii v skupine m_x alebo x. Dvojice skupín P_x, M_x teda tieto skupiny predkov v mužskej resp. v ženskej línii obsahujú.

Z týchto výsledkov už môžeme odvodiť najdôležitejšie materiálnoprávne ustanovenia, vyplývajúce z opísaného zadelenia obyvateľstva do skupín.

Veta 1. *a) Manželstvo medzi otcom (matkou) a dcérou (synom) je neprípustné.*

b) Manželstvo medzi súrodzencami je neprípustné.

c) Manželstvo medzi mužom (ženou) a dcérou (synom) jeho syna (jej dcéry) je zakázané.

Dôkaz. a) Podľa (2.4) je $u_x \neq p_x$, $u_x \neq m_x$.

b) Podľa (2.1) je $u_x \neq x$ a súrodzenci podľa (1.4) patria do jednej skupiny.

c) Podľa (2.6) je $p_{p_x} = x$ a podľa (2.1) $u_x \neq x$. Obdobne $m_{m_x} = x$, $u_x \neq x$.

Autor diela [1] na citovanom mieste uvádza, že pravidlá uzavierania sňatku možno vyjadriť jednoducho tak, že sa určia skupiny p_x, m_x, x pre každú skupinu x podľa pravidiel (1.1)–(1.4). My si zavedieme algebraickú operáciu, ktorú nazveme násobením, v množine $\{a, b, c, d\}$ tak, že prvý činiteľ je skupina manžela, druhý skupina manželky a súčin značí skupinu detí, teda píšeme $p_x m_x = x$ alebo $xu_x = f_{xu_x}$ resp. $u_x x = f_{u_x x}$. Podľa uvedeného príkladu je $p_c = a$, $m_c = b$, a teda $ab = c$. Ďalej pre $u_x = u_y = d$ je $f_{xy} = a$, $f_{yx} = b$, a teda $cd = a$, $dc = b$. Ľahko určíme ešte, že $ba = d$.

Vidno, že definované súčiny nie sú komutatívne, nie sú ani asociatívne, načo ešte poukážeme.

Je vhodné zaviesť ešte prázdnu skupinu ako nulový prvok 0, pomocou ktorého vyjadríme nemožnosť manželstva (a zrodu potomkov z neho) medzi príslušníkmi dvoch skupín, napr. $aa = 0$, $ac = 0$, ale aj $0 \,.\, b = 0$, $0 \,.\, 0 = 0$. Potom môžeme zostaviť tabuľku 2, ktorú možno použiť na určenie skupiny z dieťaťa, skupiny x otca, y matky, skupiny x manžela, skupiny y manželky ev. skupiny ďalších predkov a potomkov. Napr. príslušníčka skupiny c má otca v skupine a, matku v skupine b, manžela v skupine d (táto je určená podmienkou $dc \neq 0$) a deti v skupine b. Jej starý otec po otcovi (ktorý je v skupine a), je v skupine c, stará matka po otcovi v skupine d, starý otec po matke (ktorá je v skupine b) je v skupine d, stará matka po matke v skupine c atď.

I keď použitie tabuľky 2 je jednoduchšie než použitie tabuľky 1 v spojení s pravidlami (1.1)–(1.4), z hľadiska matematického sa treba prikloniť k starodávnej metóde kmeňa, vyjadrenej matematickou formou (1.1)–(1.4), lebo pripúšťa všeobecné dôkazy, platné pre ľubovoľný prvok x, ako sme videli pri dôkazoch vzťahov (2.1)–(2.6) a vety 1, ktorú teraz môžeme vyjadriť formou

a) $p_x x = 0, \; x m_x = 0,$

b) $xx = 0,$

c) $p_{p_x} x = 0, \; x m_{m_x} = 0.$

Tabuľka 2. Súčiny $xy = z$.

$x \backslash y$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	0	c	0	0
b	0	d	0	0	0
c	0	0	0	0	a
d	0	0	0	b	0

V ďalšom použijeme tabuľku 2 na ukázku jej aplikability.

Dá sa predpokladať, že zaradenie obyvateľstva do skupín a ustálené pravidlá mali za cieľ v prvom rade zákazy manželstva uvedené vo vete 1. Nimi bola chránená v prvom rade čistota mužskej a ženskej línie rodu. Naproti tomu línie miešané už neboli tak chránené. Napríklad muž (žena) môže uzavrieť manželstvo s dcérou (synom) svojej dcéry (svojho syna). Podľa tab. 2 platí totiž

$$a(dc) = ab = c \neq 0\,, \quad (dc)\,a = ba = d \neq 0\,.$$

Prvá rovnosť znamená možnosť manželstva medzi príslušníkom skupiny a a dcérou jeho dcéry (ktorá je v skupine c a má manžela zo skupiny d, teda dcéru v skupine dc). Druhá rovnosť zmamená možnosť manželstva medzi ženou zo skupiny a a synom jej syna (ktorý je zo skupiny d a má manželku zo skupiny c, teda syna v skupine dc). Obdobne by sa to dokázalo pre skupiny b, c, d.

V ďalšom ukážeme, že skutočne, ak kmeňu išlo o zachovanie zákazov z vety 1, bolo treba obyvateľstvo zaradiť do štyroch skupín a vysloviť pravidlá obsažené v tabuľke 2 (a teda aj v predpisoch (1.1)–(1.4)). Za tým cieľom zavedieme axiomaticky istú množinu G s násobením. Tieto axiómy vyjadrujú v matematickej forme zákazy manželstva podľa vety 1 (z časti c) stačí zákaz manželstva týkajúci sa muža) a ich znenie je nasledujúce:

I. Množina G obsahuje nulový prvok 0 a aspoň jeden nenulový prvok a platí $0 \,.\, m = m \,.\, 0 = 0$ pre všetky prvky $m \in G$.

II. Ku každému nenulovému prvku m existuje taký nenulový prvok n, že $mn \neq 0$, $nm \neq 0$.

III. Ak je $mn = p \neq 0$, je $mp = pn = 0$.

IV. Pre každý prvok m platí $m \cdot m = 0$.

V. Ak je $mn = p \neq 0$, $pr = t \neq 0$, je $mt = 0$.

Poznámka. Axiómy I – II znamenajú v podstate, že do manželstva sú potrebné dve osoby muž-žena a že pre každého muža existuje manželka a pre každú ženu manžel. Axiómy III – V vyjadrujú zákazy manželstva a) – c) podľa vety 1 (v c) sa uvádza len zákaz týkajúci sa muža).

Množinu G s najmenším počtom prvkov nazveme genealogickým priestorom G_0 a dokážeme:

Veta 2. *G_0 má štyri nenulové prvky $G_0 = \{0, a, b, c, d\}$ a pre násobenie v množine G_0 platí tabuľka 2.*

Dôkaz. Najprv dokážeme, že G obsahuje aspoň štyri nenulové prvky. Keďže obsahuje podľa I prvok $m \neq 0$, obsahuje podľa II prvok $n \neq 0$ tak, že $mn = p \neq 0$, $nm = q \neq 0$. Pritom podľa IV je $m \neq n$. Podľa III je potom $p, q \neq m, n$ (v opačnom prípade by bolo napr. $p = n$, a teda $mn = p \neq 0, mp = n \neq 0$, čo je podľa III vylúčené). Keby bolo $p = q$, bolo by $qp = 0$ podľa IV, a teda k prvku p by musil existovať podľa II prvok $r \neq p$ tak, že $rp \neq 0$. Keby bolo $r = m$, bolo by $mp \neq 0$, čo je podľa III nemožné. Obdobne nemôže byť $r = n$. Existujú teda aspoň 4 nenulové prvky m, n, p, r. Označme ich a, b, c, d a utvorme množinu $G_0 = \{0, a, b, c, d\}$. Máme dokázať, že o tejto množine pre definované násobenie platí tabuľka 2.

Nech $ab = c$ (čo je vec označenia prvkov). Potom $cd \neq b$, v opačnom prípade by bolo $a(cd) = ab = c \neq 0$, čo je vylúčené podľa V. Preto $cd = a$. Nemôže byť ani $ba = c$, teda $b(cd) = ba = c \neq 0$ podľa V. Teda $ba = d$ a obdobne $dc = b$.

Tým sú nenulové súčiny s tabuľkou 2 identifikované. V triviálnych prípadoch sú súčiny rovné nule podľa I, $aa = bb = cc = dd = 0$ platí podľa IV, $ac = ad = ca = da = 0$ a obdobne pre prvky b, c, d platí podľa III. Tým je dôkaz ukončený.

V genealogickom priestore G_0 sú okrem axióm I – V platné ďalšie vety, ktoré tiež majú manželskoprávny význam. Niektoré z nich dokážeme.

Veta 3. *Žena nemôže uzavrieť manželstvo so synom svojej dcéry.*

Dôkaz. Táto veta nebola pojatá do axiómu V. Vieme však, že platí (pozri vetu 1). Nech je žena zo skupiny a, jej dcéra je zo skupiny d, manžel tejto dcéry zo skupiny c, takže ich syn je zo skupiny cd. Avšak $(cd)\,a = aa = 0$. Obdobne pre príslušníčky skupín b, c, d.

Veta 4. *Muž (žena) môže uzavrieť manželstvo s dcérou (synom) svojej dcéry (svojho syna).*

Dôkaz. Muž (žena) zo skupiny a má dcéru (syna) zo skupiny $c(d)$ a jej dcéra (jeho syn) je zo skupiny $cd(dc)$. Platí

$$a(cd) = ab = c \neq 0\,, \quad (dc)\,a = ba = d \neq 0\,.$$

Obdobne pre mužov (ženy) zo skupín b, c, d.

Veta 5. *Medzi bratrancami a sesternicami v prvom stupni je možné manželstvo vtedy a len vtedy, keď sú deťmi súrodzencov rôzneho pohlavia.*

Dôkaz. Ak sú obaja deťmi dvoch bratov (sestier), patria do tejže skupiny x a $xx = 0$, manželstvo medzi nimi je vylúčené. Ak je jeden z nich dieťaťom brata a druhý sestry napr. príslušníkov skupiny a, je manželka brata zo skupiny b a manžel sestry tiež zo skupiny b. Dieťa prvého je zo skupiny ab druhej zo skupiny ba. Avšak $(ab)(ba) = cd = a \neq 0$, $(ba)(ab) = dc = b$ a preto je manželstvo medzi nimi možné. Obdobne pre skupiny b, c, d.

Veta 6. *Muž (žena) so svojou neterou (so svojím synovcom) nemôže uzavrieť manželstvo.*

Dôkaz. Nech muž (žena) patrí do skupiny a. Jeho (jej) brat patrí tiež do skupiny a a má manželku zo skupiny b, teda dieťa zo skupiny ab. Avšak

$$a(ab) = ac = 0\,, \quad (ab)\,a = ca = 0\,.$$

Obdobne sestra muža (ženy) prísluší tiež do skupiny a, jej manžel do skupiny b a jej dieťa do skupiny ba. Avšak opäť

$$a(ba) = ad = 0\,, \quad (ba)\,a = da = 0\,.$$

Obdobne to platí pre skupiny b, c, d.

Súčin dvoch činiteľov z G_0 nezávisí na poradí činiteľov zrejme práve vtedy, keď hodnota súčinu je nulová. Súčin troch činiteľov nezávisí od poradia výkonov vtedy, keď aspoň jeden činiteľ je nulový; táto podmienka však nie je nutnou, napr.

$$(ab)\,c = cc = 0\,, \quad a(bc) = a\,.\,0 = 0\,,$$

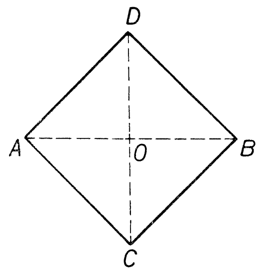
ale

$$(ab)\,d = cd = a \neq 0\,, \quad a(bd) = a\,.\,0 = 0\,,$$

čím sa zároveň dokladá neasociatívnosť súčinov v G_0.

V G_0 je súčin nulový, keď je aspoň jeden činiteľ nulový. Ani táto podmienka však nutná nie je, napr. $aa = ac = 0$ atď.

Priestor G_0 možno vhodne metrizovať tak, že ho považujeme za izometrický s množinou vrcholov štvorca $ACBD$ a jeho stredu 0 v E_2, pričom $A = f(a)$, $B = f(b)$, $C = f(c)$, $D = f(d)$, $0 = f(0)$, kde f je izometrické zobrazenie (obr. 1).



Obr. 1.

Ak je strana štvorca jednotková, zrejme pre $m \neq n$ platí

a) $mn \neq 0 \Leftrightarrow \varrho(M, N) = \sqrt{2}$,

b) $mn = 0 \Leftrightarrow \varrho(M, N) < \sqrt{2}$,

c) $mn = 0; m, n \neq 0 \Leftrightarrow \varrho(M, N) = 1$,

d) $m = 0, n \neq 0$ alebo $m \neq 0, n = 0 \Leftrightarrow \varrho(M, N) < 1$.

Obr. 1 možno použiť aj miesto tabuľky 2, čo je zrejmé aj bez zvláštneho návodu.

Tak ako v druhej generácii (medzi bratrancami a sesternicami) sú aj možnosti aj zákazy manželstva (pozri vetu 5), platí to isté vo všetkých ďalších generáciách so spoločnými prarodičmi. Možnosť uzavierania manželstva bola teda aj *zbytočne* obmedzovaná, čo tiež mohlo byť jednou z mnohých príčin vymierania kmeňov. Na druhej strane však z hľadiska moderného je nedostatkom týchto predpisov možnosť uzavierania sňatku medzi starými rodičmi a vnukmi (pozri vetu 4) aj keď táto možnosť asi nemala v praxi významu. To sa už však netýka tak matematiky ako skorej eugeniky a etnografie.

Aj keď matematický obsah rodinnoprávnych predpisov, o ktorých sme písali, nie je nijak zložitý, neuberá to ničoho na pozoruhodnosti tej okolnosti, že taká sústava bola pomocou pojmov teórie množín vytvorená dávnymi predkami národov, ktoré ešte pred niekoľkými desaťročiami boli na úplne primitívnom stupni kultúrneho vývoja.

Literatúra

[1] *Danielsson, Bengt:* Bumerang. Orbis, Praha 1964.

Резюме

МАТЕМАТИКА В СЕМЕЙНОМ ПРАВЕ АВСТРАЛИЙСКИХ ТУЗЕМЦЕВ

ПАВЕЛ БАРТОШ (PAVEL BARTOŠ)

В настоящей статье вошедшие в прывычку правила о возможности или запрете заключения брака между членами определенного австралийского племени туземцев, упомянутые в работе [1], на стр. 65—66, выражаются в математической форме, а именно:

1) при помощи понятий теории множеств в виде (1.1)—(1.4) и

2) при помощи определенной алгебраической операции в т. наз. генеалогическом пространстве G_0, определенной таблицей 2 или аксиоматическим путем по теореме 2.

Summary

MATHEMATICAL RELATIONS IN THE FAMILY-LAW OF AUSTRALIAN ABORIGENES

PAVEL BARTOŠ

In this paper the custom rules concerning the possibility resp. prohibition of marriage for members of certain tribe of australian aborigenes (as described in (1), pp. 65, 66) are mathematically formulated

1) in terms of group theory in the form (1.1)—(1.4) and

2) by making use of a certain algebraic operation in the so-called genealogic space G_0 defined by Table 2 or in an axiomatic way according to Theorem 2.

Adresa autora: Pavel Bartoš, Sibírska 9, Bratislava.