Ivo Marek

Přibližné stanovení spektrálního poloměru kladného nerozložitelného zobrazení

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 5, 351–363

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103112

PŘIBLIŽNÉ STANOVENÍ SPEKTRÁLNÍHO POLOMĚRU KLADNÉHO NEROZLOŽITELNÉHO ZOBRAZENÍ

IVO MAREK

(Došlo dne 26. října 1966.)

1. ÚVOD

V některých problémech matematické fyziky na straně jedné a v některých problémech numerické analýzy na straně druhé se často setkáváme s úlohou stanoviti spektrální poloměr daného kladného zobrazení. Z úloh matematické fyziky uveďme problém kritických parametrů jaderného reaktoru (viz [10, 11]); z úloh numerické matematiky třeba ortodoxní výpočet optimálního relaxačního faktoru pro postupné superrelaxace (viz [5], str. 110 a [17], str. 285).

V tomto článku si klademe za úkol stanovit přibližně spektrální poloměr daného kladného zobrazení a hlavně pak určiti oboustranné meze pro spektrální poloměr.

Tímto problémem se zabýval jako první L. COLLATZ v letech 1942–43 (viz [2, 3]). Jeho výsledky lze formulovat takto:

Buď $B = (b_{jk})_1^m$ matice s nezápornými prvky a x m-rozměrný vektor reálného eukleidovského prostoru E_m s vesměs kladnými komponentami $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Nechť

$$\alpha_n = \min_{1 \leq j \leq m} \frac{(B^n x)_j}{(B^{n-1} x)_j},$$

$$\beta_n = \max_{1 \leq j \leq m} \frac{(B^n x)_j}{(B^{n-1} x)_j},$$

kde $(y)_j$ značí j-tou komponentu vektoru $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $y \in E_m$. Za předpokladu, že B je irreducibilní a $m > 1$ platí nerovnost

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n \leqq \ldots \leqq \varrho(B) \leqq \ldots \leqq \beta_n \leqq \ldots \leqq \beta_2 \leqq \beta_1,$$

přičemž ([16], str. 263)

$$\varrho(B) = \limsup_n \sqrt[n]{\|B^n\|}.$$

Dále pak Collatz dokázal, že rovnost

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \varrho(B) = \lim_{n \to \infty} \beta_n$$

nastává, je-li $\varrho(B)$ dominantním prvkem spektra $\sigma(B)$ operátoru B, tj. v případě, kdy

$$|\lambda| < \varrho(B)$$

pro $\lambda \in \sigma(B)$, $\lambda \neq \varrho(B)$.

Tento Collatzův podílový princip se stal odrazovým můstkem pro důkazy jiných vět o inklusi pro spektrální poloměr (viz [17], str. 285a [5], str. 60). Nejobecnější prací v tomto směru je práce Bohlova [1], kde byl odstraněn dokonce i předpoklad lineárnosti zobrazení B v některých obecně nekonečně-rozměrném Banachově prostoru $\mathcal{Y}$.

Pro nerozložitelné matice s nezápornými prvky odvodil Yamamoto [18] nový originální princip inkluse pro spektrální poloměr. Naše vyšetřování navazují jak na původní Collatzův postup tak na postup Yamamotův. V naší formulaci Yamamotův postup dává oboustranné meze, ty však, obecně, mohou s rostoucím počtem iterací konvergovati každá k jiné limitě. Tato nevýhoda je vyvážena tím, že zobecnění Yamamotova postupu neklade na vyšetřovaný operátor kromě jeho kladnosti žádná další omezení. Podobně je tomu s vlastnostmi prostoru $\mathcal{Y}$ a kužele $\mathcal{K}$. Poněkud náročnější je v tomto směru postup Hadelerův [4] vyžadující podobně jako postup Bohlův [1] neprázdnost vnitřku Int $\mathcal{K}$ kužele $\mathcal{K}$ a existenci supréma v kuželi $\mathcal{K}$.

V odstavci 2 zavedeme potřebná označení a definice a v odstavci 3 dokážeme několik tvrzení, jež zobecňují jak výsledky Collatzovy tak výsledky Yamamotovy. Jak ukážeme, oba uváděné principy inkluse pro spektrální poloměr lze odvoditi pomocí zobecněného minimaxového principu [12], [13].

2. OZNAČENÍ A DEFINICE

Symbolem $\mathcal{Y}$ označujeme reálný Banachův prostor, $\mathcal{X}$ jeho komplexifikaci, tj. množinu dvojic $z = x + iy$, $x, y \in \mathcal{Y}$, $i^2 = -1$, s normou ekvivalentní s normou definovanou takto:

$$\|z\| = \sup_{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi} \|x \cos \vartheta + y \sin \vartheta\| .$$

$\mathcal{Y}'$ značí prostor spojitých lineárních forem na $\mathcal{Y}$, $[\mathcal{Y}]$, resp. $[\mathcal{X}]$ prostor lineárních ohraničených zobrazení prostoru $\mathcal{Y}$ resp. $\mathcal{X}$ do sebe. Topologie v prostorech $\mathcal{Y}'$, $[\mathcal{Y}]$, $[\mathcal{X}]$ jsou určeny stejnoměrnou konvergencí na ohraničených množinách, tedy $\mathcal{Y}'$, $[\mathcal{Y}]$, $[\mathcal{X}]$ jsou též Banachovými prostory.

Je-li $T \in [\mathcal{Y}]$, pak jeho komplexní rozšíření značené symbolem $\tilde{T}$ a definované jako $\tilde{T}z = Tx + iTy$ pro $z = x + iy$, $x, y \in \mathcal{Y}$, patří do $[\mathcal{X}]$. Spektrum $\sigma(T)$ operátoru $T \in [\mathcal{Y}]$ definujeme rovnost $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T})$, kde pro $A \in [\mathcal{X}]$ spektrum

$\sigma(A)$ je množina bodů λ komplexní roviny, pro něž resolventa $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, kde I je identické zobrazení, není prvkem prostoru $[\mathscr{X}]$. Je-li $A \in [\mathscr{X}]$, pak $\varrho(A) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ se nazývá spektrálním poloměrem operátoru A (viz [16] str. 262). Pro operátor $T \in [\mathscr{Y}]$ definujeme $\varrho(T) = \varrho(\tilde{T})$.

Symbolem $\mathscr{K}$ označujeme kužel nezáporných prvků prostoru $\mathscr{Y}$ (viz [7]) a $\mathscr{K}'$ kužel k němu adjungovaný, tj. množinu všech spojitých lineárních forem $x' \in \mathscr{Y}'$, jež nabývají nezáporných hodnot na prvcích kužele $\mathscr{K}$ (viz [7]). Hodnotu funkcionálu $x' \in \mathscr{Y}'$ v bodě $x \in \mathscr{Y}$ značme symbolem $\langle x, x' \rangle$. Kužel $\mathscr{K}$ se nazývá normálním [7], jestliže pro $x, y \in \mathscr{K}$, $\|x\| = \|y\| = 1$ existuje $\delta > 0$ nezávislé na x a y takové, že $\|x + y\| \geqq \delta\|x\|$. Kužel $\mathscr{K}$ se nazývá vytvořujícím, jestliže pro každý prvek $y \in \mathscr{Y}$ existují $y_1, y_2 \in \mathscr{K}$ tak, že $y = y_1 - y_2$. Kužel $\mathscr{K}$ se nazývá tělesným ([7]), jestliže jeho vnitřek Int $\mathscr{K}$ je neprázdný.

Množina $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ se nazývá $\mathscr{K}$-totální [12], jestliže z podmínek $\langle x, x' \rangle \geqq 0$ pro každou lineární formu $x' \in \mathscr{H}'$ plyne vztah $x \in \mathscr{K}$. Pomocí kužele $\mathscr{K}$ lze do prostoru $\mathscr{Y}$ zavést částečné uspořádání. Klademe $x \prec y$ resp. $y \succ x$, jestliže $(y - x) \in \mathscr{K}$.

Operátor $T \in [\mathscr{Y}]$ se nazývá $\mathscr{K}$-kladným, stručně kladným, jestliže pro $x \in \mathscr{K}$ též $Tx \in \mathscr{K}$ ([7]). Operátor $T \in [\mathscr{Y}]$ se nazývá polonenesoucím (semi-non-support [15]), jestliže pro každou dvojici $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$, kde o značí nulový prvek ve všech prostorech $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Y}'$, $\mathscr{X}$, existuje index $p = p(x, x')$ tak, že $\langle T^p x, x' \rangle \neq 0$. Vektor $x \in \mathscr{K}$ se nazývá nenesoucím prvkem kužele $\mathscr{K}$ [15], jestliže nerovnost $\langle x, x' \rangle > 0$ platí pro každou spojitou lineární formu $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$. Spojitá lineární forma $x' \in \mathscr{K}'$ se nazývá ostře kladnou [7, 15], jestliže nerovnost $\langle x, x' \rangle > 0$ platí pro každý nenulový prvek $x \in \mathscr{K}$.

Kladný operátor $T \in [\mathscr{Y}]$ se nazývá zdola u_0-kladným ([6] str. 60), jestliže existuje prvek $u_0 \in \mathscr{K}$, $\|u_0\| = 1$, tak, že pro každý prvek $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, lze nalézt kladné číslo $\alpha = \alpha(x)$ a přirozené číslo $l = l(x)$ tak, že $(T^l x - \alpha u_0) \in \mathscr{K}$.

Kladný operátor $T \in [\mathscr{Y}]$ se nazývá u_0-kladným, [6], str. 60, jestliže existuje $u_0 \in \mathscr{K}$, $\|u_0\| = 1$, tak, že lze nalézt kladná čísla $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ a přirozené číslo $p = p(x)$ tak, že platí vztahy

$$\alpha u_0 \prec T^p x \prec \beta u_0 \,.$$

Řekneme, že operátor $T \in [\mathscr{Y}]$ má vlastnost (S), jestliže z podmínek $\lambda \in \sigma(T)$, $|\lambda| = \varrho(T)$, plyne, že λ je isolovaným polem resolventy $R(\lambda, T)$.

Je známo ([15]), že spektrum polonenesoucího operátoru $T \in [\mathscr{Y}]$ majícího vlastnost (S), obsahuje bod $\mu_0 = \varrho(T)$. Tento bod je jednoduchým pólem $R(\lambda, T)$ a vlastní hodnotou operátoru T, jíž přísluší vlastní vektor $x_0 \in \mathscr{K}$. Vektor x_0 je nenesoucím prvkem kužele $\mathscr{K}$ a má tu vlastnost, že z podmínek $\nu T y = y$, kde $y \in \mathscr{K}$ a ν je kladná konstanta plyne, že $y = c x_0$, kde c je nějaká nezáporná konstanta. Podobné tvrzení platí též za předpokladu, že zobrazení $T \in [\mathscr{Y}]$ je u_0-kladné (viz [13]).

Buď $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ $\mathscr{K}$-totální množina. Je-li $T \in [\mathscr{Y}]$ buď (a) polonenesoucí nebo (b) u_0-kladné zobrazení, pak definujeme funkcionály

$$r_x(T) = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x')\langle x, x'\rangle \neq 0}} \frac{\langle Tx, x'\rangle}{\langle x, x'\rangle},$$

$$r^x(T) = \sup_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x')\langle x, x'\rangle \neq 0}} \frac{\langle Tx, x'\rangle}{\langle x, x'\rangle},$$

ve kterých $\varkappa(x') \equiv 1$ pro případ (a) a $\varkappa(x') = \langle u_0, x'\rangle$ pro případ (b).

3. PŘIBLIŽNÉ STANOVENÍ SPEKTRÁLNÍHO POLOMĚRU

Zobecněný Collatzův princip inkluse pro spektrální poloměr je bezprostředním důsledkem již zmíněného principu minimaxu [12,] [13].

Věta 1. *Předpokládejme, že*

(i) *operátor* $T \in [\mathscr{Y}]$ *má vlastnost* (S);

(ii) *operátor* T *splňuje alespoň jednu z podmínek*;

(iia) T *je polonenesoucí*;

(iib) T *je* u_0-*kladný*;

(iiia) $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, *v případě* (iia),

(iiib) $x \in \mathscr{K}$ *je takový, že existuje* $\tau > 0$ *tak, že* $x \succ \tau u_0$.

Potom platí nerovnosti

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n+1} \leqq \varrho(T) \leqq \beta_{n+1} \leqq \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

ve kterých

$$\alpha_n = r_{T^{n-1}x}(T), \quad \beta_n = r^{T^{n-1}x}(T).$$

Rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \varrho(T) = \lim_{n\to\infty} \beta_n \tag{2}$$

je zaručena v případě (b) *vždy, zatímco v případě* (a) *tehdy, je-li* $\mu_0 = \varrho(T)$ *dominantním bodem spektra* $\sigma(T)$.

Důkaz. Buď $y_n = T^{n-1}x$. Potom zřejmě $Ty_n - \alpha_n y_n = z_n \in \mathscr{K}$. Dále pak pro každou lineární formu $x' \in \mathscr{H}'$ platí nerovnost

$$\langle Ty_n, x'\rangle \geqq \alpha_n\langle y_n, x'\rangle,$$

při čemž v $\mathscr{H}'$ existuje alespoň jeden prvek $\hat{x}$ tak, že $\langle y_n, \hat{x}' \rangle \neq o$. Jinak $y_n = o$. Jest potom

$$\frac{\langle Ty_n, x' \rangle}{\langle y_n, x' \rangle} \geqq \alpha_n$$

pro každou lineární formu $x' \in \mathscr{H}'$, pro niž $\langle y_n, x' \rangle \neq o$, takže též

$$\alpha_{n+1} = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x') \langle x, x' \rangle \neq 0}} \frac{\langle Ty_n, x' \rangle}{\langle y_n, x' \rangle} \geqq \alpha_n \, .$$

Podobně se dokáže platnost nerovnosti $\beta_n \geqq \beta_{n+1}$. K důkazu platnosti vztahů (1) zbývá dokázati pro libovolné přirozené n, že

$$\alpha_n \leqq \varrho(T) \leqq \beta_n \, .$$

Tyto nerovnosti jsou však bezprostředním důsledkem věty o minimaxu [12], na základě níž

$$\varrho(T) = \max_{\substack{x \in \mathscr{K} \\ x \neq \sigma}} r_x(T) \geqq \max_n r_{y_n}(T) = \max_n \alpha_n \, ,$$

$$\min_n \beta_n = \min_n r^{y_n}(T) \geqq \min_{\substack{x \in \mathscr{K} \\ x \neq o}} r^x(T) = \varrho(T) \, .$$

Posléze dokážeme platnost rovnosti (2). Jestliže bod $\mu_0 = \varrho(T)$, je dominantním prvkem spektra $\sigma(T)$, je známo [9], že

$$\varrho(T) = \lim_{n \to \infty} \frac{\langle T^n x, x' \rangle}{\langle T^{n-1} x, x' \rangle} \, ,$$

jakmile $\varkappa(x') > 0$. Potom tedy

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha = \varrho(T)$$

a podobně

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta = \varrho(T) \, ,$$

a to jsme chtěli dokázati.

Tím je dokázána platnost zobecněného Collatzova principu. Collatzovy výsledky z let 1942–43 lze obdržeti vhodnou volbou objektů $\mathscr{Y}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{H}'$, T.

Jak jsme uvedli v úvodu, existují další zobecnění Collatzova principu [1], [4]. Ty však vyžadují předpoklad Int $\mathscr{K} \neq \emptyset$, který je podle našeho názoru příliš omezující a proto klademe raději omezení na operátor T než na prostor $\mathscr{Y}$ a kužel $\mathscr{K}$. Předností Hadelerova postupu [4] je to, že neklade žádné omezení na operátor T. Obecně však jím zaručená informace pro polohu spektrálního poloměru je triviální

$$0 \leqq \varrho(T) < +\infty \, .$$

K. P. Hadeler dokázal svou větu o inklusi pro spektrální poloměr za předpokladu, že $\mathscr{Y}$ je prostorem spojitých funkcí na kompaktní podmnožině eukleidovského prostoru $\mathscr{E}_r$. Zobecnění jeho výsledku obsahuje práce [12].

Než přistoupíme k odvozování Yamamotova principu, uvedeme několik tvrzení, jež s tímto principem bezprostředně souvisejí.

Tvrzení 1. *Nechť*

(α) $T \in [\mathscr{Y}]$ *je kladný operátor;*

(β) *spektrální poloměr* $\varrho = \varrho(T)$ *je vlastní hodnotou operátoru* T *a této hodnotě přísluší vlastní vektor* $y_0 \in \mathscr{K}$.

(γ) *Prvky* $\hat{x} \in \mathscr{K}$, $\hat{x}' \in \mathscr{K}'$ *jsou takové, že platí*

$$\langle T^l \hat{x}, \hat{x}' \rangle \geqq \tau \langle y_0, \hat{x}' \rangle > 0 , \tag{3}$$

při čemž $\tau > 0$ *a* l *přirozené číslo.*

Potom platí rovnost

$$\lim_{p \to \infty} [\langle T^p \hat{x}, \hat{x}' \rangle]^{1/p} = \varrho(T) . \tag{4}$$

Důkaz. Je-li $\varrho(T) = 0$, pak

$$0 \leqq [\langle T^p \hat{x}, \hat{x}' \rangle]^{1/p} \leqq \|T^p\|^{1/p} \|\hat{x}\|^{1/p} \|\hat{x}'\|^{1/p} = \gamma_p$$

a $\lim\limits_{p \to \infty} \gamma_p = 0$.

Je-li $\varrho(T) > 0$, pak

$$0 < \varrho(T) \, \tau^{1/p} [\varrho(T)]^{-l/p} [\langle y_0, \hat{x}' \rangle]^{1/p} \leqq [\langle T^p \hat{x}, \hat{x}' \rangle]^{1/p} \leqq$$
$$\leqq \varrho(T) \, \|[\varrho(T)]^{-p} T^p\|^{1/p} \|\hat{x}\|^{1/p} \|\hat{x}'\|^{1/p} ,$$

odkud rovnost (4) plyne okamžitě. Tvrzení 1 je dokázáno.

Poznamenejme, že předpoklad (α) v tvrzení 1 je přirozený, neboť jinak by obecně nebylo možné prováděti odmocňování. Dále uvedeme některé postačující podmínky zaručující splnění ostatních předpokladů tvrzení 1.

Předpoklad (β) je zřejmě splněn, má-li operátor T vlastnost (S). Je-li T polonenesoucí operátor, pak T má vlastnost (S), jakmile $\mathscr{Y}$ je Banachův svaz (viz [11]) a $\varrho(T)$ je pólem resolventy $R(\lambda, T)$. Je-li operátor T polonenesoucí, pak je zřejmě splněn také předpoklad (γ) s libovolným nenulovým $\hat{x} \in \mathscr{K}$ a ostře kladnou lineární formou $\hat{x}' \in \mathscr{K}'$ nebo libovolnou nenulovou $\hat{x}' \in \mathscr{K}'$ a nenesoucím prvkem $\hat{x} \in \mathscr{K}$.

Předpoklad (γ) je rovněž splněn, je-li T u_0-kladný operátor, a to buď s libovolným nenulovým $\hat{x} \in \mathscr{K}$ a ostře kladnou lineární formou $\hat{x}' \in \mathscr{K}'$ či s libovolnou nenulovou lineární formou $\hat{x}' \in \mathscr{K}'$ a u_0-kladným vektorem $\hat{x}$ (tj. $\hat{x} \succ \alpha u_0$, $\alpha > 0$).

Nedostatkem tvrzení 1 je ta okolnost, že není známo, s které strany se posloupnost $\{[\langle T^p \hat{x}, \hat{x}' \rangle]^{1/p}\}$ blíží své limitě $\varrho(T)$ jako je tomu ve větě 1 pro obě posloupnosti $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$.

Nadále předpokládáme, že $\hat{x}$ je nenesoucím prvkem kužele $\mathscr{K}$ a $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ je $\mathscr{K}$-totální množina.

Definujeme výrazy

$$(5) \qquad r(T) = \inf_{x' \in \mathscr{H}'} \langle T\hat{x}, x' \rangle \,, \quad R(T) = \sup_{x' \in \mathscr{H}'} \langle T\hat{x}, x' \rangle \,.$$

Poznámka. Čísla $r(T)$ a $R(T)$ nejsou nic jiného než čísla $r_{\hat{x}}(T)$ a $r^{\hat{x}}(T)$, o nichž pojednává věta 1, za předpokladu, že $\langle \hat{x}, x' \rangle = 1$ pro všechny prvky $x' \in \mathscr{H}'$. Tato čísla jsou tedy rovna Bohlovým „kvocientům" λ, $\bar{\lambda}$ (viz [4]. Bohlovy kvocienty jsou sice definovány pro obecnější třídy zobrazení než třídy námi vyšetřované, avšak pro naše účely vystačíme s přirozenou definicí (5).

Věta 2. *Nechť*

(A) $T \in [\mathscr{Y}]$ *je kladný operátor;*

(B) $\hat{x} \in \mathscr{K}$ *je nenesoucí prvek kužele* $\mathscr{K}$;

(C) $\mathscr{H}'$ *je* $\mathscr{K}$*-totální množina taková, že* $\langle \hat{x}, x' \rangle = 1$ *pro* $x' \in \mathscr{H}'$.

Potom platí následující nerovnosti

$$(6) \qquad r(T) \leqq [r(T^2)]^{1/2} \leqq \ldots \leqq [r(T^{2^p})]^{2^{-p}} \leqq \ldots \leqq \varrho(T) \leqq \ldots \leqq \\ \leqq [R(T^{2^p})]^{2^{-p}} \leqq \ldots \leqq [R(T^2)]^{1/2} \leqq R(T)\,.$$

Jestliže navíc

(D) *operátor* T *má vlastnost* (S);

(E) *operátor* T *je polonenesoucí;*

(F) *existují kladná čísla* α, β *a přirozené číslo* l *tak, že platí nerovnosti*

$$(7) \qquad \alpha x_0 \prec T^l \hat{x} \prec \beta x_0 \,,$$

při čemž

$$x_0 = [\varrho(T)]^{-1}\, T x_0 \,, \quad x_0 \in \mathscr{K} \,, \quad x_0 \neq o \,,$$

pak

$$(8) \qquad \lim_{p \to \infty} [r(T^{2^p})]^{2^{-p}} = \lim_{p \to \infty} [R(T^{2^p})]^{2^{-p}} = \varrho(T)\,.$$

Důkaz. Položme $S = T^{2^p}$. Potom platí vztahy

$$0 \leqq r^{\hat{x}}(S) - r^{S\hat{x}}(S) =$$

$$= r(T^{2^p}) - \sup_{x' \in \mathscr{H}'} \frac{\langle T^{2^{p+1}} \hat{x}', x' \rangle}{\langle T^{2^p} \hat{x}, x' \rangle} =$$

$$= \sup_{x' \in \mathscr{H}'} \langle T^{2^p} \hat{x}, x' \rangle - \sup_{x' \in \mathscr{H}'} \frac{\langle T^{2^{p+1}} \hat{x}', x' \rangle}{\langle T^{2^p} \hat{x}, x' \rangle}\,,$$

odkud

$$0 \leqq [\sup_{x' \in \mathscr{K}'} \langle T^{2^p} \hat{x}, x' \rangle]^2 - \sup_{x' \in \mathscr{K}'} \langle T^{2^{p+1}} \hat{x}, x' \rangle ,$$

neboli

$$R(T^{2^{p+1}}) \leqq [R(T^{2^p})]^2$$

a tedy posléze

$$[R(T^{2^{p+1}})]^{2^{-p-1}} \leqq [R(T^{2^p})]^{2^{-p}} . \tag{9}$$

Podobně se dokáže, že platí

$$[r(T^{2^{p+1}})]^{2^{-p-1}} \geqq [r(T^{2^p})]^{2^{-p}} . \tag{10}$$

Označme

$$[r(T^{2^p})]^{2^{-p}} = r_p , \quad [R(T^{2^p})]^{2^{-p}} = R_p .$$

Potom z (9) a (10) plyne, že existují limity

$$r = \lim_{p \to \infty} r_p , \quad R = \lim_{p \to \infty} R_p .$$

Zřejmě $r_p \leqq R_p$. Zbývající část nerovností (6) plyne z nerovností

$$r(T^{2^p}) \leqq \|T^{2^p}\| \, \|\hat{x}\| \, \|x'\| ,$$
$$R(T^{2^p}) \geqq \|T^{2^p}\| \, \|\hat{x}\| \, \|x'\| .$$

Platnost nerovností (6) je tak dokázána.

K tomu, abychom dokázali platnost rovnosti (8) uvažme, že

$$r(T^{2^p}) \geqq \alpha \inf_{x' \in \mathscr{K}'} \langle T^{2^p - l} x_0, x' \rangle =$$
$$= \alpha [\varrho(T)]^{2^p} [\varrho(T)]^{-l} \inf_{x' \in \mathscr{K}'} \langle x_0, x' \rangle ,$$

odkud

$$\liminf_{p \to \infty} [r(T^{2^p})]^{2^{-p}} \geqq \varrho(T) .$$

Podobně

$$\limsup_{p \to \infty} [R(T^{2^p})]^{2^{-p}} \leqq \varrho(T) .$$

Výsledkem je platnost rovnosti (8).

4. PŘÍKLAD

Porovnání zobecněného Collatzova principu podaného ve větě 1 a zobecněného Yamamotova principu daného ve větě 2 provedeme na příkladě lineárního zobrazení v konečně-rozměrném prostoru $\mathscr{R}_m$, jež je ve vhodné basi určeno maticí s nezápornými prvky.

Nechť tedy $\mathscr{Y} = \mathscr{R}_m$ je reálný m-rozměrný Banachův prostor sloupcových vektorů $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$. Dále nechť $\mathscr{K}$ je kužel prvků, jež mají nezáporné souřadnice a T je zobrazení reprezentované nerozložitelnou maticí (t_{jk}) s $t_{jk} \geqq 0$.

V uvažované pevné basi tvoří kužel $\mathscr{K} \subset \mathscr{Y}$ vektory, jejichž složky jsou nezáporná čísla. Buď $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ množina řádkových vektorů tvaru $x'_j = (\underbrace{0, \ldots, 1,}_{j} 0, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, m$. Zřejmě $\mathscr{H}'$ je $\mathscr{K}$-totální množina. Dále nechť $\hat{x} = (1, \ldots, 1)$, takže $\hat{x}$ je nenesoucím prvkem kužele $\mathscr{K}$ a $\langle \hat{x}, x'_j \rangle = 1$ pro $j = 1, \ldots, m$.

Dále pak

$$r_{\hat{x}}(T) = \min_{j=1,\ldots,m} \frac{\langle T\hat{x}, x'_j \rangle}{\langle \hat{x}, x'_j \rangle},$$

$$r^{\hat{x}}(T) = \max_{j=1,\ldots,m} \frac{\langle T\hat{x}, x'_j \rangle}{\langle \hat{x}, x'_j \rangle}$$

a

$$\alpha_n = \min_{j=1,\ldots,m} \frac{(T^n\hat{x})_j}{(T^{n-1}\hat{x})_j},$$

$$\beta_n = \max_{j=1,\ldots,m} \frac{(T^n\hat{x})_j}{(T^{n-1}\hat{x})_j},$$

při čemž $(y)_j = \eta_j$, kde $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$.

Podle věty **1**

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n+1} \leqq \varrho(T) \leqq \beta_{n+1} \leqq \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

při čemž obecně

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha < \beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

Rovnost $\alpha = \beta$ nastává v případě, že matice (t_{jk}) je primitivní. Odtud plyne, že k užití Collatzovy metody je obecně zapotřebí pracovati místo s maticí (t_{jk}) s maticí příslušnou operátoru $T + \nu I$ s kladným ν.

Na základě výše uvedené volby prvků $\hat{x}, x'_j$, $j = 1, \ldots, m$, máme následující rovnosti

$$r_j(T) = \sum_{k=1}^{m} t_{jk},$$

$$r(T) = \min_{j=1,\ldots,m} r_j(T), \quad R(T) = \max_{j=1,\ldots,m} r_j(T).$$

Podle věty **2** platí nerovnosti (6) a přitom

$$\lim_{p\to\infty} \{[R(T^{2^p})]^{2^{-p}} - [r(T^{2^p})]^{2^{-p}}\} = 0.$$

Konvergence je obecně velmi pomalá, nicméně kromě nerozložitelnosti matice (t_{jk}) nevyžaduje žádných dalších předpokladů. Tato universálnost spolu s poměrně značnou stabilitou vůči zaokrouhlovacím chybám (viz [18]) činí Yamamotovu metodu schopnou praktického užití i když pro velice omezený okruh problémů. Většího uplatnění, zdá se, lze očekávat od Yamamotova zobecněného principu v teoretických úvahách (viz [8]).

Na závěr poznamenejme, že věta 2 není důsledkem Bohlova principu pro inklusi vlastní hodnoty jíž přísluší kladný vlastní vektor (viz [1]). Rozdíl obou výsledků tkví nejen v předpokladu o Int $\mathcal{K}$, ale též v tom, že u Bohla vyšetřovaná singularita musí být vlastní hodnotou uvažovaného zobrazení, zatímco v první části věty 2 tento předpoklad nefiguruje.

Literatura

[1] *E. Bohl:* Eigenwertaufgaben bei monotonen Operatoren und Fehlerabschätzungen für Operatorgleichungen. Arch. Rat. Mech. Anal. *22* (1966), 313—332.

[2] *L. Collatz:* Einschliessungssatz für die Eigenwerte von Integralgleichungen. Math. Zeitschr. *47* (1942), 395—398.

[3] *L. Collatz:* Einschliessungssatz für die charakteristische Zahlen von Matrizen. Math. Zeitschr. *48* (1942—43), 221—226.

[4] *K. P. Hadeler:* Einschliessungssätze bei normalen und bei positiven Operatoren. Arch. Rat. Mech. Anal. *21* (1966), 58—88.

[5] *A. S. Householder:* The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Blaisdell Publ. New York 1964.

[6] *М. А. Красносельский:* Положительные решения операторных уравнений. Гостехиздат, Москва 1962.

[7] *М. Г. Крейн, М. А. Рутман:* Линейные операторы оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Усп. мат. наук *III* (1948), No. 1, 3—95.

[8] *I. Marek:* An infinite dimensional analogue of R. S. Varga's lemma. Comment. Math. Univ. Carolinae *8*, 1 (1967), 27—38.

[9] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ. *12* (1962), 536—554.

[10] *I. Marek:* Некоторые математические задачи теории ядерных реакторов на быстрых нейтронах. Aplikace matematiky *8* (1963), 442—470.

[11] *I. Marek:* Positivität und kritischer Zustand. Vorträge der 3. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik. Karl-Marx-Stadt 1966, 191—205.

[12] *I. Marek:* Spektraleigenschaften der $\mathcal{K}$-positiven Operatoren und Einschliessungssätze für den Spektralradius. Czech. Math. Journ. *16* (1966), 493—517.

[13] *I. Marek:* u_0-positive operators and some of their applications. Journ. Soc. Industr. Appl. Math. *15* (1967), No. 3, 384—394.

[14] *F. Niiro, I. Sawashima:* On the spectral properties of positive irreducible operators in an arbitrary Banach lattice and problem of H. H. Schaefer. Sci. Pap. Cóll. Gen. Education, Univ. of Tokyo, *16* (1966), 145—183.

[15] *I. Sawashima:* On spectral properties of some positive operators. Nat. Sci. Rep. of the Ochanomizu Univ. *15* (1964), 53—64.

[16] *A. E. Taylor:* Introduction to Functional Analysis. J. Wiley, Publ., New York 1958.

[17] *R. S. Varga:* Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1962.

[18] *T. Yamamoto:* A computational method for the dominant root of a nonnegative irreducible matrix. Numer. Math. *8* (1966), 324—333.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО НЕРАЗЛОЖИМОГО ОПЕРАТОРА

ИВО МАРЕК (Ivo Marek)

Целью этой статьи является отыскание двухсторонних границ для спектрального радиуса оператора T, принадлежащего определенному классу отображений некоторого банахова пространства $\mathscr{Y}$ в себя, оставляющего инвариантным конус $\mathscr{K}$ этого пространства. С помощью обобщенного принципа минимакса [12, 13] обобщается как принцип включения Коллатца [2, 3] так и принцип Ямамото [18]. Можно сказать, что центр тяжести принципа Коллатца заключается в его применении в вычислительной математике и вообще в практическом анализе, между тем как характер приложений принципа Ямамото, по существу, теоретический (см. [8]). Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1 и 2.

Множество $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$, где $\mathscr{K}'$ – сопряженный с $\mathscr{K}$ конус, называется $\mathscr{K}$-тотальным, если из соотношений $\langle x, x' \rangle \geqq 0$ для $x' \in \mathscr{H}'$ вытекает, что $x \in \mathscr{K}$. Здесь $\langle x, x' \rangle$ – значение функционала x' на элементе x. Вектор $x \in \mathscr{K}$ является ненесущим элементом конуса $\mathscr{K}$, если $\langle x, x' \rangle > 0$ для всех $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq 0$. Оператор T по определению обладает свойством (S), если точки λ спектра $\sigma(T)$, для которых $|\lambda| = \varrho(T)$, где $\varrho(T)$ – спектральный радиус оператора T, являются изолированными полюсами резольвенты $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть*

(i) *оператор* $T \in [\mathscr{Y}]$ *обладает свойством* (S);

(ii) *для* T *выполнено по крайней мере одно из двух следующих условий;*

(iia) T *является полуненесущим* (*semi-non-support* [15]) *оператором;*

(iiб) T *является* u_0*-положительным оператором* ([6])*;*

(iiia) $\hat{x} \in \mathscr{K}$, $\hat{x} \neq 0$,

(iiiб) $\hat{x} \in \mathscr{K}$ *и имеется* $\tau > 0$ *такое, что* $(\hat{x} - \tau u_0) \in \mathscr{K}$.

Тогда справедливы неравенства

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n+1} \leqq \varrho(T) \leqq \beta_{n+1} \leqq \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

в которых

$$\alpha_n = \inf_{x' \in \mathscr{H}'} \frac{\langle T^n \hat{x}, x' \rangle}{\langle T^{n-1} \hat{x}, x' \rangle}, \quad \beta_n = \sup_{x' \in \mathscr{H}'} \frac{\langle T^n \hat{x}, x' \rangle}{\langle T^{n-1} \hat{x}, x' \rangle}.$$

Равенства $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = \varrho(T)$ *имеют место в случае* (b) *всегда и в случае* (a) *тогда, если* $\varrho = \varrho(T)$ *является единственной точкой спектра* $\sigma(T)$, *для которой* $|\lambda| = \varrho(T)$, $\lambda \in \sigma(T)$.

Теорема 2. *Предположим, что*

(A) $T \in [\mathscr{Y}]$ — *положительный оператор;*

(B) $\hat{x} \in \mathscr{K}$ — *ненесущий элемент конуса* $\mathscr{K}$*;*

(C) $\mathscr{H}'$ — $\mathscr{K}$*-тотальное множество такое, что* $\langle \hat{x}, x' \rangle = 1$ *для всех* $x' \in \mathscr{H}'$.

Тогда справедливы неравенства

$$r(T) \leqq [r(T^2)]^{1/2} \leqq \ldots \leqq [r(T^{2^n})]^{2^{-n}} \leqq \ldots \leqq \varrho(T) \leqq \ldots \leqq [R(T^{2^n})]^{2^{-n}} \leqq \ldots \leqq$$
$$\leqq [R(T^2)]^{1/2} \leqq R(T),$$

в которых

$$r(T) = \inf_{x' \in \mathscr{H}'} \langle T\hat{x}, x' \rangle, \quad R(T) = \sup_{x' \in \mathscr{H}'} \langle T\hat{x}, x' \rangle.$$

Если сверх предположений (A)–(C)

(D) *оператор* T *обладает свойством* (S);

(E) T *является полуненесущим оператором;*

(F) *существуют положительные* α, β *и целое положительное* l *так, что имеют место соотношения*

$$\alpha x_0 \prec T^l \hat{x}_0 \prec \beta x_0,$$

где

$$x_0 = [\varrho(T)]^{-1} T x_0, \quad x_0 \in \mathscr{K}, \quad x_0 \neq 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} [r(T^{2^n})]^{2^{-n}} = \lim_{n \to \infty} [R(T^{2^n})]^{2^{-n}} = \varrho(T).$$

Zusammenfassung

ANGENÄHERTE BESTIMMUNG DES SPEKTRALRADIUS EINER POSITIVEN UNZERLEGBAREN ABBILDUNG

Ivo Marek

Das Ziel der Arbeit ist, beiderseitige Schranken für den Spektralradius anzugeben, die den Kegel $\mathscr{K}$ der nichtnegativen Elemente des Banachraumes $\mathscr{Y}$ reproduzieren. Mit Hilfe des verallgemeinerten Minimaxprinzips wird einerseits der Collatz'sche Quotientensatz [2, 3], andererseits der von Yamamoto [18] verallgemeinert. Während man den Schwerpunkt der Anwendungen des Collatz'schen Prinzips in der numerischen Praxis sehen kann, hat die Anwendung des Prinzips von Yamamoto einen eher theoretischen Charakter (siehe [8]). Die Hauptresultate sind in den Sätzen 1 und 2 enthalten.

Die Teilmenge $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$, wo $\mathscr{K}'$ der Dualkegel zum Kegel $\mathscr{K}$ ist, wird $\mathscr{K}$-totale Menge genannt, wenn aus den Bedingungen $\langle x, x' \rangle \geqq 0$ für $x' \in \mathscr{H}'$ wo $\langle x, x' \rangle = x'(x)$, folgt $x \in \mathscr{K}$. Der Vektor $x \in \mathscr{K}$ heist nichttragend [15], wenn die Beziehungen $\langle x, x' \rangle > 0$ für alle $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$, gelten.

Der Operator T hat die Eigenschaft (S), wenn die Punkte λ seines Spektrums $\sigma(T)$, die auf der Kreislinie $|\lambda| = \varrho(T)$ liegen, wo $\varrho(T)$ der Spektralradius des Operators T ist, isolierte Pole der Resolvente $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ sind.

Satz 1. *Es möge gelten*

(i) *der Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ hat die Eigenschaft (S);*

(ii) *der Operator T besitzt wenigstens eine von den folgenden Eigenschaften:*

(iiia) *T ist halbnichttragend (semi-non-support [15]),*

(iiib) *T ist u_0-positiv [6];*

(iiia) $\hat{x} \in \mathscr{K}$, $\hat{x} \neq o$,

(iiib) *$\hat{x} \in \mathscr{K}$ und es existiert ein $\tau > 0$ so, dass $(\hat{x} - \tau u_0) \in \mathscr{K}$. Dann gelten die Ungleichungen*

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n+1} \leqq \varrho(T) \leqq \beta_{n+1} \leqq \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

wo

$$\alpha_n = \inf_{x' \in \mathscr{H}'} \frac{\langle T^n \hat{x}, x' \rangle}{\langle T^{n-1} \hat{x}, x' \rangle}, \quad \beta_n = \sup_{x' \in \mathscr{H}'} \frac{\langle T^n \hat{x}, x' \rangle}{\langle T^{n-1} \hat{x}, x' \rangle}.$$

Die Gleichung $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n$ is gesichert im Falle (b) immer und im Falle (a) dann, wenn der Punkt $\varrho = \varrho(T)$ ein dominantes Element des Spektrums $\sigma(T)$ ist, d.h. wenn $|\lambda| < \varrho(T)$ für $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \varrho(T)$, ist.

Satz 2. *Es möge gelten*

(A) *$T \in [\mathscr{Y}]$ ist ein positiver Operator;*

(B) *$\hat{x} \in \mathscr{K}$ ist ein nichttragendes Element des Kegels;*

(C) *$\mathscr{H}'$ ist eine $\mathscr{K}$-totale Menge mit der Eigenschaft $\langle \hat{x}, x' \rangle = 1$ für $x' \in \mathscr{H}'$.*

Dann gelten die folgenden Ungleichungen

$$r(T) \leqq [r(T^2)]^{1/2} \leqq \ldots \leqq [r(T^{2^n})]^{2^{-n}} \leqq \ldots \leqq \varrho(T) \leqq \ldots \leqq$$
$$\leqq [R(T^{2^n})]^{2^{-n}} \leqq \ldots \leqq [R(T^2)]^{1/2} \leqq R(T).$$

Wenn noch gilt

(D) *der Operator T hat die Eigenschaft (S);*

(E) *der Operator T ist halbnichttragend;*

(F) *es gibt positive Zahlen α, β und eine natürliche Zahl l so, dass die Beziehungen*

$$\alpha x_0 \prec T^l \hat{x} \prec \beta x_0$$

gelten, wobei

$$x_0 = [\varrho(T)]^{-1} T x_0, \quad x_0 \in \mathscr{K}, \quad x_0 \neq o,$$

dann ist

$$\lim_{n \to \infty} [r(T^{2^n})]^{2^{-n}} = \lim_{n \to \infty} [R(T^{2^n})]^{2^{-n}} = \varrho(T).$$

Adresa autora: Dr. *Ivo Marek* C.Sc., Matematicko-fyzikální fakulta university Karlovy, Sokolovská 83, Praha - Karlín.