Petr Mandl

O Eaton-Zadehově způsobu řízení difusních procesů

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 4, 308–317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103104

O EATON–ZADEHOVĚ ZPŮSOBU ŘÍZENÍ DIFUSNÍCH PROCESŮ

PETR MANDL

(Došlo dne 7. července 1966.)

V práci [1] J. H. EATON a L. A. ZADEH udali metodu zmenšování celkového očekávaného nákladu v řízeném Markovově řetězci. V této práci je Eaton-Zadehova metoda přenesena na difusní procesy a je provedena její modifikace pro zmenšování průměrného nákladu na jednotku zobecněného času nepřetržitých procesů.

Uvažujme konečný počet homogenních Markovových procesů $X(j) = \{{}^j x_t, t \geqq 0\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, na ohraničeném intervalu $I = [r_0, r_1]$, jejichž vývoj je popsán následujícím způsobem: Uvnitř intervalu I koná trajektorie procesu $X(j)$ difusní pohyb s koeficientem difuse $a(x, j)$ a koeficientem lokálního posunutí $b(x, j)$, kde $a(x, j)$, $b(x, j)$ jsou ohraničené po částech spojité funkce, $a(x, j)$ větší než kladná konstanta. Dosáhne-li trajektorie hranice r_i, potom s pravděpodobností p_i zanikne a s pravděpodobností $1 - p_i$ začíná znovu uvnitř intervalu I v (náhodném) bodě, jehož rozložení pravděpodobností je dáno distribuční funkcí $\mu_i(x)$. Okamžik zániku procesu $X(j)$ budeme označovat $\zeta(j)$. Je-li $p_0 + p_1 > 0$, je

$$E\{\zeta(j) \mid {}^j x_0 = x\} < \infty \quad \text{pro} \quad x \in I, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Je-li $p_0 = p_1 = 0$, je

$$P(\zeta(j) = \infty \mid {}^j x_0 = x) = 1 \quad \text{pro} \quad x \in I, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Buďtež dále $c(x, j)$, $d(x, j)$, $j = 1, \ldots, n$, ohraničené po částech spojité funkce na I, $d(x, j) > 0$, $v_i(x)$, $\tau_i(x) \geqq 0$, $i = 0, 1$, integrovatelné funkce vzhledem k $\mu_i(x)$, $\lambda_i = \lambda(r_i)$, $i = 0, 1$ dvě reálná čísla. Označme $\varphi_i(t, x, j)$ počet odskoků trajektorie procesu $X(j)$ od hranice r_i do intervalu $[r_0, x]$, které se uskutečnily před okamžikem t. Předpokládáme, že průběhu procesu jsou přiřazeny dvě veličiny

$$\gamma(t, j) = \int_0^t c({}^j x_s, j) \, \mathrm{d}s + \sum_{i=0}^{1} \int v_i(x) \, \mathrm{d}\varphi_i(t, x, j) + \\ + \chi_{\{\zeta(j) \leqq t\}} \lambda({}^j x_{\zeta(j)-0}), \tag{3}$$

$$\psi(t, j) = \int_0^t \mathrm{d}({}^j x_s, j) \, \mathrm{d}s + \sum_{i=0}^{1} \int \tau_i(x) \, \mathrm{d}\varphi_i(t, x, j). \tag{4}$$

Zde

$$\chi_{\{\zeta(j)\leqq t\}} = 1 \quad \text{pro} \quad \zeta(j) \leqq t\,,$$
$$= 0 \quad \text{pro} \quad \zeta(j) > t\,.$$

$\gamma(t, j)$ budeme nazývati nákladem na proces $X(j)$ do doby t, $\psi(t, j)$ budeme nazývati zobecněným časem v procesu $X(j)$ v době t. V práci [5] byly uvedeny konkrétní příklady takových veličin.

Mějme nyní nějaký reálný objekt (fyzikální, biologickou soustavu apod.), jehož vývoj může být popsán některým z procesů $X(j)$ podle naší volby. Index j představuje parametr řízení. Řízením objektu rozumíme po částech spojitou funkci $\upsilon(x)$ na intervalu I nabývající hodnot $1, \ldots, n$. Funkce $\upsilon(x)$ udává hodnotu parametru řízení, kterou volíme, když se objekt nachází v poloze x. Množinu všech řízení budeme označovati M. Volbou řízení $\upsilon(x)$ vznikne řízený proces $Y(\upsilon) = \{y_t, t \geqq 0\}$ s koeficientem difuse $a(x, \upsilon(x))$ a koeficientem lokálního posunutí $b(x, \upsilon(x))$. Pro případ $p_0 + p_1 > 0$ je vyložen v práci postup, umožňující najíti $\upsilon(x)$ tak, aby celkový očekávaný náklad na proces $Y(\upsilon)$ byl pro všechny výchozí polohy trajektorie menší nebo roven celkovému očekávanému nákladu na proces $X(j)$ pro všechna $j = 1, \ldots, n$. Jedná se o analog metody, nalezené J. H. EATONEM a L. A. ZADEHEM ([1]) pro Markovovy řetězce. Pro případ $p_0 = p_1 = 0$ je pak vyložen postup nalezení $\upsilon(x)$ takového, aby průměrný náklad na jednotku zobecněného času v řízeném procesu $Y(\upsilon)$ byl menší nebo roven průměrnému nákladu na jednotku zobecněného času v procesu $X(j)$ pro $j = 1, \ldots, n$. (Zřejmě možno položiti $\upsilon(x) \equiv j_0$, kde v procesu $X(j_0)$ je průměrný náklad na jednotku zobecněného času nejmenší. Tímto postupem ovšem nikdy nedocílíme skutečně menšího průměrného nákladu.) I když předložené metody nevedou obecně k nalezení optimálního řízení, mohou sloužiti jako podklad k nacházení optimálního řízení postupnými aproximacemi. Rovnice pro určení optimálního řízení jsou uvedeny v [3], [4].

Mějme $\upsilon(x) \in M$ a budiž $Y(\upsilon) = \{y_t, t \geqq 0\}$ řízený proces odpovídající řízení υ. Náklad na $Y(\upsilon)$ a zobecněný čas v $Y(\upsilon)$ označme ve shodě s (3), (4)

$$(5) \qquad \gamma(t, \upsilon) = \int_0^t c(y_s, \upsilon(y_s))\,\mathrm{d}s + \sum_{i=0}^{1} \int v_i(y)\,\mathrm{d}\varphi_i(t, y, \upsilon) + \chi_{\{\zeta(\upsilon)\leqq t\}}\,\lambda(y_{\zeta(\upsilon)-0})\,,$$

$$(6) \qquad \psi(t, \upsilon) = \int_0^t \mathrm{d}(y_s, \upsilon(y_s))\,\mathrm{d}s + \sum_{i=0}^{1} \int \tau_i(y)\,\mathrm{d}\varphi_i(t, y, \upsilon)\,.$$

Zaveďme očekávanou hodnotu Laplaceovy transformace veličiny $\gamma(t, \upsilon)$

$$v(x) = v(x, \lambda, \upsilon) = E\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\gamma(t, \upsilon)\,\mathrm{d}t / y_0 = x\right\}.$$

Zde $\lambda \geqq 0$, platí-li (1), $\lambda > 0$ platí-li (2).

Lemma 1. $v(x)$ *je jediná funkce se spojitou derivací na I taková, že platí*

$$(7) \qquad a(x, v(x)) \frac{d^2}{dx^2} v(x) + b(x, v(x)) \frac{d}{dx} v(x) - \lambda v(x) + c(x, v(x)) = 0$$

v bodech spojitosti funkcí

$$(8) \qquad a(x, v(x)), \quad b(x, v(x)), \quad c(x, v(x))$$

a jsou splněny okrajové podmínky

$$(9) \qquad v(r_i) = (1 - p_i) \int (v(x) + v_i(x)) \, d\mu_i(x) + p_i \lambda_i \quad \textit{pro} \quad i = 0, 1 .$$

Důkaz lemmatu, který se provádí metodami běžnými v teorii difusních procesů, pouze naznačíme. Nechť $x \in (r_0, r_1)$ je bodem spojitosti funkcí (8). Máme pro $\Delta > 0$, $\Delta \to 0$,

$$v(x) = E\left\{\int_0^{\Delta} e^{-\lambda t} \gamma(t, v) \, dt / y_0 = x\right\} +$$

$$+ E\left\{\int_{\Delta}^{\infty} e^{-\lambda t} \gamma(t, v) \, dt / y_0 = x\right\} = c(x, v(x)) \Delta +$$

$$+ e^{-\lambda\Delta} E\{v(y_\Delta) / y_0 = x\} + o(\Delta) .$$

Odkud

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} [E\{v(y_\Delta) / y_0 = x\} - v(x)] = -c(x, v(x)) \Delta +$$

$$+ \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} (1 - e^{-\lambda\Delta}) E\{v(y_\Delta) / y_0 = x\} = -c(x, v(x)) + \lambda v(x) .$$

Limita nalevo je rovna

$$a(x, v(x)) \frac{d^2}{dx^2} v(x) + b(x, v(x)) \frac{d}{dx} v(x) .$$

(Jsou-li funkce (8) dostatečně hladké, můžeme se o tom přesvědčiti použitím Taylorova rozvoje funkce $v(x)$.) Odtud dostáváme rovnici (7). Okrajové podmínky (9) vyplývají bezprostředně z chování trajektorie po dosažení hranice r_i.

Poznamenejme, že chování trajektorie procesů $X(j)$, $j = 1, \ldots, n$, po dosažení hranic, popsané na začátku není nejobecnější, neboť neuvažujeme adhesi a reflektování trajektorie (viz [2]). Abychom nezmenšovali obecnost dalšího výkladu, uveďme bez důkazu, že v obecném případě podmínky (9) mají tvar

$$(10) \qquad (\vartheta_i + \kappa_i) v(r_i) - \vartheta_i \int (v(x) + v_i(x)) \, d\mu_i(x) - (-1)^i \pi_i v'(r_i) +$$

$$+ \sigma_i(\lambda v(r_i) - c(r_i, v(r_i))) - \kappa_i \lambda_i = 0 , \quad i = 0, 1 .$$

Zde ϑ_i, κ_i, π_i, σ_i jsou nezáporné konstanty, nikoliv vesměs rovné nule, čárka značí derivaci podle x. Přitom (1) platí pro $\kappa_0 + \kappa_1 > 0$, $\vartheta_i + \kappa_i + \pi_i > 0$, $i = 0, 1$, (2) platí pro $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$. V dalším budeme vycházeti z podmínek (10).

Nechť $\kappa_0 + \kappa_1 > 0$. Označme $u(x, v) = v(x, 0, v)$ celkový očekávaný náklad při řízení v za podmínky, že počáteční poloha trajektorie je x. Z (1) vyplývá, že $u(x, v)$ je konečná veličina. Celkový očekávaný náklad na proces $X(j)$, tj. $u(x, v)$ pro $v \equiv j$ budeme označovati $u_j(x)$.

Věta 1. *Budiž $\kappa_0 + \kappa_1 > 0$, $\vartheta_i + \kappa_i + \pi_i > 0$ pro $i = 0, 1$. Nechť o $\omega(x) \in M$ platí:*

1. *Pro $x \in (r_0, r_1)$ platí $\omega(x) = j$ jen tehdy, když*

$$u_j(x) = \min \{u_k(x), k = 1, \ldots, n\}.$$

2. *Je-li $\sigma_i \neq 0$, potom $\omega(r_i) = j$ jen tehdy, když*

$$c(r_i, j) = \min \{c(r_i, k), k = 1, \ldots, n\}.$$

Potom

$$u(x, \omega) \leqq \min \{u_k(x), k = 1, \ldots, n\} \quad \text{pro} \quad x \in I.$$

D ů k a z. Označme

$$u(x, \omega) = u_0(x), \quad \bar{u}(x) = \min \{u_k(x), k = 1, \ldots, n\}, \quad \tilde{u}(x) = \bar{u}(x) - u_0(x).$$

Budiž dále $x_0 = r_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_m = r_1$ uspořádaná posloupnost bodů taková, že na každém z intervalů (x_{k-1}, x_k), $k = 1, 2, \ldots, m$ je $\omega(x)$ konstantní. Nechť $\omega(x) = j$ na intervalu (x_{k-1}, x_k). Z (7) pro $v = \omega$, $\lambda = 0$ dostáváme

$$a(x, j) \frac{d^2}{dx^2} u_0(x) + b(x, j) \frac{d}{dx} u_0(x) + c(x, j) = 0, \tag{11}$$

kdykoliv $x \in (x_{k-1}, x_k)$ je bodem spojitosti funkcí $a(., j)$, $b(., j)$, $c(., j)$. Dále, podle předpokladu 1., $\bar{u}(x) = u_j(x)$ pro $x \in (x_{k-1}, x_k)$ a $u_j(x) = v(x, 0, v)$ pro $v \equiv j$ splňuje (7) pro $v \equiv j$, $\lambda = 0$. Platí tedy také

$$a(x, j) \frac{d^2}{dx^2} \bar{u}(x) + b(x, j) \frac{d}{dx} \bar{u}(x) + c(x, j) = 0. \tag{12}$$

Odečteme-li (11) od (12), nahlédneme, že

$$a(x, \omega(x)) \frac{d^2}{dx^2} \tilde{u}(x) + b(x, \omega(x)) \frac{d}{dx} \tilde{u}(x) = 0 \tag{13}$$

pro každé $x \in I$, $x \neq x_k$, $k = 0, \ldots, m$, které je bodem spojitosti funkcí

$$a(x, \omega(x)), \quad b(x, \omega(x)), \quad c(x, \omega(x)).$$

Uvažujme nyní x_k pro nějaké $k = 1, \ldots, m - 1$. Nechť $\bar{u}(x) = u_i(x)$ pro $x \in \in (x_{k-1}, x_k)$, $\bar{u}(x) = u_l(x)$ pro $x \in (x_k, x_{k+1})$. Potom $u_i(x_k) = u_l(x_k)$, $u_i(x) \leqq u_l(x)$ pro $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $u_i(x) \geqq u_l(x)$ pro $x \in (x_k, x_{k+1})$. Odkud

$$D^- \bar{u}(x_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_i(x_k) \geqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_l(x_k) = D^+ \bar{u}(x_k),$$

kde D^-, D^+ označuje derivaci zleva a zprava. Jelikož, podle lemmatu 1, $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\, u_j(x)$, $j = 0, \ldots, n$ jsou spojité na I, vidíme, že $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\, \tilde{u}(x)$ je spojitá pro $x \neq x_k$, $k = 0, \ldots, m$ a

$$D^- \tilde{u}(x_k) \geqq D^+ \tilde{u}(x_k) \quad \text{pro} \quad k = 1, \ldots, m - 1\,. \tag{14}$$

Z (13) vyplývá, že v každém intervalu (x_{k-1}, x_k) platí

$$\tilde{u}(x) = K_{k1} + K_{k2} \int_{x_{k-1}}^{x} Q(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

kde K_{k1}, K_{k2} jsou konstanty a

$$Q(x) = \exp\left[- \int_{r_0}^{x} b(s, \omega(s))\, a(s, \omega(s))^{-1}\, \mathrm{d}s \right].$$

Vidíme, že $\tilde{u}(x)$ je monotonní na intervalech (x_{k-1}, x_k). Z (14) tedy vyplývá existence r, $0 \leqq r \leqq m$, takového, že $\tilde{u}(x)$ je neklesající pro $x < x_r$ a nerostoucí pro $x > x_r$. Vidíme, že $\tilde{u}(x)$ nabývá své minimální hodnoty v některém z hraničních bodů r_0, r_1. Přitom $\tilde{u}(x)$ nabývá minima pouze na hranici, pokud není rovno konstantě.

Předpokládejme, že pro nějaké $x_0 \in I$, $\tilde{u}(x_0) < 0$. Z tohoto předpokladu odvodíme spor. Budiž r_i ten hraniční bod, ve kterém je $\tilde{u}(x)$ minimální. Nabývá-li $\tilde{u}(x)$ v obou hraničních bodech stejné hodnoty, volme r_i tak, že $\kappa_i > 0$. Máme

$$(\vartheta_i + \kappa_i)\, \tilde{u}(r_i) \leqq \vartheta_i\, \tilde{u}(r_i) \leqq \vartheta_i \int \tilde{u}(x)\, \mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i\, \pi_i\, \tilde{u}'(r_i)\,, \tag{15}$$

neboť $\mu_i(I) = 1$, $(-1)^i\, \pi_i\, \tilde{u}'(r_i) \geqq 0$. Z právě zmíněných vlastností funkce $\tilde{u}(x)$ vyplývá, že alespoň jedna z nerovností (15) je ostrá. Tedy platí

$$(\vartheta_i + \kappa_i)\, \tilde{u}(r_i) < \vartheta_i \int \tilde{u}(x)\, \mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i\, \pi_i\, \tilde{u}'(r_i)\,. \tag{16}$$

Na druhé straně podle (10) funkce $u_j(x)$, $j = 0, \ldots, n$, splňují okrajovou podmínku

$$(\vartheta_i + \kappa_i)\, u_j(r_i) = \vartheta_i \int u_j(x)\, \mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i\, \pi_i\, u_j'(r_i) + \tag{17}$$

$$+ \vartheta_i \int v_i(x)\, \mathrm{d}\mu_i(x) + \kappa_i \lambda_i + \sigma_i\, c(r_i, j)\,,$$

kde $c(r_i, 0) = c(r_i, \omega(r_i))$. Budiž l takové, že platí $\bar{u}(x) = u_l(x)$ pro x z nějakého okolí bodu r_i, $x \neq r_i$. Potom

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad & (\vartheta_i + \kappa_i)\,\tilde{u}(r_i) = (\vartheta_i + \kappa_i)\,(u_l(r_i) - u_0(r_i)) = \\
& = \vartheta_i \int (u_l(x) - u_0(x))\,\mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i\,\pi_i(u_l'(r_i) - u_0'(r_i)) + \\
& + \sigma_i(c(r_i, l) - c(r_i, 0)) \geqq \vartheta_i \int \tilde{u}(x)\,\mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i\,\pi_i\,\tilde{u}'(r_i)\,,
\end{aligned}
$$

neboť je $\sigma_i(c(r_i, l) - c(r_i, 0)) \geqq 0$ podle předpokladu 2. (18) je ve sporu s (16). Vidíme tedy, že je $\tilde{u}(x) \geqq 0$, tj. $u(x, \omega(x)) \leqq \min\{u_k(x), k = 1, \ldots, n\}$. Tím je věta 1 dokázána.

Předpokládejme nyní $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$, $\vartheta_i + \pi_i > 0$ pro $i = 0, 1$, v podmínkách (10). Potom platí (2) a celkový očekávaný náklad na řízený proces nemá smysl. Mějme $v \in M$ a buďtež $\gamma(t, v)$, $\psi(t, v)$ definovány vztahy (5), (6). Z ergodických vět o difusních procesech vyplývá, že s pravděpodobností 1 existují

$$
(19) \qquad \lim_{t \to \infty} t^{-1}\,\gamma(t, v) = \Theta_1\,, \quad \lim_{t \to \infty} t^{-1}\,\psi(t, v) = \Theta_2 > 0
$$

a nezávisí na počáteční poloze trajektorie procesu $Y(v)$. Existuje tedy také

$$
\lim_{t \to \infty} \gamma(t, v)\,\psi(t, v)^{-1} = \Theta(v)\,.
$$

$\Theta(v)$ představuje průměrný náklad na jednotku zobecněného času při řízení v.

Lemma 2. *$\Theta(v)$ je jediné číslo takové, že existuje funkce $w(x) = w(x, v)$, která má spojitou derivaci na I a platí*

$$
(20) \quad a(x, v(x))\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,w(x) + b(x, v(x))\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,w(x) + c(x, v(x)) - \Theta(v)\,d(x, v(x)) = 0
$$

pro každé x, které je bodem spojitosti funkcí

$$
(21) \qquad a(x, v(x))\,, \quad b(x, v(x))\,, \quad c(x, v(x))\,, \quad d(x, v(x))
$$

a jsou splněny podmínky

$$
\begin{aligned}
(22) \qquad & \vartheta_i \int (w(x) - w(r_i))\,\mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i\,\pi_i\,w'(r_i) + \\
& + \vartheta_i \int (v_i(x) - \Theta(v)\,\tau_i(x))\,\mathrm{d}\mu_i(x) + \\
& + \sigma_i(c(r_i, v(r_i)) - \Theta(v)\,d(r_i, v(r_i))) = 0\,, \quad i = 0, 1\,.
\end{aligned}
$$

Z důkazu lemmatu 2, které je obdobou věty 1 z [4] uvedeme opět pouze hlavní myšlenky.

Podle (19)

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} E\{\gamma(t, \upsilon)/y_0 = x\} = \Theta_1 .$$

Odtud podle známé vlastnosti Laplaceovy transformace

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} E\{\gamma(t, \upsilon)/y_0 = x\} \, \mathrm{d}t = \lim_{\lambda \to 0} \lambda \, v(x, \lambda, \upsilon) = \Theta_1 .$$

Označme

$$w_1(x) = \lim_{\lambda \to 0} [v(x, \lambda, \upsilon) - v(r_0, \lambda, \upsilon)] .$$

Limitním přechodem pro $\lambda \to 0$ v (7) odvodíme rovnici

$$a(x, \upsilon(x)) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} w_1 + b(x, \upsilon(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w_1 - \Theta_1 + c(x, \upsilon(x)) = 0 . \tag{23}$$

Stejným limitním přechodem v rovnici, která je obdobou (7) pro Laplaceovu transformaci očekávané hodnoty zobecněného času, obdržíme

$$a(x, \upsilon(x)) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} w_2 + b(x, \upsilon(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w_2 - \Theta_2 + d(x, \upsilon(x)) = 0 . \tag{24}$$

Vynásobením (24) $\Theta_1 \Theta_2^{-1} = \Theta(\upsilon)$ a odečtením od (23) dostáváme (20) s $w = w_1 - \Theta(\upsilon) w_2$. Podobným způsobem s použitím (10) se odvodí podmínky (22).

Budeme psáti $\Theta(\upsilon) = \Theta(j)$ pro $\upsilon(x) \equiv j$, $j = 1, \ldots, n$.

Věta 2. *Nechť $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$ a pro $i = 0, 1$ je buď $\vartheta_i > 0$ nebo současně $\pi_i > 0$, $\sigma_i > 0$. Označme*

$$\hat{\Theta} = \min \{\Theta(k), k = 1, \ldots, n\}$$

a nechť funkce $w_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, mají spojitou derivaci na I a splňují

$$a(x, k) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} w_k(x) + b(x, k) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w_k(x) + c(x, k) - \hat{\Theta} \, d(x, k) = 0 \tag{25}$$

pro každé x, které je bodem spojitosti funkcí

$$a(x, k) , \quad b(x, k) , \quad c(x, k) , \quad d(x, k) ,$$

a vyhovují podmínkám

$$\vartheta_i \int (w_k(x) - w_k(r_i)) \, \mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i \pi_i w_k'(r_i) + \tag{26}$$
$$+ \vartheta_i \int (v_i(x) - \hat{\Theta} \, \tau_i(x)) \, \mathrm{d}\mu_i(x) + \sigma_i (c(r_i, k) - \hat{\Theta} \, d(r_i, k)) = 0 , \quad i = 0, 1 .$$

Nechť o $v(x) \in M$ platí:

1. *Existuje $l = 0$ neb 1 tak, že, pro $x \in (r_0, r_1)$, $v(x) = j$ jen tehdy, když $w_j(x) - w_j(r_l) = \min \{w_k(x) - w_k(r_l),\ k = 1, \ldots, n\}$.*

2. *Je-li $\sigma_i \neq 0$, potom $v(r_i) = j$ jen tehdy, když $c(r_i, j) - \hat{\Theta}\, d(r_i, j) = \min \{c(r_i, k) - \hat{\Theta}\, d(r_i, k),\ k = 1, \ldots, n\}$. Potom*

$$\Theta(v) \leqq \hat{\Theta}\,. \tag{27}$$

Důkaz. Položme $\bar{w}_k(x) = w_k(x) - w_k(r_l)$ pro $k = 1, \ldots, n$. Porovnáme-li (25), (26) se (7), (10) pro $v(x) \equiv k$, $\lambda = 0$, vidíme, že $\bar{w}_k(x)$ vyhovují obdobným rovnicím a okrajovým podmínkám jako funkce $u_k(x)$ ve větě 1. Přitom za okrajovou podmínku v bodě r_l považujeme $\bar{w}_k(r_l) = 0$. Nechť $\bar{w}_0(x)$ má spojitou derivaci a platí

$$a(x, v(x)) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \bar{w}_0(x) + b(x, v(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \bar{w}_0(x) + c(x, v(x)) - \hat{\Theta}\, d(x, v(x)) = 0 \tag{28}$$

pro každé x, které je bodem spojitosti funkcí (21) a jsou splněny okrajové podmínky

$$\bar{w}_0(r_l) = 0\,, \tag{29}$$

$$\vartheta_i \int (\bar{w}_0(x) - \bar{w}_0(r_i))\, \mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i \pi_i\, \bar{w}_0'(r_i) + \vartheta_i \int (v_i(x) - \hat{\Theta}\, \tau_i(x))\, \mathrm{d}\mu_i(x) + \sigma_i(c(r_i, v(r_i)) - \hat{\Theta}\, d(r_i, v(r_i))) = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq l\,. \tag{30}$$

Potom předpoklady 1., 2. věty 2 mají podle věty 1 za následek

$$\bar{w}_0(x) \leqq \bar{w}_k(x) \quad \text{pro} \quad x \in I,\ k = 1, \ldots, n\,. \tag{31}$$

Nechť $v(x) = j$ pro x z nějakého okolí bodu r_l, $x \neq r_l$. Pak vzhledem k (31), (29) a (26) platí

$$\begin{aligned}\vartheta_l \int \bar{w}_0(x)\, \mathrm{d}\mu_l(x) + (-1)^l \pi_l\, \bar{w}_0'(r_l) &\leqq \vartheta_l \int \bar{w}_j(x)\, \mathrm{d}\mu_l(x) + (-1)^l \pi_l\, \bar{w}_j'(r_l) = \\ &= -\vartheta_l \int (v_l(x) - \hat{\Theta}\, \tau_l(x))\, \mathrm{d}\mu_l(x) - \sigma_l(c(r_l, j) - \hat{\Theta}\, d(r_l, j)) \leqq \\ &\leqq -\vartheta_l \int (v_l(x) - \hat{\Theta}\, \tau_l(x))\, \mathrm{d}\mu_l(x) - \sigma_l[c(r_l, v(r_l)) - \hat{\Theta}\, d(r_l, v(r_l))]\,.\end{aligned} \tag{32}$$

Poslední nerovnost je důsledkem předpokladu 2.

Připusťme nyní, že (27) neplatí a tedy $\Theta(v) > \hat{\Theta}$. Položme $\tilde{w}(x) = w(x) - \bar{w}_0(x)$, kde $w(x)$ je definováno v lemmatu 2. Odečtením (28) od (20) dostáváme

$$a(x, v(x)) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \tilde{w}(x) + b(x, v(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tilde{w}(x) = (\Theta(v) - \hat{\Theta})\, d(x, v(x)) > 0\,, \tag{33}$$

odečtením (30) a (32) od (22)

$$(34) \qquad \vartheta_i \int (\tilde{w}(x) - \tilde{w}(r_i))\, \mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i \pi_i \tilde{w}'(r_i) \geqq$$
$$\geqq (\Theta(\upsilon) - \hat{\Theta}) \left[\vartheta_i \int \tau_i(x)\, \mathrm{d}\mu_i(x) + \sigma_i\, d(r_i, \upsilon(r_i)) \right] \geqq 0 \quad \text{pro} \quad i = 0, 1 .$$

Z (33) vyplývá, že $\tilde{w}(x)$ nemůže mít uvnitř intervalu I lokální maximum.

Potom v hraničním bodě r_i, ve kterém je $\tilde{w}(x)$ maximální, musí být

$$(35) \qquad \vartheta_i \int (\tilde{w}(x) - \tilde{w}(r_i))\, \mathrm{d}\mu_i(x) + (-1)^i \pi_i \tilde{w}'(r_i) \leqq 0 .$$

Přitom, je-li $\vartheta_i > 0$, je levá strana (35) záporná. To je spor s (34). Je-li $\sigma_i > 0$ je

$$(\Theta(\upsilon) - \hat{\Theta}) \left[\vartheta_i \int \tau_i(x)\, \mathrm{d}\mu_i(x) + \sigma_i\, d(r_i, \upsilon(r_i)) \right] > 0$$

a tedy opět je (35) ve sporu s (34). Musí proto (27) být splněno.

Příklad. Nechť $X(1)$, $X(2)$ jsou dva difusní procesy na intervalu $[-1, 1]$: $a(x, 1) \equiv \equiv a(x, 2) \equiv 1$, $b(x, 1) \equiv 0$, $b(x, 2) \equiv 1$. Po dosažení hranic nechť trajektorie začíná s pravděpodobností 1 v bodě 0. Nechť dále $c(x, 1) \equiv 0$, $c(x, 2) \equiv 1$, $d(x, 1) \equiv \equiv d(x, 2) \equiv 1$, $v_i(0) = N > 0$, $\tau_i(0) = 0$. To znamená, že při odskoku trajektorie od hranice vzniká náklad N a z průběhu procesu $X(2)$ vzniká dodatečný náklad rovný době trvání procesu. Zobecněný čas je totožný s časovým parametrem t tj. $\psi(t, 1) \equiv \psi(t, 2) \equiv t$. Naší úlohou je řízením zmenšiti průměrný náklad na jednotku času. Z rovnic

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} w - \Theta(1) = 0 , \quad w(r_i) = w(0) + N , \quad i = 0, 1 ,$$

najdeme $\Theta(1) = 2N$, z rovnic

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} w + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} w - \Theta(2) = 0 , \quad w(r_i) = w(0) + N , \quad i = 0, 1 ,$$

najdeme

$$\Theta(2) = 1 + N \sinh 1 \left[\cosh 1 - 1\right]^{-1} .$$

Odkud $\hat{\Theta} = \Theta(1) = 2N$. Dále určíme

$$\bar{w}_1(x) = Nx^2 - N , \quad \bar{w}_2(x) = (2N - 1) \left[x + (\sinh 1)^{-1} (e^{-x} - \cosh 1)\right] .$$

Pro $N = 10$ je $\Theta(1) = 20$, $\Theta(2) \doteq 22{,}64$. Dále je $\bar{w}_2(x) \leqq \bar{w}_1(x)$ pro $x \leqq x_0 \doteq \doteq -0{,}390$, $\bar{w}_1(x) \leqq \bar{w}_2(x)$ pro $x \geqq x_0$. Volíme-li $\upsilon(x) = 2$ pro $x \leqq x_0$, $\upsilon(x) = 1$ pro $x > x_0$, pak jsou splněny předpoklady věty 2. Z rovnic (20), (22) obdržíme $\Theta(\upsilon) \doteq 18{,}04$. Uveďme, že $\min \{\Theta(\omega), \omega \in M\} = 17{,}54$.

Literatura

[1] *J. H. Eaton, L. A. Zadeh:* Optimal pursuit strategies in discrete state probabilistic systems. J. of Basic Engin. Ser. D 84 (1961), 23—29.

[2] *W. Feller:* Diffusion processes in one dimension. Trans. of Amer. Math. Soc. 77 (1954), 1—31.

[3] *P. Mandl:* O optimálním řízení jednorozměrných difusních procesů. Aplikace mat. 9 (1964), 412—420.

[4] *П. Мандл:* Об управлении необрывающимися диффузионными процессами. Теория вероят. и ее примен. 9 (1964), 655—669.

[5] *P. Mandl:* Anwendungen der Theorie der optimalen Regelung nichtabbrechender Diffusionsprozesse. Kybernetika 1 (1965), 28—36.

Резюме

О МЕТОДЕ ИТОНА - ЗАДЕГА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl)

Метод понижения ожидаемого расхода на марковскую цепь, разработанный Й. Г. Итоном и Л. А. Задегом в [1], применяется к диффузионным процессам. Дается модификация этого метода для понижения среднего расхода на единицу (обобщенного) времени в необрывающихся диффузионных процессах.

Summary

ON EATON–ZADEH'S METHOD OF CONTROLLING DIFFUSION PROCESSES

Petr Mandl

The method of reducing the expected cost in a Markov chain developed by J. H. Eaton and L. A. Zadeh in [1] is applied to diffusion processes. A modification of this method for reducing the mean cost per unit of (generalized) time in non-stopped diffusion processes is presented.

Adresa autora: Dr. *Petr Mandl* DrSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.