

# Aplikace matematiky

---

Miroslav Šisler

Über die Konvergenzbeschleunigung verschiedener Iterationsverfahren

*Aplikace matematiky*, Vol. 12 (1967), No. 4, 255–267

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103100>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE KONVERGENZBESCHLEUNIGUNG  
VERSCHIEDENER ITERATIONSVERFAHREN

MIROSLAV ŠISLER

(Eingegangen am 19. Oktober 1966.)

1. Sei das System von linearen Gleichungen

$$(1) \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

gegeben, wo  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  eine nichtsinguläre quadratische Matrix vom Typus  $n \times n$  ist ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  sind dabei die Spaltenvektoren). Falls man die Matrix  $\mathbf{A}$  in der Form

$$(2) \quad \mathbf{A} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$$

wo  $\mathbf{P}$  eine nichtsinguläre Matrix ist, schreibt, konvergiert die Folge der durch die Formel

$$(3) \quad \mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{x}_v + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

definierten Vektoren, wie bekannt ist, bei beliebigem Anfangsvektor  $\mathbf{x}_0$  zur Lösung des Systems (1), solange der Spektralradius  $\rho(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q})$  der Matrix  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$  kleiner als 1 ist. Nach der Wahl der Matrizen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  in der Zerlegung (2) bekommt man verschiedene Iterationsverfahren.

In der Arbeit wird gezeigt, wie man bei gegebener Zerlegung (2) der Matrix  $\mathbf{A}$  mit Hilfe der günstigen multiplikativen Konstante bei der Matrix  $\mathbf{P}$  eine (manchmal beträchtlich) Verkleinerung des Spektralradius und dadurch auch eine Konvergenzbeschleunigung der Folge (2) erreichen kann. Man muss aber getrennt den Fall betrachten, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$  reelle Zahlen sind und den Fall, wenn diese Eigenwerte im allgemeinen komplexe Zahlen sind. Beide Fälle können eintreten, wie aus folgenden bekannten Sätzen offensichtlich ist:

**1.1.** *Seien  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$  hermitesche positiv definite Matrizen. Dann ist die Matrix  $\mathbf{P}$  nichtsingulär und die Matrix  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$  hat insgesamt reelle Eigenwerte, die zu dem Intervalle  $(-1, 1)$  gehören müssen.*

1.2. Sei  $\mathbf{P} = \mathbf{S} - \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{*1}$ ) und die Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  seien hermitesch, positiv definit. Dann ist die Matrix  $\mathbf{P}$  nichtsingulär und es gilt  $\varrho(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}) < 1$ .

Definiert man nun die Matrizen  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  folgenderweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (d_{ij}), d_{ij} = 0 && \text{für } i \neq j, d_{ii} = a_{ii} && \text{für } i = 1, \dots, n; \\ \mathbf{L} &= (l_{ij}), l_{ij} = -a_{ij} && \text{für } i > j, l_{ij} = 0 && \text{für } i \leq j; \\ \mathbf{R} &= (r_{ij}), r_{ij} = 0 && \text{für } i \geq j, r_{ij} = -a_{ij} && \text{für } i < j. \end{aligned}$$

Sei ferner  $\mathbf{A}$  eine hermitesche, positiv definite Matrix. Falls man jetzt  $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{L} + \mathbf{R}$  legt, bekommt man das gut bekannte Jacobi-Iterationsverfahren, wobei nach dem Satz 1.1 folgt, dass alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$  real und im Absolutbetrage kleiner als 1 sind. Falls man  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$  setzt, bekommt man das bekannte Gauß-Seidel-Verfahren, dessen Konvergenz nach dem Satz 1.2 folgt, wobei die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$  in diesem Falle komplexe Zahlen sind.

2. In diesem Teil der Arbeit setzt man voraus, dass die Matrix  $\mathbf{A}$  des Systems (1) in der Form

$$(4) \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1,$$

geschrieben ist, wobei die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  insgesamt reell sind und die Ungleichung  $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1) < 1$  gilt. Wählt man jetzt eine reelle Zahl  $k \neq 0$  und bildet man die Zerlegung

$$(5) \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}_k - \mathbf{Q}_k,$$

wo

$$(6) \quad \mathbf{P}_k = k\mathbf{P}_1, \quad \mathbf{Q}_k = (k-1)\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1$$

gilt. Für  $k = 1$  bekommt man offensichtlich die ursprüngliche Zerlegung (4). Die Beziehungen zwischen den Eigenwerten der Matrizen  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  und  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$  drückt folgender Satz aus:

2.1. Seien  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ,  $k \neq 0$ . Dann sind auch die Eigenwerte  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  der Matrix  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$  reell und es gelten für  $\mu_i$  folgende Formeln:

$$\mu_i = \frac{\lambda_i - 1}{k} + 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

1)  $\mathbf{T}^*$  bezeichnet eine transponierte und komplex adjungierte Matrix zur Matrix  $\mathbf{T}$ .

2) Bemerkte man noch, dass beide Matrizen  $\mathbf{P}_k$  und  $\mathbf{P}_1$  vom selben Typus sind; dieses Faktum hat eine grosse Bedeutung bei der praktischen Berechnung.

Beweis: Für jeden Eigenwert  $\mu_i$  der Matrix  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$  gilt die Gleichung

$$\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i,$$

wo  $\mathbf{x}_i$  ein angehöriger von der Null verschiedener Eigenvektor ist. Es gelten also mit Rücksicht auf (6) schrittweise folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{k}\mathbf{P}_1^{-1}[(k-1)\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1]\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i,$$

$$(k-1)\mathbf{x}_i + \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_i = k\mu_i\mathbf{x}_i,$$

$$\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_i = (k\mu_i - k + 1)\mathbf{x}_i.$$

Es ist also  $\lambda_i = k\mu_i - k + 1$  oder

$$\mu_i = \frac{\lambda_i - 1}{k} + 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

was man beweisen sollte.

Man fragt jetzt, für welche Zahlen  $k \neq 0$  die Ungleichung  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$  gilt. Es gilt folgender Satz:

**2.2.** Für die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  gelten die Ungleichungen

$$-1 < m = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = M < 1.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass alle Eigenwerte  $\mu_i$  der Matrix  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$  in dem Intervalle  $(-1, 1)$  liegen, ist dann die Erfüllung der Ungleichung

$$\frac{1-m}{2} < k < \infty.$$

Beweis: Definiert man die Funktionen

$$f_i(k) = \frac{\lambda_i - 1}{k} + 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Funktionen  $f_i$  besitzen offenbar folgende Eigenschaften:

- sie sind für  $k \neq 0$  definiert;
- sie sind wachsend in den Intervallen  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$ ;
- sie sind konvex in dem Intervalle  $(0, \infty)$ ;
- $\lim_{k \rightarrow -\infty} f_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(k) = 1$ ;
- für jede  $k > 0$  und  $i < j$  gilt die Ungleichung  $f_i(k) \leq f_j(k)$ .

Es sei jetzt  $(1 - m)/2 < k < \infty$ . Aus der Ungleichung  $(1 - m)/2 > 0$  folgt nach e) und b) für eine beliebige  $i = 1, \dots, n$  die Beziehung

$$-1 = f_1\left(\frac{1 - m}{2}\right) \leq f_i\left(\frac{1 - m}{2}\right) < f_i(k) = \mu_i.$$

Aus dem Punkte b) und d) folgt aber sofort, dass die Ungleichung

$$\mu_i = f_i(k) < 1$$

gilt. Es ist also  $-1 < \mu_i < 1$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Es sei jetzt  $k < 0$ . Aus b) und d) folgt aber sofort, dass  $\mu_i = f_i(k) > 1$ ,  $i = 1, \dots, n$  ist.

Für  $0 < k < (1 - m)/2$  gilt endlich nach b)

$$\mu_1 = f_1(k) < f_1\left(\frac{1 - m}{2}\right) = -1,$$

so dass  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) > 1$  ist. Dadurch ist der Satz 2.2 bewiesen.

Es bleibt noch die Frage, für welche Zahl  $k \in ((1 - m)/2, \infty)$  der Spektralradius  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$  seinen Minimalwert erlangt. Es gilt folgender Satz:

**2.3.** *Der Spektralradius  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$  erlangt für  $k_0 = 1 - (M + m)/2$  seinen Minimalwert, welcher der Zahl  $(M - m)/(2 - M - m)$  gleich ist.*

**Beweis:** Die Zahl  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$  erlangt offenbar ihren Minimalwert wenn die Gleichung  $f_1(k_0) = -f_n(k_0)$  gilt. Daraus folgt die Beziehung

$$\frac{m - 1}{k_0} + 1 = -\frac{M - 1}{k_0} - 1$$

oder

$$k_0 = 1 - \frac{M + m}{2}.$$

Mit Rücksicht auf die Eigenschaft e) und die Beziehung  $|f_1(k)| = |f_n(k)|$  gilt die Beziehung

$$\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) = |f_1(k_0)| = |f_n(k_0)| = \frac{M - m}{2 - M - m},$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

Mit Rücksicht auf die Abschätzungen  $|M| < 1$ ,  $|m| < 1$  gilt die Ungleichung

$$0 < 1 - \frac{M + m}{2} < 2$$

oder  $0 < k_0 < 2$ . Da aber die Ungleichung  $(1 - m)/2 < k_0$  gilt, bekommt man folgendes, von dem praktischen Gesichtspunkt, wichtiges Ergebnis: Der Parameter  $k_0$ , für den der Spektralradius der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  seinen Minimalwert erlangt, muss immer im Intervalle

$$\frac{1 - m}{2} < k_0 < 2$$

liegen.

3. In diesem Teile der Arbeit wird man den Fall untersuchen, wenn die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  (hier die Matrizen  $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1$  erfüllen die Gleichung (4)) im allgemeinen komplexen Zahlen sind und dass  $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1) < 1$  ist. Bildet man wieder die Zerlegung (5), wo die Matrizen  $\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k$  mit Hilfe der Formel (6) ( $k \neq 0$ ) definiert sind. Die Beziehungen zwischen den Eigenwerten der Matrizen  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  und  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$  sind wieder mit Hilfe des Satzes 2.1 gegeben, denn die Voraussetzung, dass alle Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  reell sind, im Beweis des Satzes 2.1. nirgends benutzt würde. Die Antwort auf die Frage, für welche  $k \neq 0$   $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$  ist, gibt folgender Satz:

**3.1.** Seien  $\lambda_i$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ,  $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1) < 1$ . Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$  gilt, ist die Erfüllung der Ungleichung

$$0 < \max_i \frac{|\lambda_i - 1|^2}{2(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)} < k < \infty.$$

Beweis: Sei  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$ , d. h.

$$\left| \frac{\lambda_i - 1}{k} + 1 \right| < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt schrittweise

$$\begin{aligned} \left( \frac{\lambda_i - 1}{k} + 1 \right) \left( \bar{\lambda}_i - 1 + k \right) &< 1, \\ (\lambda_i - 1 + k)(\bar{\lambda}_i - 1 + k) &< k^2, \\ |\lambda_i|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda_i + 2k \operatorname{Re} \lambda_i - 2k + 1 &< 0, \\ 2k(\operatorname{Re} \lambda_i - 1) &< 2 \operatorname{Re} \lambda_i - |\lambda_i|^2 - 1. \end{aligned}$$

Da stets  $\operatorname{Re} \lambda_i - 1 < 1$  ist, folgt aus der vorhergehenden Ungleichung die Ungleichung

$$k > \frac{|\lambda_i|^2 + 1 - 2 \operatorname{Re} \lambda_i}{2(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)}$$

oder

$$k > \frac{|\lambda_i - 1|^2}{2(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Es ist also

$$k > \max_i \frac{|\lambda_i - 1|^2}{2(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)}.$$

Die Gültigkeit des Satzes in umgekehrter Richtung ist auch klar.

Es gilt ferner folgender Satz:

**3.2.** Seien  $\lambda_i$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ,  $M = \max_i |\lambda_i| = \varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$  und sei

$$\frac{1 + M}{2} < k < \infty.$$

Dann ist  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$ .

Beweis: Der Satz 3.2 ist die Folgerung des Satzes 3.1, denn für jede  $i = 1, \dots, n$  gilt offensichtlich die Ungleichung

$$\frac{|\lambda_i - 1|^2}{2(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)} < \frac{1 + M}{2}.$$

Die Sätze 3.1 und 3.2 geben die Intervalle für  $k$  an, in welchen  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$  ist. Praktischen Sinn hat aber nur eine solche Wahl der Konstanten  $k$ , dass  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) \leq \varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_1) = M$  ist (d. h. dass der Spektralradius nicht vergrößert wird). Es gilt folgender Satz:

**3.3.** Sei  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) \leq M$ . Dann liegt  $k$  im Intervalle

$$0 < k \leq \frac{1 + M + M\sqrt{(2 + 2M)}}{1 - M^2}.$$

Beweis: Setzt man voraus, dass  $|(\lambda_i - 1)/k + 1| \leq M$  für alle  $i$  gilt. Aus dieser Ungleichung folgt dann die Ungleichung

$$|\lambda_i|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda_i + 2k \operatorname{Re} \lambda_i - 2k + 1 + k^2 \leq Mk^2$$

oder die Ungleichung

$$k^2(1 - M^2) - 2k(1 - \operatorname{Re} \lambda_i) + |\lambda_i - 1|^2 \leq 0.$$

Mit Rücksicht auf das Faktum, dass  $1 - M^2 > 0$  gilt, ist diese Ungleichung für alle  $k$  aus dem Intervalle  $\langle k_{i,1}, k_{i,2} \rangle$  erfüllt, wo  $k_{i,1}, k_{i,2}$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$k^2(1 - M^2) - 2k(1 - \operatorname{Re} \lambda_i) + |\lambda_i - 1|^2 = 0$$

sind. Es gilt

$$k_{i,1,2} = \frac{1 - \operatorname{Re} \lambda_i \pm \sqrt{[(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)^2 - (1 - M^2) |\lambda_i - 1|^2]}}{1 - M^2}.$$

Die Wurzeln  $k_{i,1}, k_{i,2}$  sind reell, denn durch die einfache Zurichtung des Diskriminanten bekommt man die Beziehung

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{Re} \lambda_i)^2 - (1 - M^2) |\lambda_i - 1|^2 &= \operatorname{Re}^2 \lambda_i - 2M^2 \operatorname{Re} \lambda_i + M^2 - |\lambda_i|^2 (1 - M^2) \geq \\ &\geq \operatorname{Re}^2 \lambda_i - 2M^2 \operatorname{Re} \lambda_i + M^2 - M^2(1 - M^2) = (\operatorname{Re} \lambda_i - M^2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Man kann leicht beweisen, dass beide Wurzeln positiv sind. Es genügt das nur für die Wurzel mit dem negativen Zeichen zu beweisen. Würde nämlich diese Wurzel nicht positiv sein, gelte mit Rücksicht auf die Ungleichung  $1 - M^2 > 0$  schrittweise

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{Re} \lambda_i &\leq \sqrt{[(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)^2 - (1 - M^2) |\lambda_i - 1|^2]}, \\ (1 - \operatorname{Re} \lambda_i) &\leq \sqrt{(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)^2 - (1 - M^2) |\lambda_i - 1|^2}, \\ 0 &\leq -(1 - M^2) |\lambda_i - 1|^2. \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn die Zahl an der rechten Seite ist offensichtlich negativ. Nun muss man nur die Ungleichungen

$$k_{i,2} \leq \frac{1 + M + M \sqrt{(2 + 2M)}}{1 - M^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

beweisen. Es gilt offenbar

$$\begin{aligned} k_{i,2} &= \frac{1 - \operatorname{Re} \lambda_i + \sqrt{[(1 - \operatorname{Re} \lambda_i)^2 - (1 - M^2) |\lambda_i - 1|^2]}}{1 - M^2} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{Re} \lambda_i + \sqrt{[(\operatorname{Re} \lambda_i - M^2)^2 + (1 - M^2)(M^2 - |\lambda_i|^2)]}}{1 - M^2} \leq \\ &\leq \frac{1 - \operatorname{Re} \lambda_i + \sqrt{[(\operatorname{Re} \lambda_i - M^2)^2 + (1 - M^2) M^2]}}{1 - M^2} = A. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf das Faktum, dass die Funktion

$$g(x) = \frac{1 - x + \sqrt{[(x - M)^2 + (1 - M^2) M^2]}}{1 - M^2}$$

im Intervalle  $\langle -M, M \rangle$  sinkend ist, erlangt die Funktion  $g(x)$  ihren Maximalwert für  $x = \operatorname{Re} \lambda_i = -M$ . Es ist also

$$A \leq \frac{1 + M + \sqrt{[(M + M^2)^2 + (1 - M^2) M^2]}}{1 - M^2} = \frac{1 + M + M \sqrt{(2 + 2M)}}{1 - M^2},$$

was wir beweisen sollten.



Zum Schluss bleibt noch die Frage, für welche  $k$  erlangt der Spektralradius  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$  seinen Minimalwert. Der folgende Satz gibt die obere Grenze für die Zahl  $k$  an.

**3.4.** Die Zahl  $k$ , für welche der Spektralradius  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$  seinen Minimalwert erlangt, liegt im Intervalle

$$0 < k \leq 1 + M < 2.$$

Beweis: Man sucht die obere Grenze für die Zahl  $k$ , bei welcher die Zahl  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) = \max_i |(\lambda_i - 1)/k + 1|$  ihren Minimalwert erlangt. Als die obere Grenze für  $k$  kann man offenbar die Zahl  $k = \max_i k_i$ , nehmen, wo  $k_i$  die Zahl ist, für welche der Ausdruck  $|(\lambda_i - 1)/k + 1|$  seinen Minimalwert im Intervalle  $(0, \infty)$  erlangt. Es gilt

$$\left| \frac{\lambda_i - 1}{k} + 1 \right| = \frac{|\lambda_i - 1|^2}{k^2} + \frac{2 \operatorname{Re}(\lambda_i - 1)}{k} + 1.$$

Man kann leicht beweisen, dass der Ausdruck an der rechten Seite einen einzigen Minimalwert im Intervalle  $(0, \infty)$  für

$$k = \frac{|\lambda_i - 1|^2}{1 - \operatorname{Re} \lambda_i}$$

erlangt. Es ist aber

$$k = \frac{|\lambda_i - 1|^2}{1 - \operatorname{Re} \lambda_i} = \frac{|\lambda_i|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda_i + 1}{1 - \operatorname{Re} \lambda_i} \leq \frac{M^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda_i + 1}{1 - \operatorname{Re} \lambda_i} = B.$$

Da die Funktion  $h(x) = (M^2 - 2x + 1)/(1 - x)$  im Intervalle  $\langle -M, M \rangle$  sinkend ist, erlangt sie ihren Minimalwert für  $x = \operatorname{Re} \lambda_i = -M$ . Es ist also

$$B \leq \frac{M^2 + 2M + 1}{1 + M} = 1 + M < 2.$$

Dadurch ist der Satz 3.4 bewiesen.

Nach dem Satze 3.4 folgt, dass bei der praktischen Berechnung ähnlicherweise, wie im Falle der reellen Eigenwerte, nur die Wahl der Zahl  $k$  aus dem Intervalle  $(0, 2)$ . Sinn hat. Die Zahl  $k$  kann man während der Berechnung so variieren, dass die Konvergenz so schnell als möglich ist (als praktischer Zeiger der Konvergenzgeschwindigkeit kann z. B. die Zahl  $Q_v$  (siehe [2]) dienen).

**4.** Die in diesem Artikel untersuchte Methode hat eine gewisse formale Ähnlichkeit mit dem bekannten Relaxationsverfahren, bei welchem die sukzessiven Approximationen durch die Vorschrift

$$\mathbf{x}_{v+1} = (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{R}] \mathbf{x}_v + \omega(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}$$

definiert sind (die Matrizen  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{b}$  sind im Absatz 1 definiert, der Relaxationsfaktor  $\omega$  liegt im Intervalle  $(0, 2)$ ). Für  $\omega = 1$  bekommt man sofort die Formel

$$\mathbf{x}_{v+1} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{x}_v + (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b},$$

was das gewöhnliche Gauss-Seidelverfahren ist: Falls man jetzt von dieser Methode ausgeht, bekommt man mit Hilfe unseres Fortganges die Iterationsvorschrift in der Form

$$\mathbf{x}_{v+1} = \frac{1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} [(k-1)(\mathbf{D} - \mathbf{L}) + \mathbf{R}] \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b},$$

die für  $k = 1$  auch zum Gauss-Seidelverfahren führt. Beide Iterationsverfahren sind aber ganz verschieden, denn die Matrizen

$$(\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{R}] \quad \text{und} \quad \frac{1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} [(k-1)(\mathbf{D} - \mathbf{L}) + \mathbf{R}]$$

sind nur für  $\omega \neq 1$ ,  $k \neq 1$  einander gleich. Aus der Gleichung

$$(\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{R}] = \frac{1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} [(k-1)(\mathbf{D} - \mathbf{L}) + \mathbf{R}]$$

folgt nämlich sofort die Gleichung

$$(1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{R} = (\mathbf{D} - \omega \mathbf{L}) \left( \frac{k-1}{k} \mathbf{E} + \frac{1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{R} \right)$$

woraus mit Rücksicht auf die Typen der Matrizen  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  folgt, dass die Gleichung nur für  $k = 1$ ,  $\omega = 1$  eintritt (im Grenzwert noch für  $k \rightarrow \infty$ ,  $\omega = 0$ ).

Ein weiterer Unterschied zwischen unserer Methode und dem Relaxationsverfahren liegt darin, dass man unsere Methode zu jedem Iterationsverfahren anwenden kann, das zur beliebigen günstigen Zerlegung der Matrix  $\mathbf{A}$  in der Form (4) zugehört.

**5.** Zum Schluss werden die praktisch anwendbaren Formeln für die Berechnung der sukzessiven Approximationen angeführt werden, falls man die Jacobi und Gauss-Seidelverfahren anwendet.

Im Falle der Jacobiverfahren ist  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{L} + \mathbf{R}$  und es ist also nach (6)

$$\mathbf{P}_k = k\mathbf{D}, \quad \mathbf{Q}_k = (k-1)\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R},$$

so dass man die Iterationsvorschrift (3) in der Form

$$\mathbf{x}_{v+1} = \frac{1}{k} \mathbf{D}^{-1} [(k-1)\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R}] \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$$

oder in der Form

$$\mathbf{x}_{v+1} = \frac{k-1}{k} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}$$

schreiben kann. Man bekommt also folgende Formeln:

$$\begin{aligned} x_1^{v+1} &= \frac{k-1}{k} x_1^v - \frac{1}{k} \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^v + \frac{1}{k} \frac{b_1}{a_{11}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_i^{v+1} &= -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^v + \frac{k-1}{k} x_i^v - \frac{1}{k} \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^v + \frac{1}{k} \frac{b_i}{a_{ii}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n^{v+1} &= -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} x_j^v + \frac{k-1}{k} x_n^v + \frac{1}{k} \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{aligned}$$

Diese Formeln kann man auch in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} x_1^{v+1} &= \frac{1}{k} \left[ (k-1) x_1^v - \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j^v + \frac{b_1}{a_{11}} \right], \\ &\dots\dots\dots, \\ x_i^{v+1} &= \frac{1}{k} \left[ -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^v + (k-1) x_i^v - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^v + \frac{b_i}{a_{ii}} \right], \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n^{v+1} &= \frac{1}{k} \left[ -\frac{1}{a_{nn}} \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^v + (k-1) x_n^v + \frac{b_n}{a_{nn}} \right]. \end{aligned}$$

Für  $k = 1$  bekommt man das gewöhnliche Jacobiverfahren.

Geht man jetzt von dem Gauss-Seidelverfahren aus. Hier ist

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{D} - \mathbf{L}, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}$$

und nach (6) ist also

$$\mathbf{P}_k = k(\mathbf{D} - \mathbf{L}), \quad \mathbf{Q}_k = (k-1)(\mathbf{D} - \mathbf{L}) + \mathbf{R}.$$

Das Iterationsverfahren ist also folgendes:

$$\mathbf{x}_{v+1} = \frac{1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} [(k-1)(\mathbf{D} - \mathbf{L}) + \mathbf{R}] \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}.$$

Daraus bekommt man jetzt schrittweise die Beziehungen

$$(\mathbf{D} - \mathbf{L}) \mathbf{x}_{v+1} = \frac{k-1}{k} (\mathbf{D} - \mathbf{L}) \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{R} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{b},$$

$$\mathbf{D} \mathbf{x}_{v+1} - \mathbf{L} \mathbf{x}_{v+1} = \frac{k-1}{k} \mathbf{D} \mathbf{x}_v - \frac{k-1}{k} \mathbf{L} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{R} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{x}_{v+1} + \frac{k-1}{k} \mathbf{x}_v - \frac{k-1}{k} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{x}_v + \frac{1}{k} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{b}.$$

Es gelten also folgende Formeln:

$$x_i^{v+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{v+1} + \frac{k-1}{k} x_i^v - \frac{k-1}{k} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^v - \frac{1}{k} \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^v + \frac{1}{k} \frac{b_i}{a_{ii}},$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Bezeichnet man jetzt

$$y_j^v = x_j^{v+1} + \frac{k-1}{k} x_j^v, \quad j = 1, \dots, n$$

folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$x_i^{v+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j^v + \frac{k-1}{k} x_i^v - \frac{1}{k} \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^v + \frac{1}{k} \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Man bekommt also folgende Iterationsvorschrift:

$$x_1^{v+1} = \frac{k-1}{k} x_1^v - \frac{1}{k} \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^v + \frac{1}{k} \frac{b_1}{a_{11}},$$

.....

$$x_i^{v+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j^v + \frac{k-1}{k} x_i^v - \frac{1}{k} \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^v + \frac{1}{k} \frac{b_i}{a_{ii}},$$

.....

$$x_n^{v+1} = - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{nj}}{a_{nn}} y_j^v + \frac{k-1}{k} x_n^v + \frac{1}{k} \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Betreffs der Wahl des günstigen Faktors  $k$  kann man bei der praktischen Berechnung von der Zahl  $k = 1$  ausgehen und dann den Faktor  $k$  so variieren, dass die Konvergenz so schnell als möglich wird. Falls man zur Abschätzung des Fehlers die in dem Artikel [2] eingeführte Methode benutzt, kann man die Konvergenzgeschwindigkeit nach der Grösse der Zahl  $Q_v$  (siehe [2]) beurteilen.

### Literatur

- [1] R. S. Varga: Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, INC., 1962.  
[2] M. Šisler: Approximative Formeln für den Fehler bei Iterationsverfahren. Apl. Mat. 11 (1966), 341—351.

## Výtah

### O ZRYCHLENÍ KONVERGENCE ITERAČNÍCH METOD

MIROSLAV ŠISLER

V článku je vyšetřována metoda sloužící ke zrychlení konvergence iteračních metod pro řešení soustavy  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Předpokládá se, že je dán nějaký rozklad matice  $\mathbf{A}$  tvaru  $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1$  takový, že spektrální poloměr matice  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  je menší než jedna, tzn. že iterační metoda daná předpisem

$$\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_v + \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{b}, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

konverguje. V článku se pak zkoumá spektrální poloměr matice  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$ , kde  $\mathbf{P}_k = k\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{Q}_k = (k-1)\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1$ , kde  $k$  je reálné číslo různé od nuly. V případě reálného spektra matice  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  je ukázáno, že spektrální poloměr je menší než 1 právě tehdy, je-li  $(1-m)/2 < k < \infty$  ( $m$  je nejmenší z vlastních čísel matice  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ). Dále je ukázáno, že spektrální poloměr matice  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$  nabývá minima pro  $k = 1 - (M+m)/2$  rovného číslu  $(M-m)/(2-M-m)$  ( $M$  je maximální vlastní číslo matice  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ). V případě komplexního spektra matice  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  je ukázáno že pro  $(1+M)/2 < k < \infty$  je  $\rho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$  (zde je  $M = \rho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$ ), dále že pro

$$0 < k < \frac{1 + M + M\sqrt{(2 + 2M)}}{1 - M^2}$$

je  $\rho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) \leq M$ , přičemž  $\rho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$  nabývá minima pro  $0 < k \leq 1 + M < 2$ .

V článku je dále uvedena metoda srovnána se superrelaxační metodou a uvedeny některé prakticky použitelné vzorce pro numerický výpočet.

## Резюме

### ОБ УСКОРЕНИИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР (MIROSLAV ŠISLER)

В работе исследуется один метод, служащий для ускорения сходимости итерационных методов для решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными вида  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Предполагается, что имеется какое-нибудь разложение матрицы  $\mathbf{A}$  вида  $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{Q}_1$  такое, что спектральный радиус  $\varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$  матрицы  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  меньше единицы и, значит, итерационный метод, определенный при помощи соотношения

$$\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1\mathbf{x}_v + \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{b}, \quad v = 0, 1, 2, \dots,$$

сходится. В работе исследуется потом спектральный радиус матрицы  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$ , где  $\mathbf{P}_k = k\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{Q}_k = (k-1)\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1$  (здесь  $k$  — действительное число,  $k \neq 0$ ). В случае действительного спектра матрицы  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  показывается, что  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$  тогда и только тогда, если  $(1-m)/2 < k < \infty$  ( $m$  — наименьшее из собственных значений матрицы  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ). Далее показывается, что спектральный радиус матрицы  $\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k$  достигает для  $k = 1 - (M+m)/2$  минимального значения  $(M-m)/(2-M-m)$  (здесь  $M$  — наибольшее собственное значение матрицы  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$ ). В случае комплексного спектра матрицы  $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1$  показывается, что  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) < 1$  для  $(1+M)/2 < k < \infty$  (здесь  $M = \varrho(\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{Q}_1)$ ); далее, что  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k) \leq M$  для

$$0 < k < \frac{1 + M + M\sqrt{(2 + 2M)}}{1 - M^2}$$

и что число  $\varrho(\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{Q}_k)$  принимает наименьшее значение для  $0 < k \leq 1 + M < 2$ .

В работе приведенный метод сравнивается с методом верхней релаксации, и выведены некоторые формулы для практического вычисления.

*Anschrift des Autors:* Dr. Miroslav Šisler C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.