Aplikace matematiky

Frieder Kuhnert

Über Fehlerabschätzungen beim Weinstein-Bazley-Fox-Verfahren

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 4, 241–254

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103099`

ÜBER FEHLERABSCHÄTZUNGEN BEIM WEINSTEIN-BAZLEY-FOX-VERFAHREN

FRIEDER KUHNERT

(Eingegangen am 23. September 1966.)

1. EINLEITUNG

Das Problem der Gewinnung unterer Schranken für die Eigenwerte positiv definiter Eigenwertaufgaben wurde von WEINSTEIN [28–30] für einige spezielle Differentialoperatoren in Angriff genommen. Diese Weinsteinsche Idee ist nachfolgend von verschiedenen Autoren in mehreren Richtungen verallgemeinert und der numerischen Behandlung besser zugänglich gemacht worden[1]. Wenn etwa A_0 ein in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ gegebener positiv definiter selbstajungierter Operator mit reinem Punktspektrum ist, so wird für die Ermittlung unterer Schranken für die Eigenwerte dieses Operators ein zweiter positiv definiter selbstadjungierter Operator B_0 benötigt, dessen sämtliche Eigenwerte und Eigenelemente bekannt sind und dessen quadratische Form nicht größer als die quadratische Form des Operators A_0 ist. Ausgehend von B_0 wird eine Folge selbstadjungierter Operatoren A_n $(A_1 = B_0)$ mit reinem Punktspektrum konstruiert, wobei die quadratischen Formen der Ungleichung

$$(1) \qquad (B_0x, x) \leqq (A_nx, x) \leqq (A_{n+1}x, x) \leqq (A_0x, x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

genügen. Die Eigenwerte des Operators A_n, die sich gewöhnlich ohne wesentliche Schwierigkeiten ermitteln lassen, sind dann die geforderten unteren Schranken für die Eigenwerte des Operators A_0. BAZLEY und FOX [9] haben unter gewissen Einschränkungen bezüglich der Operatoren A_0 und B_0 gezeigt, daß mit wachsendem n die unteren Schranken immer besser werden und im Grenzfalle mit den Eigenwerten des Operators A_0 zusammenfallen. Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, geeignete Fehlerabschätzungen für das von Bazley und Fox angegebene Verfahren aufzustellen.

Benötigt wird dabei eine Verallgemeinerung des auf RELLICH [21] (man sehe auch

[1]) Direkte Verallgemeinerungen findet man in den Arbeiten [1–4], [7–9], [11–13], [22–23], [26–27], [31–34]. Man sehe auch [5–6], [10], [14–16], [18], [20], [25], [35–36].

[19]) zurückgehenden Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz nicht notwendig beschränkter Operatoren. Da diesen Fragen eine gesonderte Veröffentlichung vorbehalten ist, führen wir hier lediglich die Definition der relativ gleichmäßigen Konvergenz von Operatoren an:

Gegeben seien Operatoren G_i $(i = 0, 1, \ldots)$ mit den in $\mathfrak{G}$ dichten Definitionsgebieten $D(G_i)$; die Definitionsgebiete $D(G_i^*)$ der zu G_i adjungierten Operatoren G_i^* seien ebenfalls dicht in $\mathfrak{G}$. Wir sagen, daß die Folge $\{G_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ relativ gleichmäßig gegen den Operator G_0 konvergiert, wenn es lineare Mengen $D_n^* \subset D(G_n^*)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $D_0 \subset D(G_0)$ gibt, so daß für wenigstens eine komplexe Zahl λ_i $(i = 0, 1, \ldots)$ die Abschließungen der Mengen $(G_n - \lambda_n I)^* D_n^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $(G_0 - \lambda_0 I) D_0$ mit $\mathfrak{G}$ zusammenfallen, und wenn der Grenzwert gilt

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{x \in D_0 \\ y \in D_n^*}} \frac{|(G_0 x, y) - (x, G_n^* y)|}{(\|G_0 x\| + \|x\|)(\|G_n^* y\| + \|y\|)} = 0 .$$

Ohne Beweis wollen wir folgende zwei Sätze für relativ gleichmäßig konvergierende Folgen abgeschlossener Operatoren vermerken:

Satz A. *Wenn die Zahl λ ein isolierter Eigenwert des Operators G_0 ist, so gibt es in jeder ε-Umgebung des Punktes λ für hinreichend große n Spektrumspunkte des Operators G_n.*

Satz B. *Wenn die Zahl λ ein Punkt der Resolventenmenge des Operators G_0 ist, so gehört er auch für alle hinreichend großen n den Resolventenmengen der Operatoren G_n an, wobei die Folge der Operatoren $(G_n - \lambda I)^{-1}$ gleichmäßig beschränkt ist.*

Im Abschnitt 4 wird abschließend noch gezeigt, daß dieser Konvergenzbegriff auch als Grundlage für die Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren zur genäherten Berechnung von Eigenwerten benutzt werden kann.

2. DAS WEINSTEIN-BAZLEY-FOX-VERFAHREN[2])

Im separablen Hilbertraum $\mathfrak{G}$ sei ein selbstandjungierter positiv definiter Operator A_0 mit dem Definitionsbereich $D(A_0)$ gegeben, der sich als Summe zweier Operatoren B_0 und A' mit den Definitionsgebieten $D(B_0)$ bzw. $D(A')$ darstellen läßt. Dabei möge der Operator B_0 ebenfalls selbstadjungiert und positiv definit, der Operator A' dagegen lediglich symmetrisch und positiv definit sein. Es ist $D(A_0)$ die Vereinigungsmenge von $D(B_0)$ und $D(A')$. Weiterhin seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

[2]) Die Beweise der in diesem Abschnitt der Arbeit enthaltenen Behauptungen findet der Leser in der Arbeit [9].

1. Es existieren zwei positive Konstanten a und b mit $(A_0x, x) \geqq a\|x\|^2$ für beliebiges $x \in D(A_0)$, $a > 0$, und $(B_0x, x) \geqq b\|x\|^2$ für beliebiges $x \in D(B_0)$, $b > 0$.

2. Die Operatoren A_0^{-1} und B_0^{-1}, die infolge der Voraussetzung 1. existieren, sollen vollstetig sein. Dann besitzen die Operatoren A_0 und B_0 ein reines Punktspektrum.

3. Die Eigenwerte $\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \ldots$ mit den dazugehörenden orthonormierten Eigenelementen $v_1, v_2, \ldots$ des Operators B_0 seien bekannt.

Gesucht sind die Eigenwerte $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$ und die dazugehörenden Eigenelemente $u_1, u_2, \ldots$ des Operators A_0 (der Operator A_0 besitzt ein reines Punktspektrum).

Mit $\mathfrak{G}'$ werde ein neuer Hilbertraum bezeichnet, der aus $D(A')$ durch Abschließung in der Norm $|u|^2 = (A'u, u) = [u, u]$ entsteht. Es sei ein in $\mathfrak{G}'$ vollständiges System linear unabhängiger Elemente $p_1, p_2, \ldots$ mit $p_i \in D(A')$ $(i = 1, 2, \ldots)$ gegeben. P_n bezeichne den Projektionsoperator im Raum $\mathfrak{G}'$ auf den von den Elementen $p_1, \ldots, p_n$ aufgespannten Teilraum $\mathfrak{M}_n'$. Dann gilt für ein beliebiges Element $x \in \mathfrak{G}'$ die Formel

$$P_nx = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, p_i\,,$$

wobei die f_i beschränkte lineare Funktionale in x sind. Aus der Arbeit [9] entnehmen wir für den Projektionsoperator P_n die Darstellung

$$P_nx = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}[x, p_j]\, p_i\,, \tag{2}$$

wobei die α_{ij} die Koeffizienten der zur symmetrischen Matrix

$$S_n = \begin{pmatrix} [p_1, p_1] \cdots [p_1, p_n] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [p_n, p_1] \cdots [p_n, p_n] \end{pmatrix}$$

inversen Matrix sind.

Aus der Formel (2) folgt sofort die Darstellung

$$A'P_nx = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x, A'p_j)\, A'p_i \tag{3}$$

für ein beliebiges Element $x \in D(A')$. Der Operator $A'P_n$ kann demnach auf den gesamten Raum $\mathfrak{G}$ linear fortgesetzt werden und stellt dort einen symmetrischen vollstetigen Operator dar.

Es werde nun

$$A_n = B_0 + A'P_n$$

gesetzt, dann ist A_n ein selbstadjungierter Operator mit dem Definitionsbereich

$D(A_n) = D(B_0)$, der infolge der Vollstetigkeit des Operators $A'P_n$ ein reines Punktspektrum besitzt. Desweiteren genügt der Operator A_n der Ungleichung (1), seine Eigenwerte $\nu_{i,n}$ stellen also untere Schranken für die entsprechenden Eigenwerte des Operators A_0 dar. Im allgemeinen Fall sind die Eigenwerte des Operators A_n die Lösungen der Gleichung

$$\det\begin{pmatrix}(p_1 + R_\lambda A'p_1, A'p_1)\dots(p_1 + R_\lambda A'p_1, A'p_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (p_n + R_\lambda A'p_n, A'p_1)\dots(p_n + R_\lambda A'p_n, A'p_n)\end{pmatrix} = 0\,, \tag{4}$$

wobei R_λ die Resolvente des Operators B_0 ist[3]). Es folgt nun hieraus, daß die Operatorenfolge $\{A_n\}$ (und damit gewiß auch die Konvergenz des Verfahrens) vom jeweiligen System $\{p_i\}$ abhängt. Wir wollen hier eine spezielle Vorschrift für die Wahl der Elemente p_i angeben und den daraus resultierenden Prozeß verfolgen. Es werde zunächst noch vorausgesetzt, daß die Eigenelemente v_i $(i = 1, 2, \dots)$ des Operators B_0 der Bildmenge $R(A')$ des Operators A' angehören. Dann werde

$$A'p_i = v_i \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{5}$$

gesetzt.

Aus der Formel (3) folgt dann für ein beliebiges Element $x \in \mathfrak{G}$ die Gleichung

$$A'P_n x = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x, v_j)\, v_i\,.$$

Unter Benutzung dieser Darstellung ergeben sich die ersten n Eigenwerte $\nu_{1,n}, \dots, \nu_{n,n}$ des Operators A_n sofort als die Lösungen der Gleichung

$$f(\lambda) = \det\left(E_n + S_n\begin{pmatrix}\nu_1 - \lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \nu_n - \lambda\end{pmatrix}\right) = 0\,,$$

E_n bezeichnet die n-reihige Einheitsmatrix. Die restlichen Eigenwerte des Operators A_n fallen mit den entsprechenden Eigenwerten des Ausgangsoperators B_0 zusammen:

$$\nu_{i,n} = \nu_i\,, \quad i = n + 1, \dots$$

3. FEHLERABSCHÄTZUNGEN FÜR DAS WEINSTEIN-BAZLEY-FOX-VERFAHREN

Das durch die Vorschrift (5) gebildete System $\{p_i\}$ ist wegen der positiven Definitheit des Operators A' ein linear unabhängiges vollständiges System im Raum $\mathfrak{G}'$.

[3]) Wenn ein Eigenwert des Operators A_n zugleich Eigenwert des Operators B_0 ist, so ändert sich die Gleichung (4) (man sehe [9]).

Satz 1. *Wenn für jedes Element $x \in D(A_0)$ die Ungleichung*

$$\|A'x\| \leqq \alpha \|A_0 x\| \text{ [4]} \tag{6}$$

mit einem konstanten (von x unabhängigen) α gilt, dann ist

$$\frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} \leqq \frac{\alpha}{\nu_{n+1} + 1} \tag{7}$$

für beliebige Elemente $x \in D(A_0)$ und $y \in D(A_n)$, d.h. die Folge selbstadjungierter Operatoren $\{A_n\}$ konvergiert relativ gleichmäßig gegen den Operator A_0.

Beweis: Es werde zunächst für beliebige Elemente $x \in D(A_0)$ und $y \in D(A_n)$ die Differenz betrachtet

$$(A_0 x, y) - (x, A_n y).$$

Wegen der Symmetrie des Operators $A'P_n$ folgt

$$\begin{aligned}(A_0 x, y) - (x, A_n y) &= (B_0 x + A'x, y) - (x, B_0 y + A'P_n y) = \\ &= (A'x - A'P_n x, y).\end{aligned}$$

Da jedes Element $x \in D(A_0)$ auch in $D(A')$ enthalten ist, ergibt sich

$$A'x - A'P_n x = A'(I - P_n)\, x,$$

wobei man unter $I - P_n$ den orthogonalen Projektionsoperator im Raum $\mathfrak{G}'$ auf den von den Elementen $p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots$ aufgespannten Teilraum zu verstehen hat. Durch direktes Nachprüfen erhält man die für alle Elemente $x \in D(A')$ und $y \in \mathfrak{G}$ gültige Relation

$$(A'(I - P_n)\, x, y) = (A'x, (I - Q_n)\, y),$$

wobei Q_n den orthogonalen Projektionsoperator auf den durch die Elemente $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten endlichdimensionalen Teilraum $\mathfrak{N}_n$ in $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Damit ergibt sich für die Elemente $x \in D(A_0)$ und $y \in D(A_n)$ die Gleichung

$$(A_0 x, y) - (x, A_n y) = (A'x, (I - Q_n)\, y),$$

und unter Verwendung der Ungleichung (6) erhält man die Abschätzung

$$|(A_0 x, y) - (x, A_n y)| \leqq \|A'x\|\, \|(I - Q_n)\, y\| \leqq \alpha \|A_0 x\|\, \|(I - Q_n)\, y\|.$$

[4]) Die Bedingung (6) schränkt die Aufgabenstellung im Prinzip nicht ein, denn unter dieser Bedingung war es in [9] überhaupt erst möglich, die Konvergenz des Verfahrens zu beweisen.

Es ist also für beliebige Elemente $x \in D(A_0)$ und $y \in D(A_n)$

$$(8) \qquad \frac{|(A_0x, y) - (x, A_n y)|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} \leqq \alpha \frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{\|A_n y\| + \|y\|}.$$

Für den rechts stehenden Bruch kann nun eine obere Schranke gefunden werden, denn für alle Elemente $y \in \mathfrak{N}_n$ ist die Gleichung

$$\frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{\|A_n y\| + \|y\|} = 0$$

erfüllt. Der Teilraum $\mathfrak{G} \ominus \mathfrak{N}_n$ ist invarient bezüglich des selbstadjungierten Operators A_n, und die Menge $D(A_n) \ominus \mathfrak{N}_n$ ist nicht leer (sie ist sogar dicht im Teilraum $\mathfrak{G} \ominus \mathfrak{N}_n$). Deshalb gilt

$$\sup_{y \in D(A_n)} \frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{\|A_n y\| + \|y\|} = \sup_{y \in D(A_n) \ominus \mathfrak{N}_n} \frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{\|A_n y\| + \|y\|} = \sup_{y \in D(A_n) \ominus \mathfrak{N}_n} \frac{\|y\|}{\|A_n y\| + \|y\|}.$$

Da die oberen Teile des Spektrums der Operatoren A_n und B_0 identisch sind, folgt für ein beliebiges Element $y \in D(A_n) \ominus \mathfrak{N}_n$

$$\|A_n y\|^2 = \int_0^\infty \lambda^2 \, \mathrm{d}(E_n(\lambda)\, y, y) = \int_{\nu_{n+1}-0}^\infty \lambda^2 \, \mathrm{d}(E_n(\lambda)\, y, y) \geqq \nu_{n+1}^2 \|y\|^2$$

(hierbei bezeichnet $E_n(\lambda)$ die Einheitszerlegung des Operators A_n). Die gesuchte obere Schranke ergibt sich schließlich mit

$$\frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{\|A_n y\| + \|y\|} \leqq \frac{1}{\nu_{n+1} + 1}.$$

Die Behauptung des Satzes erhält man dann sofort aus der Ungleichung (8).

Auf der Grundlage des soeben bewiesenen Satzes und des Satzes A kann gefolgert werden, daß die Folge der Eigenwerte $\{\nu_{i,n}\}$ der Operatoren A_n mit wachsendem n gegen den entsprechenden Eigenwert λ_i des Operators A_0 konvergiert. Zur Abschätzung des Fehlers $\lambda_i - \nu_{i,n}$ benötigen wir noch den

Hilfssatz. *Es gilt die Abschätzung*

$$\|A_0^{-1} - A_n^{-1}\| \leqq c \frac{1}{\nu_{n+1} + 1}, \quad c = \alpha\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right).$$

Beweis: Aus den Formeln

$$(A_0 x, x) \geqq a\|x\|^2, \quad x \in D(A_0), \quad a > 0,$$
$$(B_0 x, x) \geqq b\|x\|^2, \quad x \in D(B_0), \quad b > 0,$$

und aus der Ungleichung (1) folgt zunächst die Existenz der beschränkten inversen Operatoren A_0^{-1} und A_n^{-1} $(n = 1, 2, \ldots)$. Außerdem ist

$$\|A_0 x\| \geqq a\|x\|, \quad x \in D(A_0),$$

$$\|A_n x\| \geqq \frac{(A_n x, x)}{\|x\|} \geqq \frac{(B_0 x, x)}{\|x\|} \geqq b\|x\|, \quad x \in D(B_0).$$

Mit der Formel (7) erhält man dann für beliebige Elemente $x \in D(A_0)$ und $y \in D(B_0)$ die Ungleichungskette

$$\frac{\alpha}{\nu_{n+1} + 1} \geqq \frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} \geqq \frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(1 + 1/a)(1 + 1/b)\,\|A_0 x\|\,\|A_n y\|} =$$

$$= \frac{|(A_0^{-1} u, v) - (A_n^{-1} u, v)|}{(1 + 1/a)(1 + 1/b)\,\|u\|\,\|v\|},$$

wobei $u = A_0 x$ und $v = A_n y$ gesetzt wurde. Es ist also

$$\|A_0^{-1} - A_n^{-1}\| = \sup_{u, v \in \mathfrak{G}} \frac{|(A_0^{-1} u - A_n^{-1} u, v)|}{\|u\|\,\|v\|} \leqq \alpha \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \frac{1}{\nu_{n+1} + 1}.$$

Satz 2. *Für den Fehler $\lambda_i^{-1} - \nu_{i,n}^{-1}$ gilt die Abschätzung*

$$\lambda_i^{-1} - \nu_{i,n}^{-1} \leqq \frac{c}{\nu_{n+1} + 1} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Beweis: Die Operatoren A_0^{-1} und A_n^{-1} sind vollstetig und symmetrisch, außerdem ist die Differenz $A_n^{-1} - A_0^{-1}$ ein positiver Operator. Unter Verwendung des Courantschen Prinzips erhält man

$$\max_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \perp u_1, \ldots, u_{i-1}}} (A_n^{-1} x - A_0^{-1} x, x) \geqq \max_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \perp u_1, \ldots, u_{i-1}}} (A_n^{-1} x, x) - \max_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \perp u_1, \ldots, u_{i-1}}} (A_0^{-1} x, x) =$$

$$= \max_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \perp u_1, \ldots, u_{i-1}}} (A_n^{-1} x, x) - \frac{1}{\lambda_i} \geqq \min_{\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}} \max_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \perp y_1, \ldots, y_{i-1}}} (A_n^{-1} x, x) - \frac{1}{\lambda_i} =$$

$$= \frac{1}{\nu_{i,n}} - \frac{1}{\lambda_i} \geqq 0.$$

Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{1}{\nu_{i,n}} - \frac{1}{\lambda_i} \leqq \|A_n^{-1} - A_0^{-1}\| \leqq \frac{c}{\nu_{n+1} + 1}.$$

Bemerkung:

Es gilt

$$\lambda_i - \nu_{i,n} \leqq \frac{c\lambda_i \nu_{i,n}}{\nu_{n+1} + 1} \leqq \frac{c\lambda_i^2}{\nu_{n+1} + 1} .$$

4. FEHLERABSCHÄTZUNGEN FÜR DAS VERFAHREN VON RITZ ZUR GENÄHERTEN EIGENWERTBESTIMMUNG

In diesem Teil der Arbeit wollen wir mit Hilfe des Prinzips der relativ gleichmäßigen Konvergenz von Operatorenfolgen Abschätzungen für den Fehler genäherter Eigenwerte angeben, die nach dem Ritzschen Verfahren ermittelt wurden. Zu errechnen sind also die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots)$ und die dazugehörenden Eigenelemente $u_1, u_2, \ldots$ eines positiv definiten selbstadjungierten Operators A_0 mit reinem Punktspektrum. Es existiere eine positive Konstante a mit

$$(9) \qquad (A_0 x, x) \geqq a\|x\|^2 , \quad x \in D(A_0) .$$

Der Operator A_0 möge als Summe eines selbstadjungierten Operators B_0 mit reinem Punktspektrum und eines symmetrischen Restoperators A' darstellbar sein:

$$A_0 = B_0 + A' , \quad D(A_0) = D(B_0) , \quad D(B_0) \subset D(A')$$

(im Unterschied zum Abschnitt 2 wurde jetzt die Forderung der positiven Definitheit fallengelassen). Dabei werde wieder vorausgesetzt, daß die Eigenwerte $\nu_1, \nu_2, \ldots$ $(\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \ldots)$ und die dazugehörenden Eigenelemente $v_1, v_2, \ldots$ des Operators B_0 bekannt sind. Die orthonormierten Elemente $v_1, v_2, \ldots$ sollen ein vollständiges System im Hilbertraum $\mathfrak{G}$ bilden. Weiterhin mögen für jedes Element $x \in D(A_0)$ die Ungleichungen

$$\|A'x\| \leqq \gamma \|A_0 x\|$$

und

$$\|A'x\| \leqq q \|B_0 x\|$$

mit den Konstanten γ und q $(q < 1)$ erfüllt sein.

Bei einem n-gliedrigen Ritz-Ansatz mit den Elementen $v_1, \ldots, v_n$ zur genäherten Berechnung der Eigenwerte des Operators A_0 kommt man auf die Gleichung

$$(10) \qquad g(\lambda) \equiv \det \begin{pmatrix} (A_0 v_1, v_1) - \lambda & (A_0 v_1, v_2) \ldots (A_0 v_1, v_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (A_0 v_n, v_1) & (A_0 v_n, v_2) \ldots (A_0 v_n, v_n) - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} (A' v_1, v_1) + \nu_1 - \lambda & (A' v_1, v_2) \ldots (A' v_1, v_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (A' v_n, v_1) & (A' v_n, v_2) \ldots (A' v_n, v_n) + \nu_n - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

in λ zur Ermittlung der Näherungseigenwerte $\nu_{1,n}, \ldots, \nu_{n,n}$.

Die Aufgabe besteht nun darin, einen Operator A_n zu konstruieren, der die Zahlen $v_{1,n}, \ldots, v_{n,n}$ als Eigenwerte besitzt; dabei soll die Folge $\{A_n\}$ relativ gleichmäßig gegen den Operator A_0 konvergieren. Zu diesem Zwecke werde wieder mit Q_n der orthogonale Projektionsoperator in $\mathfrak{G}$ auf den von den Elementen $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Teilraum $\mathfrak{N}_n$ bezeichnet. Da der Teilraum $\mathfrak{N}_n$ dem Definitionsbereich $D(A')$ des Operators A' angehört, ist der Operator $A'Q_n$ sinnvoll. Aus der Darstellungsweise

$$A'Q_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, v_i)\, A'v_i\,, \quad x \in \mathfrak{G}\,,$$

geht hervor, daß der Operator $A'Q_n$ vollstetig ist. Wenn nun der Operator B_0 mit dem vollstetigen Operator $A'Q_n$ gestört wird, so erfüllt der gestörte Operator beide gestellten Forderungen, denn es gelten die folgenden Sätze:

Satz 3. *Das Spektrum des Operators $A_n = B_0 + A'Q_n$ besteht aus den Eigenwerten $v_{1,n}, \ldots, v_{n,n}, v_{n+1,n} = v_{n+1}, v_{n+2,n} = v_{n+2}, \ldots$*

Beweis: Zunächst ist offensichtlich, daß jeder Eigenwert v_i, $i > n$, des Operators B_0 zugleich auch Eigenwert des Operators A_n ist. Das entsprechende Eigenelement ist v_i. Zur Bestimmung der restlichen Eigenwerte des Operators A_n dient die Gleichung

$$A_n x - \lambda x = 0\,. \tag{11}$$

Wenn λ kein Eigenwert des Operators B_0 ist, so folgt aus dieser Gleichung

$$x = -\sum_{i=1}^{n} (x, v_i)\,(B_0 - \lambda I)^{-1}\, A'v_i\,.$$

Durch skalares Multiplizieren mit den Elementen $v_1, v_2, \ldots$ erhält man hieraus das Gleichungssystem

$$(x, v_j) = -\sum_{i=1}^{n} (x, v_i)\,(A'v_i, v_j)\,\frac{1}{v_j - \lambda}\,, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} (x, v_i)\,[(A'v_i, v_j) + (v_j - \lambda)\,\delta_{ij}] = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x, v_i)\,(A'v_i, v_j) + (v_j - \lambda)\,(x, v_j) = 0\,, \quad j > n\,.$$

Dieses unendliche homogene Gleichungssystem besitzt nur dann nichttriviale Lösungen (d.h. $x \neq 0$), wenn λ einen der Werte $v_{1,n}, v_{2,n}, \ldots$ annimmt.

Wenn nun eine Lösung λ der Gleichung (11) zugleich Eigenwert des Operators B_0 ist, so gelangt man wieder zum System (12), denn es ist in diesem Falle

$$A_n x - \lambda x = B_0 x + \sum_{i=1}^{n} (x, v_i) A' v_i - \lambda x = v_j x + \sum_{i=1}^{n} (x, v_i) A' v_i - \lambda x = 0 .$$

Damit ist zunächst erwiesen, daß es außer den im Satz angegebenen Werten $\nu_{1,n}$, $\nu_{2,n}, \ldots$ keine weiteren Eigenwerte für den Operator A_n geben kann. Auch ist das Vorhandensein weiterer Spektrumspunkte des Operators A_n (die keine Eigenwerte sind) nicht möglich, da die Differenz $B_0 - A_n$ der vollstetige Operator $-A'Q_n$ ist und der Operator B_0 laut Voraussetzung ein reines Punktspektrum besitzt, das sich nur bei $+\infty$ häufen kann. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 4. *Es gilt die Abschätzung*

$$\sup_{\substack{x \in D(A_0) \\ y \in D(B_0)}} \frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} \leqq \frac{\gamma}{(1 - q)\, \nu_{n+1} + 1} .$$

Beweis: Für beliebige Elemente $x \in D(A_0)$ und $y \in D(B_0)$ gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} (A_0 x, y) - (x, A_n y) &= (B_0 x + A'x, y) - (x, B_0 y + A' Q_n y) = \\ &= (A'x, (I - Q_n)\, y) . \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} (13) \quad \sup_{\substack{x \in D(A_0) \\ y \in D(B_0)}} \frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} &\leqq \sup_{\substack{x \in D(A_0) \\ y \in D(B_0)}} \frac{\|A'x\|\, \|(I - Q_n)\, y\|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} \leqq \\ &\leqq \gamma \sup_{y \in D(B_0)} \frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{\|A_n y\| + \|y\|} . \end{aligned}$$

Weiterhin ist für alle Elemente $y \in D(B_0)$

$$\|A_n y\| = \|B_0 y + A' Q_n y\| \geqq \|B_0 y\| - q \|B_0 Q_n y\| \geqq (1 - q)\, \|B_0 y\| .$$

Da der Teilraum $\mathfrak{N}_n$ invariant in Bezug auf den Operator B_0 ist, erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned} \sup_{y \in D(B_0)} \frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{\|A_n y\| + \|y\|} &\leqq \sup_{y \in D(B_0)} \frac{\|(I - Q_n)\, y\|}{(1 - q)\, \|B_0 y\| + \|y\|} = \\ = \sup_{y \in D(B_0) \ominus \mathfrak{N}_n} \frac{\|y\|}{(1 - q)\, \|B_0 y\| + \|y\|} &\leqq \frac{1}{(1 - q)\, \nu_{n+1} + 1} . \end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung des Satzes aus der Formel (13).

Aus dem Satz 4 geht zunächst hervor, daß die Folge $\{A_n^*\}$ relativ gleichmäßig gegen den Operator $A_0^* = A_0$ konvergiert. Die Operatoren A_n^* haben — genau wie die Operatoren A_n — ein reines Punktspektrum. Dabei sind die Zahlen $v_{i,n}$ infolge ihrer Reellwertigkeit auch gleichzeitig Eigenwerte des Operators A_n^* [5]). Der Satz A läßt dann den Schluß zu

$$\lim_{n \to \infty} v_{i,n} = \lambda_i .$$

Um zu einer Abschätzungsformel für den Fehler $v_{i,n} - \lambda_i$ zu kommen, wird ein Satz von Gawurin [17] benutzt. Wenn die Norm der Differenz $A_0^{-1} - A_n^{-1}$ hinreichend klein ist, so läßt der Gawurinsche Satz die Abschätzung

$$\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{v_{i,n}} = \left|\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{v_{i,n}}\right| \leqq \|A_0^{-1} - A_n^{-1}\| \tag{14}$$

zu.

Es wird nun der Satz 4 für eine Abschätzung der Norm $\|A_0^{-1} - A_n^{-1}\|$ herangezogen. Da der Operator A_0 positiv definit ist und die positive untere Schranke a besitzt, kann für die Norm des inversen Operators A_0^{-1} die Schranke

$$\|A_0^{-1}\| \leqq \frac{1}{a}$$

angegeben werden. Für hinreichend große n existiert dann der beschränkte Operator A_n^{-1},

$$\|A_n^{-1}\| \leqq \frac{1}{a_n},$$

mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (man sehe hierzu Satz B).

Der Satz 4 liefert nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{(1-q)\,v_{n+1} + 1} &\geqq \sup_{\substack{x \in D(A_0) \\ y \in D(B_0)}} \frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(\|A_0 x\| + \|x\|)(\|A_n y\| + \|y\|)} \geqq \\
&\geqq \sup_{\substack{x \in D(A_0) \\ y \in D(B_0)}} \frac{|(A_0 x, y) - (x, A_n y)|}{(1 + 1/a)(1 + 1/a_n)\,\|A_0 x\|\,\|A_n y\|} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{-1} \sup_{u, v \in \mathfrak{S}} \frac{|(u, A_n^{-1} v - A_0^{-1} v)|}{\|u\|\,\|v\|} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{-1} \|A_0^{-1} - A_n^{-1}\| .
\end{aligned}$$

---

[5]) Die Operatoren A_n sind abgeschlossen, dann ist diese Behauptung in [24] enthalten.

Mit dieser Abschätzung folgt aus der Ungleichung (11) das endgültige Resultat

$$\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\nu_{i,n}} \leqq \gamma \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \frac{1}{(1 - q)\, \nu_{n+1} + 1}$$

oder

$$\nu_{i,n} - \lambda_i \leqq \gamma \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \frac{\nu_{i,n}^2}{(1 - q)\, \nu_{n+1} + 1}.$$

Eine in Vorbereitung befindliche Arbeit wird sich mit der numerischen Auswertung der angeführten Abschätzungsformeln beschäftigen.

Literaturverzeichnis

[1] *Aronszajn N.:* The Rayleigh-Ritz and Weinstein methods for approximation to eigenvalues, I. Operators in a Hilbert space, II. Differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, 474—480 and 596—601 (1948).

[2] *Aronszajn N.:* Approximation methods for eigenvalues of completely continuous symmetric operators. Proc. Symp. Spectral Theory and Diff. Problems, Stillwater, Okl., 1951.

[3] *Aronszajn N., Weinstein A.:* Existence, convergence and equivalence in the unified theory of eigenvalues of plates and membranes. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 27, Nr. 3, 188—191 (1941).

[4] *Aronszajn N., Weinstein A.:* On the unified theory of eigenvalues of plates and membranes. Amer. J. Math., 64, Nr. 4, 623—645 (1942).

[5] *Bazley N. W.:* Lower bounds for eigenvalues with applications to the helium atom. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 850—853 (1959).

[6] *Bazley N. W.:* Lower bounds for eigenvalues with applications to the helium atom. Physical Review, 120, Nr. 1, 144—149 (1960).

[7] *Bazley N. W.:* Lower bounds for eigenvalues, J. Math. Mech., 10, Nr. 2, 289—307 (1961).

[8] *Bazley N. W., Fox D. W.:* Lower bounds for eigenvalues by explicitly solvable intermediate problems. Amer. Math. Soc. Notices, 6, 839—846 (1959).

[9] *Bazley N. W., Fox D. W.:* Truncations in the method of intermediate problems for lower bounds to eigenvalues. J. Res. Nat. Bur. Standards, B 65, Nr. 2, 105—111 (1961).

[10] *Bazley N. W., Fox D. W.:* Lower bounds for eigenvalues of Schrödinger's equation. Physical Review, 124, Nr. 2, 483—492 (1961).

[11] *Bazley N. W., Fox D. W.:* A procedure for estimating eigenvalues. J. Math. Phys., 3, 469 to 471 (1962).

[12] *Bazley N. W., Fox D. W.:* Error bounds for eigenvalues of selfadjoint operators. J. Res. Nat. Bur. Standards, B 66, Nr. 1, 1—4 (1962).

[13] *Bazley N. W., Fox D. W.:* Lower bounds to eigenvalues using operator decomposition of the form B*B. Arch. Rat. Mech. and Anal., 10, 352—360 (1962).

[14] *Colautti M. P.:* Su un teoreme di completezza connesso al metodo di Weinstein per il calcolo degli autovalori. Atti. Accad. Torino, 97, 1—21 (1962).

[15] *Courant R.:* Variational methods for the solution of problems of equelibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc., 49, Nr. 1, 1—23 (1943).

[16] *Diaz J. B.:* Upper and lower bounds for eigenvalues. Proc. of the Eighth Symp. in Appl. Math. of the Amer. Math. Soc., vol. 8, 53—78 (1956).

[17] *Gawurin M. K.:* Über Abschätzungen für die Eigenwerte und — vektoren eines gestörten Operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 76, Nr. 6, 769—770 (1951).
[18] *Gould S. H.:* Variational methods for eigenvalue problems. Univ. of Toronto Press, Toronto 1957.
[19] *Heinz E.:* Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann., 123, 415—438 (1951).
[20] *Payne L. E.:* Inequalities for eigenvalues of membranes and plates. J. Rat. Mech. and Anal., 4, 517—529 (1955).
[21] *Rellich F.:* Störungstheorie der Spektralzerlegung, II. Mitteilung. Math. Ann., 113, 677—685 (1937).
[22] *Sawinowa L. T.:* Über untere Schranken für die Eigenwerte positiver Operatoren. J. wycisl. math. und math., phys., 1, Nr. 4, 714—718 (1961) (russ.).
[23] *Swirski I. W.:* Über Genauigkeitsabschätzungen bei Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenschwingungen. Isw. Kasan. fil. Akad. Nauk SSSR, ser. Phys.-math. nauk, 3, 59—86 (1953).
[24] *Sz. Nagy B.:* Perturbations des transformations lineaires fermées. Acta Sci. Math., 14, Nr. 2, 125—137 (1951).
[25] *Trefftz E.:* Ein Gegenstüch zum Ritzschen Verfahren. Verh. d. 2. Internat. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich 1926.
[26] *Weinberger H. F.:* Error estimation in the Weinstein method for eigenvalues. Proc. Amer. Math. Soc., 3, 645—646 (1952).
[27] *Weinberger H. F.:* Rayleigh-Ritz procedure giving upper and lower bounds for eigenvalues. Technical Note BN-41, Univ. of Maryland 1954.
[28] *Weinstein A.:* On minimal problems in the theory of elasticity. J. London Math. Soc., 10, 184—192 (1935).
[29] *Weinstein A.:* Sur la stabilite des plaques encostrees. C. R. Acad. Sci. Paris, 200, 107—109 (1935).
[30] *Weinstein A.:* Etudes des spectres des équations aux dérivées partielles. Mémorial des Sci. Math., Nr. 88 (1937).
[31] *Weinstein A.:* Bounds for eigenvalues and the method of intermediate problems. Proc. of an Internat. Conf. in Part. Diff. equat. and Continuum Mech. at the Univ. of Wisconsin 1960, Univ. of Wisconsin Press 1961, 39—53.
[32] *Weinstein A.:* A necessary and sufficient condition in the maximum-minimum theory of eigenvalues. Studies Math. Anal. and Relat. Topics, Univ. Press, Stanford 1962, 429—434.
[33] *Weinstein A.:* On the Sturm-Liouville theory and the eigenvalues of intermediate problems. Numer. Math., 5, Nr. 3, 238—245 (1963).
[34] *Weinstein A.:* The intermediate problems and the maximum-minimum theory of eigenvalues. J. Math. Mech., 12, Nr. 2, 235—245 (1963).
[35] *Weyl H.:* Raminification, old and now, of the eigenvalue problem. Bull. Amer. Math. Soc., 56, Nr. 2, 115—132 (1950).
[36] *Velte W.:* Über ein Stabilitätskriterium der Hydrodynamik. Arch. Rat. Mech. and Anal., 9, Nr. 1, 9—20 (1962).

Výtah

O ODHADECH CHYB PRO WEINSTEINOVU-BAZLEYOVU-FOXOVU METODU

FRIEDER KUHNERT

V práci jsou stanoveny odhady chyb pro metodu Weinsteinovu-Bazleyovu-Foxovu, jež dává dolní přiblížení vlastních hodnot positivně definitivních neohraničených operátorů. K odvození je použito jistého zobecnění stejnoměrné konvergence podle Rellicha nikoliv nutně ohraničených operátorů. V práci je též ukázáno, že s použitím tohoto zobecnění lze obdržeti odhady chyb pro Ritzovu metodu sestrojování vlastních hodnot.

Резюме

ОБ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДЛЯ МЕТОДА ВАЙНШТЕЙНА - БАЦЛЕЙ - ФОКСА

ФРИДЕР КУНЕРТ (FRIEDER KUHNERT)

Для метода Вайнштейна-Бацлей-Фокса, дающего оценки снизу для собственных чисел положительно определенных самосопряженных операторов, устанавливаются оценки погрешностей. Для этого используется некоторое обобщение равномерной сходимости по Реллиху не обязательно ограниченных операторов. Доказывается, что при помощи этого обобщения можно получить оценки погрешностей для метода Ритца приближенного вычисления собственных чисел.

Anschrift des Autors: Dr. rer. nat. habil. *Frieder Kuhnert*, Institut für Mathematik der Technischen Hochschule, Strasse der Nationen 62, 901 Karl-Marx-Stadt, DDR.