

Aplikace matematiky

Emil Humhal; Jan Zítko

Poznámka k superrelaxační metodě

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 3, 161–170

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103086>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

POZNÁMKA K SUPERRELAXAČNÍ METODĚ

E. HUMHAL, J. ZITKO

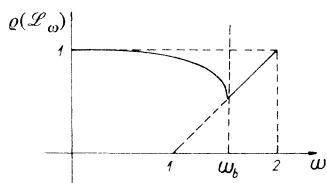
(Došlo dne 30. května 1966.)

1. ÚVOD

Při řešení eliptických parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí obdržíme zpravidla „velkou“ soustavu rovnic. Matice soustavy má po vhodné permutaci obvykle blokově třídiagonální tvar. Takové soustavy se často řeší iterační metodou SOR s iterační maticí $\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1} (\omega U + (1 - \omega)I)$.

Bylo dokázáno, že je-li matice soustavy symetrická a pozitivně definitivní, potom metoda SOR konverguje, je-li $\omega \in (0,2)$.

Předpokládáme, že matice soustavy je 2-cyklická, shodně uspořádaná. Na obr. 1 je znázorněn průběh spektrálního poloměru $\varrho(\mathcal{L}_\omega)$. Funkce $\varrho(\mathcal{L}_\omega)$ klesá v intervalu $(0, \omega_b)$, kde ω_b je optimální hodnota a v intervalu $(\omega_b, 2)$ lineárně roste. Číslo ω_b je dáno vzorcem



Obr. 1.

$$\omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}},$$

kde μ je spektrální poloměr matice $L + U$.

Označme ε_m vektor chyby při m -té iteraci. Označme $k_\varepsilon(\omega)$ nejmenší počet iterací, pro který $\|\varepsilon_m\| < \varepsilon$ při daném ω . V této práci je ukázáno, že je-li $\omega < \omega_b$, potom existuje ε_0 tak, že pro každé $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ platí: existuje $\kappa > 0$ tak, že pro $|\omega_1 - \omega_2| < \kappa$ je $|k_\varepsilon(\omega_1) - k_\varepsilon(\omega_2)| \leq 1$, což značí, že není možné, aby při malé změně ω došlo ke „skoku“ v počtu iterací, což lze pozorovat pro $\omega > \omega_b$. Dále je dokázáno (věta 2), že je-li $\omega_1 < \omega_2 < \omega_b$, potom pro dostatečně malé ε je $k_\varepsilon(\omega_1) \geq k_\varepsilon(\omega_2)$, což odpovídá průběhu funkce $\varrho(\mathcal{L}_\omega)$ podle obr. 1. Rovněž je-li $\omega_b < \omega_1 < \omega_2$, potom pro dosti malá ε je $k_\varepsilon(\omega_1) \leq k_\varepsilon(\omega_2)$, což odpovídá průběhu $\varrho(\mathcal{L}_\omega)$. Na závěr práce jsou uvedeny numerické výsledky. Jednak je to tabulka závislosti $k_\varepsilon(\omega)$ na ω v okolí relaxačního faktoru ω_b při $\varepsilon = 10^{-4}$, potom graf objasňující průběh $k_\varepsilon(\omega)$ a „skok“ v počtu

iterací a nakonec graf $k_\varepsilon(\omega)$ pro $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$. (Zároveň je u tohoto příkladu vidět, že skutečný optimální relaxační faktor je větší než teoreticky vypočtené ω_b .)

2. NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI SUPERRELAXAČNÍ MATICE

Nechť je dána matice A typu $n \times n$,

$$(1) \quad A = D(I - U - L),$$

kde I je jednotková a D diagonální matice, L a U necht' jsou ostře dolní a ostře horní trojúhelníkové matice. Necht' A má následující vlastnosti:¹⁾

- (2) a) A je symetrická a pozitivně definitní.
 b) A je dvoucyklická.

Označme

$$(3) \quad B = L + U$$

a předpokládejme, že pro libovolné nenulové komplexní α je matice $\alpha L + \alpha^{-1}U$ podobná matici B . Matice B je slabě cyklická s indexem 2, všechna její vlastní čísla jsou reálná a má pouze lineární elementární dělitele. Necht' $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ jsou všechna její kladná vlastní čísla a necht' platí:

$$(4) \quad 1 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s > 0.$$

Matice \mathcal{L}_ω definovaná vztahem

$$(5) \quad \mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}(\omega U + (1 - \omega)I)$$

má pak vlastní čísla:

$$(6) \quad \begin{aligned} \lambda_{2i-1}(\omega) &= \left(\frac{\omega\mu_i + \sqrt{[\omega^2\mu_i^2 - 4(\omega - 1)]}}{2} \right)^2, \\ \lambda_{2i}(\omega) &= \left(\frac{\omega\mu_i - \sqrt{[\omega^2\mu_i^2 - 4(\omega - 1)]}}{2} \right)^2, \\ \lambda_{2s+1}(\omega) &= \lambda_{2s+2}(\omega) = \dots = \lambda_n(\omega) = 1 - \omega. \end{aligned}$$

Označme ω_b hodnotu, v níž $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ nabývá svého minima. Platí

$$(7) \quad \omega_b = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - \mu_1^2)}}.$$

¹⁾ Všechna označení a pojmy jsou převzaty z [1].

Pro $\omega \in (0, \omega_b)$ platí: Je-li μ_1 r -násobné vlastní číslo matice B je $\lambda_1(\omega) = \lambda_3(\omega) = \dots = \lambda_{2r-1}(\omega)$ r -násobné vlastní číslo matice \mathcal{L}_ω a vlastní vektory matice \mathcal{L}_ω příslušné k $\lambda_1(\omega)$ tvoří r -dimensionální prostor $\mathbf{V}_\omega^{(1)}$. Prostor vytvořený vlastními, případně kořenovými vektory příslušnými ke zbývajícím vlastním číslům označíme $\mathbf{V}_\omega^{(2)}$. Dále platí

$$(8) \quad \lambda_i(\omega) > |\lambda_i(\omega)| \quad \text{pro } i \neq 1, 3, 5, \dots, 2r - 1.$$

Pro $\omega \in \langle \omega_b, 2 \rangle$ platí

$$(9) \quad |\lambda_i(\omega)| = \omega - 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Zvolme libovolnou normu v n -rozměrném unitárním prostoru \mathbf{V} a zvolme $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Definujme si

$$(10) \quad Q_k(\omega) = \left\| \left(\frac{1}{\lambda_1(\omega)} \mathcal{L}_\omega \right)^k \mathbf{y} \right\|.$$

Pro každé $\omega \in (0, \omega_b)$ je tato posloupnost konvergentní a platí

$$(11) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k(\omega) = \eta_\omega,$$

kde η_ω jsme označili délku průmětu vektoru \mathbf{y} do prostoru $\mathbf{V}_\omega^{(1)}$.

Dokažme, že tato konvergence je stejnoměrná vzhledem k ω na každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (0, \omega_b)$.

Označme M_ω operátor indukovaný operátorem $1/\lambda_1(\omega) \mathcal{L}_\omega$ na invariantním podprostoru $\mathbf{V}_\omega^{(2)}$. Pak platí, že $\|M_\omega^k\|$ je spojitou funkcí ω stejně jako η_ω .

Zvolme nyní pevné $\omega_0 \in \langle 0, \omega_b \rangle$. Operátor M_{ω_0} má všechna vlastní čísla menší než 1 a proto existuje přirozené číslo q takové, že $\|M_{\omega_0}^q\| < C < 1$, kde C je nějaká předem zvolená konstanta. V důsledku spojitosti $\|M_\omega^q\|$ existuje číslo ϑ takové, že stejná nerovnost platí pro všechna $\omega \in \langle \omega_0 - \vartheta, \omega_0 + \vartheta \rangle \subset (0, \omega_b)$. Sledujme nyní následující posloupnosti funkcí proměnné ω :

$$(12) \quad \begin{array}{ccccccc} \|z_\omega\| & , & \|M_\omega^q z_\omega\| & , & \|M_\omega^{2q} z_\omega\| & , & \dots , \\ \|M_\omega z_\omega\| & , & \|M_\omega^{q+1} z_\omega\| & , & \|M_\omega^{2q+1} z_\omega\| & , & \dots , \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \|M_\omega^{q-1} z_\omega\| & , & \|M_\omega^{2q-1} z_\omega\| & , & \|M_\omega^{3q-1} z_\omega\| & , & \dots , \end{array}$$

kde jsme označili z_ω průmět \mathbf{y} do $\mathbf{V}_\omega^{(2)}$. Jsou to posloupnosti spojitých funkcí, které v intervalu $\langle \omega_0 - \vartheta, \omega_0 + \vartheta \rangle$ konvergují monotonně k nule. Každá z těchto posloupností je tedy stejnoměrně konvergentní. Z toho plyne, že také posloupnost $\|M_\omega^k z_\omega\|$ je v tomto intervalu stejnoměrně konvergentní a uijeme-li ještě Borelovu větu o pokrytí zjistíme, že tato posloupnost je stejnoměrně konvergentní v $\langle \alpha, \beta \rangle$. Protože platí $\|M_\omega^k z_\omega\| \geq |\eta_\omega - Q_k(\omega)|$, je také konvergence v (11) stejnoměrná.

3. VLIV ZMĚNY RELAXAČNÍHO FAKTORU NA POČET ITERACÍ NUTNÝCH
K ZAKONČENÍ ITERAČNÍHO PROCESU

Zavedme následující označení: pro libovolné $\varepsilon < 0$ a $\omega \in (0, 2)$ označíme $k_\varepsilon(\omega)$ takové přirozené číslo, že $\|\mathcal{L}_\omega^{k_\varepsilon(\omega)}\mathbf{y}\| \leq \varepsilon$ a pro všechna přirozená $k < k_\varepsilon(\omega)$ platí $\|\mathcal{L}_\omega^k\mathbf{y}\| > \varepsilon$. V následujících dvou větách si popíšeme chování tohoto čísla.

Věta 1. *Nechť matice A, B splňují podmínky z odstavce 2. Zvolme vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Nechť existuje interval $\langle \alpha, \beta \rangle \in (0, \omega_b)$ takový, že $\eta_\omega \neq 0$ pro všechna $\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Pak existuje takové $\varepsilon_0 > 0$, že k libovolnému $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existuje $\kappa > 0$ tak, že pro libovolné $\omega_1, \omega_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pro které $|\omega_1 - \omega_2| < \kappa$, platí $|k_\varepsilon(\omega_1) - k_\varepsilon(\omega_2)| \leq 1$.*

Důkaz: Nechť δ je libovolné kladné číslo takové, že $\delta < \min_{\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle} \eta_\omega$. Podle (11) existuje takové přirozené k_δ , že pro $k > k_\delta$ a $\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$(13) \quad \eta_\omega - \delta < Q_k(\omega) < \eta_\omega + \delta$$

a tedy podle (10)

$$(14) \quad (\eta_\omega - \delta) \lambda_1^k(\omega) < \|\mathcal{L}_\omega^k\mathbf{y}\| < (\eta_\omega + \delta) \lambda_1^k(\omega).$$

Funkce $f_1(\xi) = (\eta_\omega - \delta) \lambda_1^\xi(\omega)$ a $f_2(\xi) = (\eta_\omega + \delta) \lambda_1^\xi(\omega)$ jsou klesající funkce proměnné ξ . Zvolme si $\varepsilon > 0$ zatím libovolně a určíme body $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)$, ve kterých $f_1(\xi_1(\omega)) = f_2(\xi_2(\omega)) = \varepsilon$. Platí

$$(15) \quad \begin{aligned} \xi_1(\omega) &= \log(\varepsilon/(\eta_\omega - \delta))/\log \lambda_1(\omega), \\ \xi_2(\omega) &= \log(\varepsilon/(\eta_\omega + \delta))/\log \lambda_1(\omega). \end{aligned}$$

Nyní si zvolíme libovolné reálné $\Delta, 0 < \Delta < 1$ a dokážeme, že existuje $\delta \in (0, \min_{\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle} \eta_\omega)$ takové, že $\xi_2(\omega) - \xi_1(\omega) < \Delta$ pro všechna $\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a $\varepsilon > 0$. Odhadněme tedy velikost tohoto rozdílu:

$$(16) \quad \begin{aligned} \xi_2(\omega) - \xi_1(\omega) &= \log [(\eta_\omega - \delta)/(\eta_\omega + \delta)]/\log \lambda_1(\omega) \leq \\ &\leq \log [(\eta_\omega - \delta)/(\eta_\omega + \delta)]/\max_{\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle} \log \lambda_1(\omega) \leq \\ &\leq \log [(\min_{\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle} \eta_\omega - \delta)/(\min_{\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle} \eta_\omega + \delta)]/\max_{\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle} \log \lambda_1(\omega). \end{aligned}$$

Při těchto odhadech jsme užili toho, že $\log [(\xi - \delta)/(\xi + \delta)]$ je rostoucí funkce proměnné ξ v intervalu $(\delta, +\infty)$. Pravá strana poslední nerovnosti je spojitá funkce proměnné δ , která pro $\delta = 0$ nabývá hodnoty nula. Je proto možné zvolit $\delta > 0$ tak, aby tento člen a tím také rozdíl $\xi_2(\omega) - \xi_1(\omega)$ byl menší než Δ pro všechna přípustná ω a ε .

Nechť tedy δ je číslo daných vlastností, nalezneme odpovídající k_δ a definujeme

$\varepsilon_1 = \min_{k=0,1,\dots,k_\delta} \min_{\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle} \|\mathcal{L}_\omega^k \mathbf{y}\|$. Zvolme $\varepsilon < \varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \eta_\omega - \delta)$. Funkce $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ jsou stejnoměrně spojité funkce proměnné ω na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Existuje tedy takové $\kappa > 0$, že pro $\omega_1, \omega_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $|\omega_1 - \omega_2| < \kappa$ platí nerovnosti $|\xi_1(\omega_1) - \xi_1(\omega_2)| < (1 - \Delta)/2$ a $|\xi_2(\omega_1) - \xi_2(\omega_2)| < (1 - \Delta)/2$.

Zvolme $\omega_1, \omega_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, aby $|\omega_1 - \omega_2| < \kappa$. Pro všechna $\omega \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a $k = 0, 1, 2, \dots, k_\delta$ platí $\|\mathcal{L}_\omega^k \mathbf{y}\| > \varepsilon$ a tedy $k_\varepsilon(\omega_1) > k_\delta$, $k_\varepsilon(\omega_2) > k_\delta$. Pro $k > k_\delta$ však platí (14) a tedy

$$(17) \quad \xi_1(\omega_i) \leq k_\varepsilon(\omega_i) \leq \xi_2(\omega_i) + 1,$$

$$(18) \quad \min(\xi_1(\omega_1), \xi_1(\omega_2)) \leq k_\varepsilon(\omega_i) \leq \max(\xi_2(\omega_1), \xi_2(\omega_2)) + 1$$

pro $i = 1, 2$. Nyní odhadneme rozdíl mezi horní a dolní hranicí pro $k_\varepsilon(\omega_i)$:

$$(19) \quad \begin{aligned} & |\max(\xi_2(\omega_1), \xi_2(\omega_2)) + 1 - \min(\xi_1(\omega_1), \xi_1(\omega_2))| \leq \\ & \leq |\xi_1(\omega_1) - \xi_1(\omega_2)| + \min(|\xi_2(\omega_1) - \xi_1(\omega_1)|, |\xi_2(\omega_2) - \xi_1(\omega_2)|) + \\ & + |\xi_2(\omega_2) - \xi_2(\omega_1)| + 1 < \frac{1 - \Delta}{2} + \Delta + \frac{1 - \Delta}{2} + 1 = 2. \end{aligned}$$

V těchto hranicích tedy leží nejvýše dvě celá čísla a proto $|k_\varepsilon(\omega_1) - k_\varepsilon(\omega_2)| \leq 1$.

Věta 2. *Nechť matice A, B splňují podmínky z odstavce 2. Potom platí:*

a) *Zvolme libovolnou konečnou posloupnost reálných čísel $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_p$ z intervalu $(0, \omega_b)$. Nechť \mathbf{y} je takový vektor, že $\eta_{\omega_i} \neq 0$ pro $i = 1, \dots, p$. Pak existuje takové $\varepsilon_0 > 0$, že pro $\varepsilon < \varepsilon_0$ platí*

$$(20) \quad k_\varepsilon(\omega_i) \geq k_\varepsilon(\omega_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, p - 1.$$

b) *Zvolme libovolnou konečnou posloupnost čísel $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_p$ z intervalu $(\omega_b, 2)$. Nechť \mathbf{y} je libovolný vektor, $\mathbf{y} \neq 0$. Pak existuje takové $\varepsilon_0 > 0$, že pro $\varepsilon < \varepsilon_0$ platí*

$$(21) \quad k_\varepsilon(\omega_i) \leq k_\varepsilon(\omega_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, p - 1.$$

Důkaz: Zřejmě se stačí omezit na $p = 2$.

a) Nechť $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_b$. Z (6) plyne, že $\lambda_1(\omega_1) > \lambda_1(\omega_2)$. Zvolme $\delta < \min(\eta_{\omega_1}, \eta_{\omega_2})$. Pak existuje takové přirozené k_1 , že při $k > k_1$ platí

$$(22) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\omega_1}^k \mathbf{y}\| &> (\eta_{\omega_1} - \delta) \lambda_1^k(\omega_1), \\ \|\mathcal{L}_{\omega_2}^k \mathbf{y}\| &< (\eta_{\omega_2} + \delta) \lambda_1^k(\omega_2). \end{aligned}$$

Dále existuje takové přirozené k_2 , že pro $k > k_2$ platí

$$(23) \quad (\eta_{\omega_2} + \delta) \lambda_1^k(\omega_2) < (\eta_{\omega_1} - \delta) \lambda_1^k(\omega_1).$$

Označme

$$k_0 = \max(k_1, k_2) \quad \text{a} \quad \varepsilon_0 = \min_{k=0,1,\dots,k_0} \|\mathcal{L}_{\omega_1}^k \mathbf{y}\|.$$

Zvolme $\varepsilon < \varepsilon_0$. Je-li tedy pro nějaké k splněna nerovnost $\|\mathcal{L}_{\omega_1}^k \mathbf{y}\| < \varepsilon$, je nutně $k > k_0$ a tedy

$$(24) \quad \|\mathcal{L}_{\omega_2}^k \mathbf{y}\| < (\eta_{\omega_2} + \delta) \lambda_1^k(\omega_2) < (\eta_{\omega_1} - \delta) \lambda_1^k(\omega_1) < \|\mathcal{L}_{\omega_1}^k \mathbf{y}\| < \varepsilon.$$

Tedy $k_x(\omega_2) \leq k_x(\omega_1)$.

b) Zvolme $\omega_b < \omega_1 < \omega_2 < 2$. Platí

$$\|\mathcal{L}_{\omega_i}^k \mathbf{y}\| = (\omega_i - 1)^k \|((\omega_i - 1)^{-1} \mathcal{L}_{\omega_i})^k \mathbf{y}\|, \quad i = 1, 2.$$

Je snadné dokázat, že posloupnosti $\|((\omega_i - 1)^{-1} \mathcal{L}_{\omega_i})^k \mathbf{y}\|$ mají konečnou nenulovou limes inferior a limes superior pro k rostoucí nade všechny meze. Tvrzení věty lze dokázat analogicky k případu a), uvědomíme-li si, že existuje přirozené číslo k_0 takové, že pro $k > k_0$ platí

$$(25) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\omega_1}^k \mathbf{y}\| &< (\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|((\omega_1 - 1)^{-1} \mathcal{L}_{\omega_1})^k \mathbf{y}\| + \delta) (\omega_1 - 1)^k < \\ &< (\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|((\omega_2 - 1)^{-1} \mathcal{L}_{\omega_2})^k \mathbf{y}\| - \delta) (\omega_2 - 1)^k < \|\mathcal{L}_{\omega_2}^k \mathbf{y}\|, \end{aligned}$$

kde číslo δ jsme zvolili tak, aby

$$0 < \delta < \min_{i=1,2} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|((\omega_i - 1)^{-1} \mathcal{L}_{\omega_i})^k \mathbf{y}\|.$$

Tabulka 1.

15,15125	-0,15	0	0	-15	0	0	0
-0,15	20,20175	-0,05	0	0	-20	0	0
0	-0,05	6,05055	-0,5	0	0	-5,5	0
0	0	-0,5	1,00005	0	0	0	-0,5
-15	0	0	0	18,16375	-1,65	0	0
0	-20	0	0	-1,65	22,22175	-1,05	0
0	0	-5,5	0	0	-1,05	13,10855	-5,5
0	0	0	-0,5	0	0	-5,5	6,05055
0	0	0	0	-1,5	0	0	0
0	0	0	0	0	-2,5	0	0
0	0	0	0	0	0	-1,05	0
0	0	0	0	0	0	0	-0,05
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

4. NUMERICKÉ VÝSLEDKY

V odstavci 3 byly dokázány dvě základní vlastnosti čísla $k_\varepsilon(\omega)$. Ve větě 2 to byla monotonní závislost $k_\varepsilon(\omega)$ na ω v intervalu $(0, \omega_b)$ a $(\omega_b, 2)$ a ve větě 1 „spojitá“ závislost $k_\varepsilon(\omega)$ na ω v $(0, \omega_b)$. Chování $k_\varepsilon(\omega)$ v okolí ω_b a pro $\omega > \omega_b$ si budeme ilustrovat na příkladě.

Při řešení parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu byla získána soustava s maticí uvedenou v tabulce 1 (viz VARGA [1], dodatek B, str. 302).

Spektrální poloměr příslušné Jacobiho matice B je roven 0,999079 a příslušné ω_b je podle (7) rovno 1,9177. V tabulce 2 jsou čísla $k_\varepsilon(\omega)$ pro $\varepsilon = 10^{-4}$ a ω měnící se v intervalu 1,901 až 1,956 s krokem 0,001. Volili jsme $\mathbf{y} = (1, 1, \dots, 1)$ a příslušná norma byla eukleidovská.

Vidíme, že mezi $\omega = 1,922$ a $1,923$ nastává skok v $k_{10^{-4}}(\omega)$ stejně jako mezi 1,932 a 1,933, 1,943 a 1,944 a mezi 1,952 a 1,953. Abychom se přesvědčili, že skok mezi 1,922 a 1,923 není způsoben tím, že krok 0,001 je příliš hrubý, sestrojíme tabulku závislosti $k_{10^{-4}}(\omega)$ na ω pro ω měnící se od 1,9215 do 1,9224 s krokem 0,0001.

Příčina skoku mezi $\omega = 1,9222$ a $\omega = 1,9223$ je patrna z obrázku 2, na němž jsou grafy závislosti $\|\mathcal{L}_\omega^k \mathbf{y}\|$ na k pro $\mathbf{y} = (1, 1, \dots, 1)$ a $\omega = 1,9222$ a $\omega = 1,9223$, jednotlivé body jsou spojeny spojitou křivkou, stupnice $\|\mathcal{L}_\omega^k \mathbf{y}\|$ je logaritmická. Podobná závislost by pro $\omega < \omega_b$ byla přibližně přímková. Vlny, které na grafech vidíme a které jsou příčinou skoků, jsou pravděpodobně způsobeny tím, že $\|1/(\lambda_i(\omega) \mathcal{L}_\omega^k) \mathbf{y}\|$ není (na rozdíl od případu $\omega < \omega_b$) konvergentní pro k rostoucí nad všechny meze. Je vidět, že skok by nastal i pro $\varepsilon = 0,13 \cdot 10^{-7}$. Kdyby byl graf vyneseno ještě pro k větší než 300, viděli bychom, že skok nastává také pro $\varepsilon = 0,18 \cdot 10^{-11}$ atd.

Tabulka 1.

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-1,5	0	0	0	0	0	0	0
0	-2,5	0	0	0	0	0	0
0	0	-1,05	0	0	0	0	0
0	0	0	-0,05	0	0	0	0
6,025	-3	0	0	-1,5	0	0	0
-3	11,045	-2,5	0	0	-3	0	0
0	-2,5	25,22175	-20	0	0	-1,65	0
0	0	-20	20,20175	0	0	0	-0,15
-1,5	0	0	0	3,0125	-1,5	0	0
0	-3	0	0	-1,5	6,025	-1,5	0
0	0	-1,65	0	0	-1,5	18,16375	-15
0	0	0	-0,15	0	0	-15	15,15152

Tabulka 2.

ω	$k_{10-4}(\omega)$	ω	$k_{10-4}(\omega)$	ω	$k_{10-4}(\omega)$	ω	$k_{10-4}(\omega)$
1,901	243	1,915	174	1,929	127	1,943	138
1,902	238	1,916	168	1,930	123	1,944	177
1,903	234	1,917	161	1,931	119	1,945	176
1,904	230	1,918	152	1,932	116	1,946	175
1,905	225	1,919	142	1,933	157	1,947	173
1,906	221	1,920	129	1,934	156	1,948	172
1,907	217	1,921	114	1,935	154	1,949	170
1,908	212	1,922	101	1,936	152	1,950	168
1,909	207	1,923	146	1,937	151	1,951	167
1,910	202	1,924	145	1,938	149	1,952	165
1,911	197	1,925	143	1,939	147	1,953	203
1,912	192	1,926	140	1,940	144	1,954	202
1,913	186	1,927	136	1,941	142	1,955	201
1,914	181	1,928	132	1,942	140	1,956	199

Tabulka 3.

ω	$k_{10-4}(\omega)$	ω	$k_{10-4}(\omega)$
1,9215	107	1,9220	101
1,9216	106	1,9221	100
1,9217	105	1,9222	99
1,9218	103	1,9223	145
1,9219	102	1,9224	145

Na závěr uvádíme graf na obr. 3, na němž jsou vyneseny závislosti $k_\varepsilon(\omega)$ na ω pro $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$ pro ω měnící se od $\omega = 1,917$ do $\omega = 1,9223$ s krokem 0,0001. Z obrázku je zřejmé, že při faktických výpočtech je vhodné volit ω mezi ω_b a místem prvního skoku, to znamená tím blíže optimálnímu ω_b , čím menší volíme ε . Otázkou ovšem zůstává, jak zjistit, kde nastane první skok.

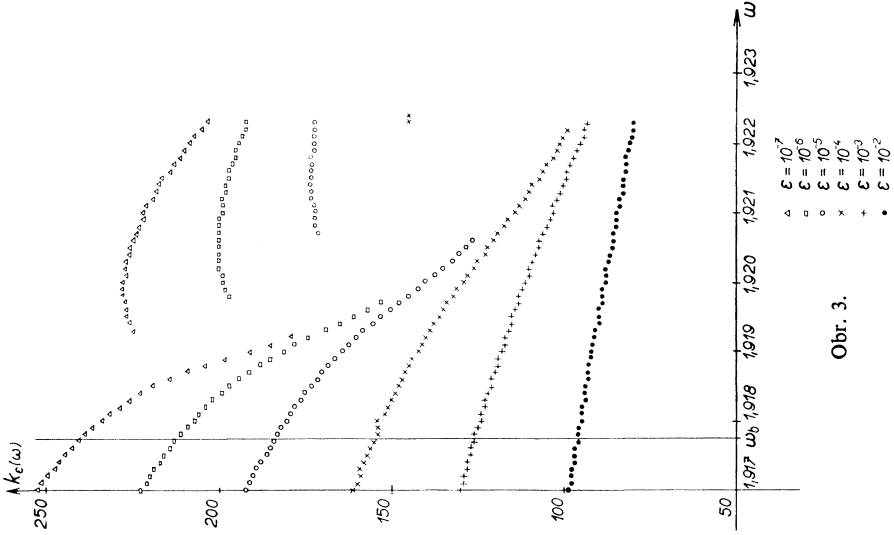
Poznámka: Všechny výpočty byly provedeny na počítači URAL 2.

Autoři děkují doc. dr. Ivo Markovi C.Sc. za řadu cenných rad při zpracování tohoto článku.

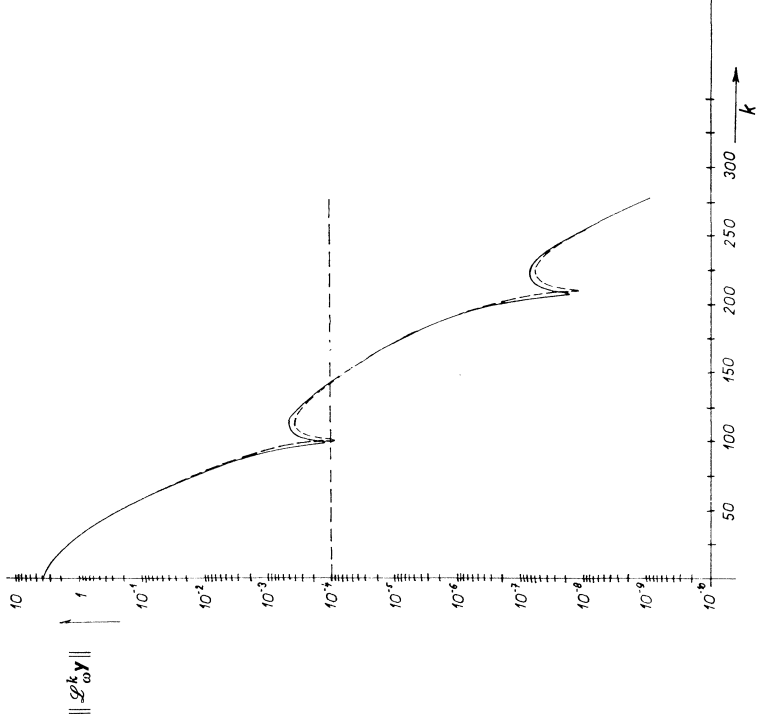
Literatura

- [1] R. S. Varga: Matrix Iterative Analysis. Prentice-hall, Englewood Clifs, New Jersey 1962.
 [2] D. M. Young: Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954), 92–111.

Závislost $K_{\epsilon}(\omega)$ na ω v okolí ω_b pro $\epsilon = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$.



Obr. 3.



--- $\omega = 1.9222$
 — $\omega = 1.9223$

Obr. 2.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К МЕТОДУ ВЕРХНЕЙ РЕЛАКСАЦИИ

Э. ХУМХАЛ, (E. HUMHAL), Й. ЗИТКО (J. ZITKO)

При решении дифференциальных уравнений в частных производных методом сеток получается система линейных алгебраических уравнений. Матрица этой системы имеет обычно тридиагональный вид. Такие системы часто решаются методом верхней релаксации (SOR). В настоящей работе изучается изменение числа итераций (необходимых для того, чтобы норма вектора ошибки была меньше данного ε) в зависимости от величины релаксационного фактора. Было показано, что если релаксационный фактор меньше оптимального фактора, то „маленькому его изменению“ отвечает „маленькое изменение числа итераций“. Если релаксационный фактор больше оптимального фактора, то обнаруживаются скачки в числе итераций.

Работа дополнена графиками и таблицами в которых показано изменение числа итераций в зависимости от величины релаксационного фактора. Зависимость была изучена на одном примере из книги Варги (R. S. Varga: „Matrix Iterative Analysis“).

Summary

CONTRIBUTION TO THE SUCCESSIVE OVERRELAXATION METHOD

E. HUMHAL, J. ZITKO

On solving partial differential equations of elliptic type by finite difference approximations, we obtain a system of linear algebraic equations. The matrix of the system has “usually” a block tri-diagonal form. Such systems are often solved by successive overrelaxation iterative methods (SOR). This paper investigates the dependence of the number of iterations (necessary for the norm of the error vector to be less than the given ε) on the change of the relaxation factor. It has been proved that if the relaxation factor is less than the optimum relaxation factor, “a little change” of the relaxation factor corresponds to “a little change” of the number of iterations. If the relaxation factor is greater than the optimum relaxation factor, the jumps in the number of iterations have been found.

Tables and graphs are enclosed showing the dependence of the number of iterations on the change of the relaxation factor. The dependence was studied according to one example in the book “Matrix Iterative Analysis” by Richard S. Varga.

Adresy autorů: Prom. mat. E. Humhal, Matematická laboratoř ČVUT, Horská 4, Praha 2. — Prom. mat. J. Zitko, Ústav výpočtové techniky ČSAV - ČVUT, Horská 3, Praha 2.