Zdislav Kovářík

Řešení částečného problému vlastních čísel v Banachových prostorech vícestupňovou mocninnou metodou

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 3, 153–160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103085

ŘEŠENÍ ČÁSTEČNÉHO PROBLÉMU VLASTNÍCH ČÍSEL V BANACHOVÝCH PROSTORECH VÍCESTUPŇOVOU MOCNINNOU METODOU

Zdislav Kovářík

(Došlo dne 17. března 1966.)

V [1], čl. 57 je vyložena vícestupňová mocninná metoda řešení částečného problému vlastních čísel matic. Algoritmus pro dvoustupňovou metodu je tento: Vybereme dva vektory $\mathfrak{x}_0$ a $\mathfrak{y}_0$ tak, aby matice sestavená z prvních dvou jejich souřadnic byla jednotková. Nechť jsou již známy vektory $\mathfrak{x}_k$, $\mathfrak{y}_k$ ($k \geqq 0$ celé); pak z vektorů $A\mathfrak{x}_k$, $A\mathfrak{y}_k$ (kde A je daná matice) utvoříme takové jejich lineární kombinace $\mathfrak{x}_{k+1}$, $\mathfrak{y}_{k+1}$, že jejich první dvě souřadnice tvoří opět jednotkovou matici.

Má-li matice A dvě vlastní čísla λ_1, λ_2 (nebo jedno dvojnásobné) převládající v absolutní hodnotě nad ostatními, jsou-li popsané operace v každém kroku proveditelné a je-li matice vytvořená z prvních dvou složek vlastních (kořenových) vektorů příslušných k λ_1, λ_2 regulární, pak existují $\lim_k \mathfrak{x}_k = \mathfrak{x}$ a $\lim_k \mathfrak{y}_k = \mathfrak{y}$ a tvoří bázi invariantního podprostoru příslušného ke zmíněné dvojici vlastních čísel. Přitom matice operátoru indukovaného na tomto podprostoru je vytvořena prvními dvěma souřadnicemi vektorů $A\mathfrak{x}$, $A\mathfrak{y}$.

Tím je řešení částečného problému v prostoru velké dimenze převedeno na řešení úplného problému v prostoru malé dimenze.

V tomto článku je popsaná metoda přirozeným způsobem zobecněna pro případ omezených lineárních operátorů jistého typu v Banachově prostoru.

Pro stručnost vyjadřování zavedeme tato označení:

$\mathfrak{X}$ (s prvky $x, y, \ldots$) je komplexní Banachův prostor s normou $\|.\|$,
$\mathfrak{X}'$ (s prvky $x', y', \ldots$) je prostor spojitých lineárních funkcionálů na $\mathfrak{X}$,
$B(\mathfrak{X})$ (s prvky $A, B, \ldots$) prostor spojitých lineárních operátorů $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$,
K (s prvky $\alpha, \beta, \ldots$) těleso komplexních čísel,
$\mathfrak{X}^p = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (p-krát, p je přirozené číslo) s prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$; $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\|\mathbf{x}\| = \max_i \|\mathbf{x}_i\|$.
Podobně $\mathfrak{X}'^p$ má prvky $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \ldots$; $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_p)^T$ (tj. psáno do sloupce), $\|\mathbf{x}'\| = \sum_i \|\mathbf{x}'_i\|$.

Konečně K^p má prvky $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_p)^T$, $\|\mathfrak{x}\| = \sum_i |\xi_i|$ a $B(K^p)$ má prvky $\Gamma, \Lambda, \ldots, \Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^p$, $\|\Gamma\| = \max_j \sum_i |\gamma_{ij}|$.

Znak 0 značí nulový prvek kteréhokoli lineárního prostoru; I je jednotkový prvek kteréhokoli prostoru operátorů (kromě K).

Jiné funkce znaků (pro označení množin, indexů atd.) budou jasné z kontextu.

Mezi zavedenými objekty jsou definovány tyto součiny: $Ax \in \mathfrak{X}$, $x'A \in \mathfrak{X}'$, $AB \in B(\mathfrak{X})$, $x'x \in K$, $\alpha x = x\alpha \in \mathfrak{X}$, $\alpha x' = x'\alpha \in \mathfrak{X}'$, $\alpha A \in B(\mathfrak{X})$; pro $x \in \mathfrak{X}$, $x' \in \mathfrak{X}$ definujeme $xx' \in B(\mathfrak{X})$ předpisem $(xx')\, y = x(x'y)$ pro všechna $y \in \mathfrak{X}$.

Dále $A\mathbf{x} = (Ax_1, \ldots, Ax_p)$, podobně $\mathbf{x}'A$, $\alpha\mathbf{x}$, $\alpha\mathbf{x}'$.

Další součiny jsou voleny tak, aby odpovídaly běžným operacím s aritmetickými vektory a maticemi, např.

$$\mathbf{x}\mathbf{x}' = \sum_i x_i x_i' \in B(\mathfrak{X}), \quad \mathbf{x}'\mathbf{x} = \Gamma \Leftrightarrow x_i'x_j = \gamma_{ij}, \quad \mathbf{x}\Omega = \mathbf{y} \Leftrightarrow \sum_j x_j \omega_{ji} = y_i .$$

Snadno se ověří, že pokud má násobení více než dvou objektů (při některém uzávorkování) smysl, je asociativní. Rovněž jsou splněny běžné nerovnosti mezi normami, např. $\|\mathbf{x}\mathfrak{a}\| \leqq \|\mathbf{x}\|\, \|\mathfrak{a}\|$.

Věta 1. *Nechť operátor A má spektrum $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, přičemž existuje taková kružnice C o středu v počátku, že σ_1 leží vně a σ_2 uvnitř této kružnice, a invariantní podprostor prostoru $\mathfrak{X}$ příslušný k σ_1 má konečnou dimenzi p. Označme $E_1 = I - (2\pi i)^{-1} \int_C (\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda$, tj. E_1 je projektor zobrazující $\mathfrak{X}$ na zmíněný invariantní podprostor a komutující s A.*

Budiž $\mathbf{e}'$ takový, že složky $\mathbf{e}'E_1$ jsou lineárně nezávislé.

Pak existuje otevřená množina $G \subset \mathfrak{X}^p$ a bod $\mathbf{v} \in G$ tak, že

(a) $\mathbf{e}'\mathbf{v} = I$,

(b) složky $\mathbf{v}$ tvoří bázi prostoru $E_1\mathfrak{X}$,

(c) matice $\mathbf{e}'A\mathbf{v}$ má spektrum σ_1, přičemž jak dimenze invariantních podprostorů, tak řády polů $\lambda \in \sigma_1$ matice $\mathbf{e}'A\mathbf{v} = \Omega$ a operátoru A jsou stejné,

(d) pro každé $\mathbf{x}_0 \in G$ je posloupnost $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n(\mathbf{e}'A\mathbf{x}_n)^{-1}$ definována, leží celá v G a má limitu $\mathbf{v}$. Posloupnost $\Omega_n = \mathbf{e}'A\mathbf{x}_n$ má limitu Ω. Pro každé $\varepsilon > 0$ mají chyby $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{v}\|$ a $\|\Omega_n - \Omega\|$ řád $O((\alpha + \varepsilon)^n)$, kde

$$\alpha = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_2\} / \inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_1\} .$$

(Je-li $\sigma_2 = \emptyset$, píšeme 0 *místo* $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_2\}$.)

Důkaz. Podle obecných vět z [3], kap. VI a VII mají prostory $E_1\mathfrak{X}$ a $\mathfrak{X}'E_1$ dimenzi p a σ_1 se skládá z konečného počtu polů. Složky vektoru

$$\mathbf{g}' = \mathbf{e}'E_1 \tag{1}$$

tvoří podle předpokladu bázi prostoru $\mathfrak{X}'E_1$. Existuje bod $\mathbf{v}$, jehož složky tvoří bázi $E_1\mathfrak{X}$, přičemž

$$\mathbf{g}'\mathbf{v} = I\,, \quad \text{tj.} \quad g_i'v_j = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j\,, \quad g_i'v_i = 1\,, \quad i, j = 1, \ldots, p . \tag{2}$$

Pak též $\mathbf{e}'\mathbf{v} = \mathbf{e}'E_1\mathbf{v} = \mathbf{g}'\mathbf{v} = I$ a bod $\mathbf{v}$ vyhovuje tvrzením (a) a (b).

Je-li $x \in \mathfrak{X}$, existuje jediný $\mathfrak{x}$ tak, že $E_1 x = \mathbf{v}\mathfrak{x}$. Pak $\mathbf{v}\mathbf{g}'x = \mathbf{v}\mathbf{g}'E_1 x = \mathbf{v}\mathbf{g}'\mathbf{v}\mathfrak{x} = \mathbf{v}\mathfrak{x} = E_1 x$, tedy

$$\mathbf{v}\mathbf{g}' = E_1 \,. \tag{3}$$

Ještě několik vzorců, kterých budeme používat:

$$\Omega = \mathbf{e}'A\mathbf{v} = \mathbf{e}'AE_1\mathbf{v} = \mathbf{e}'E_1A\mathbf{v} = \mathbf{g}'A\mathbf{v}\,, \tag{4}$$

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v}\Omega\,, \quad \mathbf{g}'A = \Omega\mathbf{g}'\,.$$

K bodu (c): Zobrazení $\mathscr{T} : \mathbf{y} \to \mathbf{g}'\mathbf{y}$ pro $\mathbf{y} \in E_1\mathfrak{X}$ je lineární homeomorfismus $E_1\mathfrak{X}$ na K^p a $\mathscr{T}^{-1}\mathfrak{y} = \mathbf{v}\mathfrak{y}$. Výpočtem ověříme, že pro zúžení A_1 operátoru A na obor $E_1\mathfrak{X}$ platí $A_1 = \mathscr{T}^{-1}\Omega\mathscr{T}$ a podle [3], VII. 3. 20. tvrzení (c) platí.

Speciálně matice $\Omega = \mathbf{e}'A\mathbf{v}$ je regulární. Vzhledem k [3], VII. 6. 1. a ke spojitosti lineárních operací je množina $G_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{e}'A\mathbf{x}$ je regulární$\}$ otevřená v $\mathfrak{X}^p$ (a obsahuje s bodem $\mathbf{v}$ kouli $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| < \|\Omega^{-1}\|^{-1}\,\|\mathbf{e}'A\|^{-1}\}$).

V G_1 definujeme zobrazení $\mathscr{F} : \mathbf{x} \to A\mathbf{x}(\mathbf{e}'A\mathbf{x})^{-1}$; zřejmě platí $\mathscr{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Dokážeme nejprve tato lemmata:

Lemma 1. *Fréchetova derivace* ([2], 8) *zobrazení $\mathscr{F}$ v bodě $\mathbf{x} \in G_1$ je dána vzorcem*

$$\mathscr{F}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h} = (I - \mathscr{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}')\,A\mathbf{h}(\mathbf{e}'A\mathbf{x})^{-1}$$

a je spojitá v G_1. Speciálně

$$\mathscr{F}'(\mathbf{v})\,\mathbf{h} = (I - \mathbf{v}\mathbf{e}')\,A\mathbf{h}\Omega^{-1}\,. \tag{5}$$

Důkaz. Podle [2], 8.1. až 8.2. má $\mathscr{F}$ na G_1 spojitou derivaci a z rovnice

$$\mathscr{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}'A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

plyne

$$\mathscr{F}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h}\mathbf{e}'A\mathbf{x} + \mathscr{F}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}'A\mathbf{h} = A\mathbf{h}\,.$$

Odtud již odvodíme vzorec (5). QED.

Lemma 2. *Operátory $(I - \mathbf{v}\mathbf{e}')\,A$ a $(I - E_1)\,A$ mají spektrum $\sigma_2 \cup \{0\}$ a póly jednoho operátoru jsou póly druhého se stejnými řády a dimenzemi invariantních podprostorů.*

Důkaz. Podle [3], VII. 3. je $\sigma((I - E_1)\,A) = \sigma_2 \cup \{0\}$. Operátor $T = I + \mathbf{v}(\mathbf{g}' - \mathbf{e}')$ je spojitý a vzhledem k (a) a (2) je $T^{-1} = I - \mathbf{v}(\mathbf{g}' - \mathbf{e}')$. Výpočtem se přesvědčíme, že $(I - \mathbf{v}\mathbf{g}')\,A = T^{-1}(I - \mathbf{v}\mathbf{e}')\,AT$ a podle (3) jsou $(I - \mathbf{v}\mathbf{e}')\,A$ a $(I - E_1)\,A$ podobné. Odtud plyne tvrzení lemmatu 2. QED.

Lemma 3. *Pro matici Φ a operátor $B \in B(\mathfrak{X})$ definujme zobrazení $\mathscr{S} : \mathbf{x} \to B\mathbf{x}\Phi$* ($\mathscr{S} \in B(\mathfrak{X}^p)$).

Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (nikoli nutně různá) všechna vlastní čísla matice Φ, pak $\sigma(\mathscr{S}) = \bigcup_j (\lambda_j \sigma(B))$ a tedy pro spektrální poloměry platí

$$r(\mathscr{S}) = r(\Phi)\, r(B)\,. \tag{6}$$

Důkaz. K matici Φ existuje regulární matice Γ taková, že $\Gamma\Phi\Gamma^{-1} = \Lambda + \Theta$, kde Λ je diagonální (s diagonálními prvky $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$), $\Lambda\Theta = \Theta\Lambda$ a $\Theta^p = 0$ (plyne z existence Jordanova normálního tvaru).

Vyšetříme existenci a spojitost operátoru $(\lambda I - \mathscr{S})^{-1}$. Rovnice

$$\lambda \mathbf{y} - \mathscr{S}\mathbf{y} = \mathbf{u}$$

je ekvivalentní rovnici

$$\lambda \mathbf{y}\Gamma^{-1} - B\mathbf{y}\Gamma^{-1}(\Lambda + \Theta) = \mathbf{u}\Gamma^{-1}$$

a píšeme-li $\mathbf{y} = \mathbf{x}\Gamma$, $\mathbf{u} = \mathbf{w}\Gamma$, též rovnici

$$\lambda \mathbf{x} - B\mathbf{x}\Lambda - B\mathbf{x}\Theta = \mathbf{w}\,. \tag{*}$$

Definujme $\mathscr{L}\mathbf{x} = B\mathbf{x}\Lambda$, $\mathscr{N}\mathbf{x} = B\mathbf{x}\Theta$. Výpočtem zjistíme, že $\mathscr{L}\mathscr{N} = \mathscr{N}\mathscr{L}$, $\mathscr{N}^p = 0$. Existuje-li omezený $(\lambda I - \mathscr{L})^{-1}$, pak $(\lambda I - \mathscr{L} - \mathscr{N})^{-1} = (\lambda I - \mathscr{L})^{-1}(I - (\lambda I - \mathscr{L})^{-1}\mathscr{N})^{-1}$ a existuje-li omezený $(\lambda I - \mathscr{L} - \mathscr{N})^{-1}$, pak

$$(\lambda I - \mathscr{L})^{-1} = (\lambda I - \mathscr{L} - \mathscr{N})^{-1}(I + (\lambda I - \mathscr{L} - \mathscr{N})^{-1}\mathscr{N})^{-1}$$

(činitele na pravých stranách jsou omezené, neboť $\mathscr{N}^p = 0$). Řešení $\mathbf{x}$ rovnice (*) je jediné a závisí spojitě na $\mathbf{w}$ právě tehdy, když týž výrok platí pro rovnici

$$\lambda \mathbf{x} - B\mathbf{x}\Lambda = \mathbf{w}\,,$$

rozepsáno do složek

$$(\lambda I - \lambda_i B)\, x_i = w_i$$

a to nastane právě tehdy, když λ nepatří do žádné množiny tvaru $\lambda_j \sigma(B)$ $(j = 1, \ldots, p)$. Odtud plyne tvrzení lemmatu 3. QED.

Lemma 4. *Je-li spektrální poloměr operátoru $P \in B(\mathfrak{Z})$ ($\mathfrak{Z}$ je libovolný Banachův prostor s normou $\|.\|$) roven ϱ, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje norma $\|.\|_1$ ekvivalentní s $\|.\|$ tak, že $\|P\|_1 \leqq \varrho + \varepsilon$.*

Důkaz je uveden v [4], str. 91.

Dokončení důkazu věty 1. Podle tvrzení (c) je spektrální poloměr $r(\Omega^{-1})$ roven $\sup\{|\lambda^{-1}| : \lambda \in \sigma_1\} = (\inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_1\})^{-1}$, $r((I - \mathbf{ve}')\,A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_2\}$ dle lemmatu 2. Z lemmat 1 a 3 plyne, že

$$r(\mathscr{F}'(\mathbf{v})) = r(\Omega^{-1})\, r((I - \mathbf{ve}')\,A) = \alpha < 1\,.$$

Nechť $\varepsilon > 0$, $\alpha + \varepsilon < 1$. Podle lemmatu 4 existuje v $\mathfrak{X}^p$ norma $\|.\|_1$ ekvivalentní s $\|.\|$ tak, že $\|\mathscr{F}'(\mathbf{v})\|_1 < \alpha + \varepsilon/2$ a ze spojitosti $\mathscr{F}'$ v bodě $\mathbf{v}$ plyne existence konvexní otevřené množiny $G \subset G_1(\mathbf{v} \in G)$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in G$ je $\|\mathscr{F}'(\mathbf{x})\|_1 \leqq \alpha + \varepsilon$.

Užitím věty o střední hodnotě ([2], 8.5.4) dostáváme odhad

$$\|\mathscr{F}(\mathbf{x}) - \mathscr{F}(\mathbf{y})\|_1 \leqq (\alpha + \varepsilon) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$$

pro všechna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in G$. Protože $\mathscr{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, můžeme G vybrat tak, že $\mathscr{F}(G) \subset G$ a podle věty o pevném bodě platí tvrzení (d) věty 1. QED.

Poznámka 1. Podobnou (duální) větu může vyslovit o metodě výpočtu báze $\mathbf{g}'$ podprostoru $\mathfrak{X}'E_1$.

Poznámka 2. Přísluší-li vlastnímu číslu λ matice Ω aritmetický vlastní vektor $\mathfrak{x}$, tj. $\Omega\mathfrak{x} = \lambda\mathfrak{x}$, pak $x = \mathbf{v}\mathfrak{x}$ je vlastní vektor operátoru A, příslušný k λ, neboť podle (4) je $Ax = A\mathbf{v}\mathfrak{x} = \mathbf{v}\Omega\mathfrak{x} = \lambda\mathbf{v}\mathfrak{x} = \lambda x$. Stejnou úvahu můžeme provést pro vektory anulující operátor $(\lambda I - A)^m$, $m > 1$ (tzv. kořenové vektory větších výšek, viz [1], čl. 7).

Poznámka 3. Projektor E_1 (nebo aspoň vektor $\mathbf{z}$, jehož složky tvoří bázi $E_1\mathfrak{X}$) obvykle předem neznáme a nemůžeme tedy bezprostředně ověřit, zda složky $\mathbf{e}'E_1$ jsou lineárně nezávislé (nebo zda $\mathbf{e}'\mathbf{z}$ je regulární matice). K nevhodnému výběru $\mathbf{e}'$ však dojde málokdy, jak ukazuje následující věta.

Věta 2. *Nechť složky $\mathbf{z}$ jsou lineárně nezávislé. Pak množina M těch $\mathbf{e}'$, pro něž $\mathbf{e}'\mathbf{z}$ je regulární, je otevřená a hustá v $\mathfrak{X}'^p$.*

Důkaz. 1. Nechť $\Gamma = \mathbf{e}'\mathbf{z}$ je regulární. Pak pro všechna $\mathbf{f}'$ taková, že

$$\|\mathbf{f}' - \mathbf{e}'\| < \|\mathbf{z}\|^{-1} \|\Gamma^{-1}\|^{-1},$$

platí $\|\Gamma - \mathbf{f}'\mathbf{z}\| < \|\Gamma^{-1}\|^{-1}$ a podle [3], VII. 6. 1. je $\mathbf{f}'\mathbf{z}$ regulární a tedy M je otevřená v $\mathfrak{X}'^p$.

2. Je-li $\Gamma = \mathbf{e}'\mathbf{z}$ singulární, pak lze najít regulární matici Ψ takovou, že $\Delta = \Psi\Gamma\Psi^{-1}$ je horní trojúhelníková matice s aspoň jedním nulovým diagonálním prvkem. Dále existuje $\mathbf{f}'$ tak, že $\mathbf{f}'\mathbf{z} = I$ (plyne z Hahn-Banachovy věty). Budiž dáno $\varepsilon > 0$, pak pro vhodné τ, kde $|\tau| < \varepsilon$, je $\Delta + \tau I = \Psi(\mathbf{e}' + \tau\mathbf{f}')\,\mathbf{z}\Psi^{-1}$ regulární matice (spektrum Δ je totiž konečná množina) a tedy $\mathbf{e}' + \tau\mathbf{f}' \in M$. Z toho a z otevřenosti M plyne, že M je hustá v $\mathfrak{X}'^p$. QED.

Poznámka 4. Metoda popsaná větou 1 má název „plně stabilizovaná vícestupňová metoda". Stabilizace spočívá v tom, že od druhého kroku stále platí $\mathbf{e}'\mathbf{x}_n = I$. Při realizaci tohoto algoritmu však není třeba v každém kroku invertovat matici $\mathbf{e}'A\mathbf{x}_n$. Vyplývá to z následující úvahy. Pišme $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, jestliže existuje regulární matice Γ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{y}\Gamma$. Vztah $\sim$ je zřejmě ekvivalencí a z $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in G_1$ plyne $\mathbf{y} \in G_1$ a $\mathscr{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{y}\Gamma(\mathbf{e}'A\mathbf{y}\Gamma)^{-1} = \mathscr{F}(\mathbf{y})$. Je-li $\mathbf{x}_0 \in G$, pak $\mathscr{F}(\mathbf{x}_0) \sim A\mathbf{x}_0$ a indukcí

$x_{n+k} \sim A^k \mathbf{x}_n$, tedy při výpočtu $\mathbf{x}_{n+k+1}$ je možno místo z vektoru $\mathbf{x}_{n+k}$ vycházet z vektoru $A^k \mathbf{x}_n$.

Je však jeden důvod, pro který nelze volit číslo k příliš velké. Je-li $\mathbf{x}$ blízké $\mathbf{v}$, je matice $\mathbf{e}'A\mathbf{x}$ blízká Ω, jejíž spektrální (Toddovo) číslo podmíněnosti je $\max \{|\lambda| : : \lambda \in \sigma_1\}/\min \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_1\} = \varrho$. Číslo podmíněnosti matice $\mathbf{e}'A^k\mathbf{x}_n$ je tedy blízké ϱ^k, takže až na výjimečné případy se přesnost invertování zhoršuje. Proces lze částečně stabilizovat, jsou-li již Ω_n navzájem blízké: po několik kroků podržíme touž matici $\Omega_{n(0)}^{-1} = \Pi$ a klademe $\overline{\mathbf{x}}_{n+1} = A\overline{\mathbf{x}}_n \Pi$.

Tato úvaha rovněž ukazuje, že vícestupňová metoda je zvláště vhodná v případě, kdy body σ_1 mají absolutní hodnoty sobě rovné nebo blízké.

Poznámka 5. Je-li množina σ_1 oddělena od σ_2 málo výrazně (tj. číslo α je jen o málo menší než 1) nebo její poloha je jinak nepříznivá pro výpočet, může být výhodné provádět iterace s operátorem $f(A)$ místo s operátorem A. Zde f značí funkci analytickou v okolí $\sigma(A)$ (viz [3], VII. 3.); speciálně f může být polynom.

Příklad. Nechť víme, že σ_2 je částí úsečky $\langle \beta, \gamma \rangle$ na reálné ose. Pak za f můžeme volit některý z Čebyševových polynomů příslušných k této úsečce.

Poznámka 6. Známe-li vektor (vlastně soustavu vektorů) $\mathbf{v}$ a $\mathbf{g}'$, můžeme zkonstruovat operátor $(I - E_1) A = A - \mathbf{v}\Omega\mathbf{g}'$, jehož spektrum je $\sigma(A) \cup \{0\} - \sigma_1$ a tím zpřístupnit body σ_2 dalšímu výpočtu. To je podstata tzv. exhaustní metody ([1], čl. 59). Záleží-li nám jen na bodech σ_2 (a ne na příslušných vlastních vektorech), můžeme podle lemmatu 2 použít k témuž účelu operátoru $(I - \mathbf{v}\mathbf{e}') A$ (nebo, podle [2], 11.1. cvič. 2, operátoru $A - \mathbf{v}\Omega\mathbf{e}'$). Tím se ušetří zhruba polovina výpočtové práce.

Závěr. Třída operátorů, které vyhovují předpokladům věty 1, obsahuje podle [3], VII. 4.6. mimo jiné všechny kompaktní operátory nebo operátory, jejichž některá celá kladná mocnina je kompaktní (pokud ovšem mají nenulová vlastní čísla). Příklad z poznámky 5 se týkal hlavně samoadjungovaných kompaktních operátorů v Hilbertově prostoru.

Literatura

[1] *D. K. Fadďějev, V. N. Fadďějeva:* Numerické metody lineární algebry (přeloženo z ruštiny). Praha 1964.

[2] *Ж. Дьедонне:* Основы современного анализа (перев. с английского). Москва 1964.

[3] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц:* Линейные операторы, общая теория (перев. с английского). Москва 1964.

[4] *М. А. Красносельский:* Положительные решения операторных уравнений. Москва 1962.

Резюме

РЕШЕНИЕ ЧАСТИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА СТУПЕНЧАТЫМ СТЕПЕННЫМ МЕТОДОМ

ЗДИСЛАВ КОВАРЖИК (ZDISLAV KOVÁŘÍK)

Ступенчатый степенный метод, известный в алгебре матриц, естественно обобщается для оператора A специального типа в пространстве Банаха. Выбирая систему линейных функционалов $e'_1, \ldots, e'_p$ и систему векторов $x_1^{(0)}, \ldots, \ldots, x_p^{(0)}$, мы составим матрицу $(e'Ax^{(0)}) = \Omega^{(0)}$ и обратную к ней матрицу $(\Omega^{(0)})^{-1} = ((\psi_{ij}^{(0)})$ и потом положим $x_i^{(1)} = \sum_j Ax_i^{(0)}\psi_{ji}^{(0)}$. Таким же образом построим $x_i^{(2)}$ и т. д.

Если спектр оператора A обладает доминирующей по модулю частью σ_1, инвариантное многообразие которой имеет размерность p, то (при надлежащем выборе e'_i и $x_i^{(0)}$) последовательности $x_i^{(k)}$ имеют при $k \to \infty$ пределы v_i, которые образуют базис этого многообразия, и спектр матрицы (e'_iAv_j) совпадает с σ_1.

Преобразование, образующее $x_i^{(k+1)}$ из $x_i^{(k)}$, оказывается сжатым в определенной метрике. Даются также асимптотические оценки скорости сходимости.

Если известны v_i и g'_i (т. е. базис двойственного инвариантного многообразия, принадлежащего к σ_1) такие, что $g'_iv_j = 0$ при $i \neq j$, и $g'_iv_i = 1$, то оператор A_1: $z \to Az - \sum_k v_k(g'_kAz)$ имеет спектр $\sigma(A) \cup \{0\} - \sigma_1$. Оказывается, что тот же спектр имеет оператор B: $z \to Az - \sum_k v_k(e'_kAz)$. Этим значительно упрощается метод исчерпывания.

Summary

ON SOLVING PARTIAL EIGENPROBLEMS IN A BANACH SPACE BY GRADUAL POWER METHOD

ZDISLAV KOVÁŘÍK

The "gradual power method" well known in matrix algebra can be naturally generalized in the following way to apply for an operator A of special type in a Banach space. Choosing a system of linear functionals $e'_1, \ldots, e'_p$ and a system of vectors $x_1^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)}$ we construct first the matrix $(e'_iAx_j^{(0)})$, then the inverse $(e'_iAx_j^{(0)})^{-1} =$

$= (\Omega^{(0)})^{-1} = (\psi_{ij}^{(0)})$ and afterwards $x_i^{(1)} = \sum_j A x_j^{(0)} \psi_{ji}^{(0)}$. Similarly we construct $x_i^{(2)}$ etc.

If the spectrum of A has a finite dominant part σ_1 with a p-dimensional invariant subspace, then (after a convenient choice of e_i' and $x_i^{(0)}$) the sequences $x_i^{(k)}$ have for $k \to \infty$ limits v_i which form a basis of the mentioned subspace and the spectrum of the matrix $(e_i' A v_j)$ is σ_1.

The mapping transforming $x_i^{(k)}$ to $x_i^{(k+1)}$ can be shown to be contractive in a certain metric. Asymptotic estimates of the rate of convergence are also given.

If we know both v_i and g_i' (i.e. the basis of the dual invariant subspace belonging to σ_1) such that $g_i' v_j = 0$ for $i \neq j$ and $g_i' v_i = 1$ we can construct the operator $A_1 : z \to Az - \sum_k v_k (g_k' A z)$ whose spectrum is $\sigma(A) \cup \{0\} - \sigma_1$. In this paper it is shown that the operator B: $z \to Az - \sum_k v_k (e_k' A z)$ has the same spectrum as A_1 (i.e. the so-called exhaustive method is simplified).

Adresa autora: Zdislav Kovářík, Universita P. J. Šafárika, nám. Februárového víťazstva 9, Košice.