Bohuslava Haňková

Řešení některých integrálních rovnic prvního druhu. II

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 2, 119–122

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103077`

ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO DRUHU (II)

BOHUSLAVA HAŇKOVÁ

(Došlo dne 7. června 1966.)

Řešení některých problémů z teorie pružnosti a hlavně z teorie desek se dá převést ([3], [4], [5], [6]) na řešení integrálních rovnic prvního druhu tvaru

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n} y(s) \,\mathrm{d}s = \text{konst.} f(x), \quad 0 < x,\ s < a < \pi. \tag{1}$$

Jádro $\mathrm{K}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx \sin ns)/n$ je funkce integrovatelná s druhou mocninou, $\mathrm{K} \in L_2$, proto rovnice (1) není obecně řešitelná v prostoru funkcí z L_2 pro libovolnou funkci na pravé straně $f(x) \in L_2$.

Uvažujme nejdříve rovnici ([1])

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n} y(s) \,\mathrm{d}s = f(x), \quad 0 < x, \quad s < \pi, \tag{2}$$

tedy speciální případ rovnice (1) pro $a = \pi$. V tomto případě řešení v uzavřeném tvaru můžeme určit následujícím způsobem: Rovnici (2) násobíme systémem funkcí $\sin nx$, $(n = 1, 2, \ldots)$, a integrujeme podle x. Protože platí rovnosti

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n} = \frac{1}{\pi} \log \frac{1 - \cos (s + x)}{1 - \cos (s - x)},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \frac{1 - \cos (s + x)}{1 - \cos (s - x)} \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin ns}{n},$$

bude

$$\int_0^\pi \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \frac{1 - \cos (s + x)}{1 - \cos (s - x)} \sin nx \,\mathrm{d}x \right] y(s) \,\mathrm{d}s = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin ns \, y(s) \,\mathrm{d}s .$$

Označíme-li

$$\int_0^\pi \sin ns \, y(s) \,\mathrm{d}s = y_n, \quad \int_0^\pi \sin nx \, f(x) \,\mathrm{d}x = f_n,$$

dostaneme uvedenými úpravami z rovnice (2) rovnost $y_n = nf_n$. Podmínkou existence řešení rovnice (2) tedy je, aby konvergovala řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|f_n|^2$. Označme dále jako $g(x)$ funkci s Fourierovými cosinovými koeficienty nf_n. Řešení rovnice (2) bude tvaru

$$y(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin s\, g(x)}{\cos x - \cos s}\, dx ,$$

protože platí

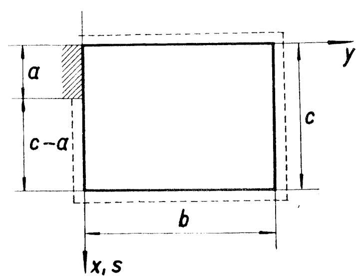
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{\cos x - \cos s}\, dx = \frac{\sin ns}{\sin s}$$

a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin s}{\cos x - \cos s}\sum_{n=1}^{\infty} nf_n \cos nx\right) dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} nf_n \pi \frac{\sin ns}{\sin s} \sin s =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nf_n \sin ns .$$

Řešení rovnice (2) se dá najít i jinými způsoby ([2], [7], [8]). Pokud integrační meze jsou od nuly od π, řešení všemi způsoby je vždy poměrně jednoduché vzhledem k tomu, že soustava funkcí $\sqrt{(2/\pi)} \sin nx$, $(n = 1, 2, \ldots)$, vyskytující se v jádře rovnice (2), tvoří v intervalu $(0, \pi)$ úplný ortonormální systém. Přitom rovnice (2) byla sestavena pro případ řešení průhybu desky s podmínkami po celé délce stran stejnými, např. desky prostě podepřené po celém svém obvodu, kdežto rovnice (1) odpovídá případu desky s podmínkami podél jedné hrany smíšenými, např. deska je prostě podepřená na hranách $x = 0$, $x = c$, $y = b$, na hraně $y = 0$ je deska na části $(0, a)$ dokonale vetknutá a na části (a, c) téže hrany je deska prostě podepřená. (Obr. 1.) Důkaz existence řešení rovnice (1) týkající se tedy problému se smíšenými okrajovými podmínkami je značně složitější. Řešení tohoto problému pomocí Schmidtova ortogonalizačního procesu a tvar funkce, která je řešením těchto rovnic s uvedeným jádrem a několika různými funkcemi $f(x)$ na pravé straně, tak jak vznikly z různých fyzikálních problémů, byl uveden v článku [8]. Tento článek ho doplňuje důkazem unicity řešení.



Obr. 1.

Věta. *Má-li rovnice* (1) *řešení* $y(s) \in L_2(0, a)$, $0 < a < \pi$, *pak jest toto řešení jediné.*

Důkaz: Stačí dokázat, že příslušná rovnice homogenní

$$(3) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n}\, y(s)\, ds = 0 , \quad 0 < x , \quad s < a$$

má pouze triviální řešení $y(s) \equiv 0$. Funkci $y(s)$, $s \in (0, a)$, $a < \pi$, rozšíříme na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ takto:

$$y(s) = 0 \quad \text{pro} \quad a < s \leqq \pi\,, \tag{4}$$
$$y(s) = -y(-s) \quad \text{pro} \quad -\pi \leqq s < 0\,.$$

Položme

$$\lambda(r, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi r^n}{n} y_n\,,$$

kde

$$y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin ns\, y(s)\, ds\,.$$

Funkce $\lambda(r, \varphi)$ je harmonická v jednotkovém kruhu a pro její Dirichletův integrál platí

$$\int_K \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right)^2 \right] dK < \infty\,. \tag{5}$$

Pro $r = 1$ dostaneme

$$\lambda(1, \varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} \int_0^{\pi} \sin ns\, y(s)\, ds\,.$$

Protože podle (4) je $y(s) = 0$ pro $a < s \leqq \pi$, bude

$$\lambda(1, \varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi \sin ns}{n} y(s)\, ds$$

a tedy podle (3)

$$\lambda(1, \varphi) = 0 \quad \text{pro} \quad -a < \varphi < a\,. \tag{6}$$

Derivace

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r}(1, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\varphi\, y_n$$

je Fourierova řada vyjadřující funkci $y(s)$ definovanou rovnicemi (4), proto bude

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r}(1, \varphi) = 0 \quad \text{pro} \quad -\pi < \varphi < -a\,, \quad a < \varphi < \pi\,. \tag{7}$$

V důsledku jednoznačnosti řešení smíšeného problému definovaného podmínkami (6) a (7) pro harmonickou funkci $\lambda(r, \varphi)$ za předpokladu (5) musí být $\lambda(r, \varphi) \equiv 0$ a tedy také $y(s) \equiv 0$.

Literatura

[1] *W. Schmeidler:* Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig 1950.

[2] *K. Girkmann:* Flächentragwerke. Wien 1946.

[3] *W. Nowacki:* Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych I, II. Arch. mech. stos. 1951, 1953.

[4] *W. Nowacki:* O pewnych przypadkach skręcania prętów. Arch. mech. stos. 8, 1953.

[5] *W. Nowacki:* Naprężenia montażowe w ptytach. Arch. mech. stos. 2, 1956.
[6] *W. Nowacki:* Zagadnienia dynamiki i stateczności płyty prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych. Arch. mech. stos. 2, 1955.
[7] *S. Kaliski, W. Nowacki:* Some Problems of Structural Analysis of Plates with Mixed Boundary Conditions. Arch. mech. stos. 4, 1956.
[8] *B. Haňková:* Řešení některých integrálních rovnic prvního druhu (I). Aplikace matematiky 11 (1966), 385–398.

Резюме

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ОГО РОДА (II)

БОГУСЛАВА ГАНЬКОВА (BOHUSLAVA HAŇKOVÁ)

Интегральное уравнение

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n} y(s) \, \mathrm{d}s = \text{konst.} f(x) \,, \quad 0 < x \,, \quad s < a \,,$$

решено для специального случая $a = \pi$; решение было найдено в конечном виде. Уравнение было составлено для решения прогиба плиты с однородными краевыми условиями. Для $0 < a < \pi$ это задача с разрывными краевыми условиями. Существование решения этого уравнения было доказано в докладе [8]. В предложенной работе доказывается единственность решения этого уравнения при помощи единственности решения смешанной проблемы для гармонической функции.

Zusammenfassung

LÖSUNG EINIGER INTEGRALGLEICHUNGEN ERSTER ART (II)

BOHUSLAVA HAŇKOVÁ

In dem Artikel wird die Integralgleichung

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ns}{n} y(s) \, \mathrm{d}s = \text{konst.} f(x) \,, \quad 0 < x \,, \quad s < a$$

für den Fall $a = \pi$ gelöst; die Lösungengsfunktion wird in geschlossener Form gefunden. In diesem Falle wurde die Gleichung für die Lösung der Durchbiegung der Platte mit homogenen Randbedingungen aufgestellt. Wenn $0 < a < \pi$ ist, dann handelt es sich um ein Problem mit gemischten Randbedingungen. Die Existenz der Lösung dieser Gleichung wurde in dem Artikel [8] bewiesen. In diesem Artikel ist die Eindeutigkeit der Lösung dieser Integralgleichung mittels der Eindeutigkeit der Lösung des gemischten Problems für die harmonische Funktion bewiesen.

Adresa autorky: C.Sc. *Bohuslava Haňková*, Katedra matematiky a deskr. geom. SF ČVUT, Trojanova 13, Praha 2.