Aplikace matematiky

Ivo Babuška

O regularisaci optimální formule pro výpočet Fourierových koeficientů

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 2, 101–106

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103075

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

O REGULARISACI OPTIMÁLNÍ FORMULE PRO VÝPOČET FOURIEROVÝCH KOEFICIENTŮ

IVO BABUŠKA

(Došlo dne 26. května 1966.)

1. ÚVOD

V práci [1] jsme se zabývali problematikou numerického výpočtu integrálu

$$J_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ipx}\, \mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

p celé.
Došli jsme v [1] k závěru, že nejúčelnější je užívat tzv. universální formuli, totiž pokládat

$$J_p(f) \approx \frac{1}{j}\sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) e^{2\pi l/j}\,. \tag{2}$$

V [2] zabývali jsme se problematikou optimálního výpočtu funkcionálu, když musíme počítat s tím, že funkci, pro niž máme vyčíslit funkcionál, neznáme přesně. Myšlenky uvedené v [2] budeme aplikovat pro případ analýzy optimálního numerického výpočtu integrálu (1) pokud umíme vyčíslovat funkční hodnoty $f(2\pi l/j)$ pouze s jistou přesností.

2. FORMULACE PROBLÉMU

Označme (srv. [1]) $\mathscr{H}$ prostor všech reálných posloupností $\gamma \equiv (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ splňující tyto vlastnosti:

1. $\gamma_j \geqq 0$, $\gamma_0 > 0$, $j = 1, 2, \ldots$
2. Existuje $j_0 > 0$ tak, že $\gamma_{j_0} \neq 0$ (j_0 obecně závisí na γ).
3. $\lim\limits_{j\to\infty} \sqrt[j]{\gamma_j} = 0$.

Každé posloupnosti γ přiřaďme celistvou funkci

$$\Psi_\gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j z^j\,.$$

Buď $\gamma \in \mathscr{H}$. Označme H_γ Hilbertův prostor všech spojitých komplexních 2π-periodických funkcí $g(x)$ se skalárním součinem

$$(g, h)_\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \int_0^{2\pi} g^{(j)}(x)\, \bar{h}^{(j)}(x)\, \mathrm{d}x$$

a

$$\|g\|_\gamma^2 = (g, g)_\gamma .$$

Označme

$$I(p, j, a_1, \ldots, a_j)(f) = \sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) a_j . \tag{3}$$

Buď dáno $\gamma \in \mathscr{H}$ a $\gamma_0 \in \mathscr{H}$ a $\vartheta > 0$ a označme

$$\begin{aligned}\Phi^2(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) = \inf_{a_1,\ldots,a_j} \Big[\Big(\sup_{\substack{\|g\|_\gamma \leqq 1\\ g\in H_\gamma}} \big|I_p(g) - I(p, j, a_1, \ldots, a_j)(g)\big|\Big)^2 + \\ + \Big(\sup_{\substack{\|h\|_{\gamma_0} \leqq \vartheta\\ h\in H_\gamma}} \big|I(p, j, a_1, \ldots, a_j)(h)\big|\Big)^2\Big] = \\ \inf_{a_1,\ldots,a_j} \big[\big(\|J_p - I(p, j, a_1, \ldots, a_j)\|_\gamma\big)^2 + \\ + \vartheta^2\big(\|I(p, j, a_1, \ldots, a_j)\|_{\gamma_0}\big)^2\big] \text{ *)} .\end{aligned}$$

Buď dána posloupnost koeficientů $a_l^{(j)}$, $l = 1, \ldots, j$; $j = 1, \ldots$ a $\vartheta_0 > 0$. Tuto posloupnost nazveme ϑ_0-optimální resp. asymptoticky ϑ_0-optimální, resp. ϑ_0-řádově optimální, jestliže

$$\begin{aligned}\varrho^2(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)}, \gamma, \gamma_0, \vartheta_0) = \Big(\sup_{\substack{\|g\|_\gamma \leqq 1\\ g\in H_\gamma}} \big|I_p(g) - I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})(g)\big|\Big)^2 + \\ + \Big(\sup_{\substack{\|h\|_{\gamma_0} \leqq \vartheta_0\\ h\in H_{\gamma_0}}} \big|I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\big|\Big)^2\end{aligned}$$

a

$$\varrho^2(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)}, \gamma, \gamma_0, \vartheta_0) = \Phi^2(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta_0) ,$$

resp.

$$\limsup_{\substack{j\to\infty\\ 0\leqq\vartheta<\vartheta_0}} \frac{\varrho^2(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)}, \gamma, \gamma_0, \vartheta)}{\Phi^2(p, j_1, \gamma, \gamma_0, \vartheta)} = 1 ,$$

resp.

$$\limsup_{\substack{j\to\infty\\ 0\leqq\vartheta<\vartheta_0}} \frac{\varrho^2(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)}, \gamma, \gamma_0, \vartheta)}{\Phi^2(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta)} \leqq C(\vartheta_0) .$$

*) Normy jsou zde míněny jako normy funkcionálů.

Naší úlohou bude analysa ϑ_0-optimálních a ϑ_0-asymptoticky a řádově optimálních formulí. V [1] jsme provedli tuto analysu pro $\vartheta_0 = 0$.

3.0 ϑ-OPTIMÁLNÍ FORMULI

V [2] jsme ukázali, že při analyse ϑ-optimálních aproximací můžeme postupovat tak, že zavedeme prostor

$$H_{\gamma,\gamma_0,\vartheta} = H_\gamma \times H_{\gamma_0}$$

se skalárním součinem

$$\mathbf{u} = (u_1, v_1) \in H_{\gamma,\gamma_0,\vartheta}\,, \quad \mathbf{v} = (u_2, v_2) \in H_{\gamma,\gamma_0,\vartheta}\,,$$
$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}_\vartheta = (u_1, v_1)_\gamma + \vartheta^{-2}(u_2, v_2)_{\gamma_0}$$
$$\langle\langle \mathbf{u} \rangle\rangle_\vartheta^2 = \{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}_\vartheta\,,$$

a položíme

$$\tilde{J}_p \in H^*_{\gamma,\gamma_0,\vartheta}\,, \quad \tilde{J}_p(\mathbf{u}) = J_p(u_1)\,,$$
$$\tilde{I}(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})(\mathbf{u}) = I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})(u_1) +$$
$$+ I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})(v_1)\,;$$

problém ϑ-optimální formule je problém nalezení takových ${}^\vartheta a_k^{(j)}$, aby

$$\langle\langle \tilde{J}_p - \tilde{I}(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\rangle\rangle_\vartheta^2$$

bylo minimální. Přitom je

$$\varrho^2(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)}, \gamma, \gamma_0, \vartheta) = \langle\langle \tilde{J}_p - \tilde{I}(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\rangle\rangle_\vartheta^2.$$

Dokážeme nyní následující tvrzení:

Věta 1.. *Buď dáno přirozené p a j, $\vartheta > 0$ a $\gamma \in \mathscr{H}$ a $\gamma_0 \in \mathscr{H}$. Potom položíme-li*

$$(4) \qquad {}^\vartheta a_l^{(j)} = \frac{1}{j}\, C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta)\, e^{ip(2\pi/j)l}\,,$$

kde

$$(5) \qquad \frac{1}{C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta)} = \Psi_\gamma(p^2)\left[\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Psi_\gamma((tj - p)^2)} + \vartheta^2 \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Psi_{\gamma_0}((tj - p)^2)}\right],$$

dostaneme, že funkcionál $I(p, j, {}^\vartheta a_1^{(j)}, \ldots, {}^\vartheta a_j^{(j)})$ je ϑ-optimální, přičemž tento ϑ-optimální funkcionál je určen jednoznačně.

Dále pak

$$(6) \qquad \Phi(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{[\Psi_\gamma(p^2)]}}\, Q(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta)\,,$$

kde

$$Q(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} (1 - C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta))^{1/2}.$$

Důkaz. 1) Předně úplně stejně jako v [1] se snadno přesvědčíme, že jest

$$\tilde{J}_p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \mathbf{u}, \left(e^{-ipx} \frac{1}{\Psi_\gamma(p^2)}, 0 \right) \right\}_\vartheta.$$

2) Platí dále

$$\tilde{I}(p, j, {}^\vartheta a_1^{(j)}, \ldots, {}^\vartheta a_j^{(j)}) (\mathbf{u}) = \frac{1}{2\pi} C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) \left\{ \mathbf{u}, \left(\sum_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(tj-p)x} \frac{1}{\Psi_\gamma((tj - p)^2)}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \vartheta^2 \sum_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(tj-p)x} \frac{1}{\Psi_{\gamma_0}((tj - p)^2)} \right) \right\}_\vartheta.$$

3) Poněvadž $H_{\gamma,\gamma_0,\vartheta}$ je Hilbertův prostor, je ϑ-optimální formule projekce na příslušný podprostor. Označíme-li

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \left(e^{-ipx} \frac{1}{\Psi_\gamma(p^2)} - C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) \sum_{t=-\infty}^{+\infty} e^{i(tj-p)x} \frac{1}{\Psi_\gamma((tj - p)^2)}, \right.$$

$$\left. - C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) \vartheta^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{i(tj-p)x} \frac{1}{\Psi_\gamma((tj - p)^2)} \right),$$

pak stačí ukázat, že

$$\omega_1 \left(\frac{2\pi}{j} l \right) + \omega_2 \left(\frac{2\pi}{j} l \right) = 0, \quad l = 1, \ldots, j.$$

Je však

$$\omega_1 \left(\frac{2\pi}{j} l \right) + \omega_2 \left(\frac{2\pi}{j} l \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ip(2\pi/j)}}{\Psi_\gamma(p^2)} \left[1 - C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) \Psi_\gamma(p^2) \, . \right.$$

$$\left. \cdot \left(\sum_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Psi_\gamma((tj - p)^2)} + \vartheta^2 \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Psi_{\gamma 0}((tj - p)^2)} \right) \right].$$

Tím je však dokázána prvá část naší věty. Druhá část plyne okamžitě z toho, že

$$\Phi(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) = \langle\langle \omega \rangle\rangle_\gamma.$$

4. O ASYMPTOTICKY λ,ϑ-OPTIMÁLNÍ FORMULI

V tomto odstavci se budeme zabývat obdobnou problematikou jako v [1]. Označme $\mathscr{H}_{p,\lambda}$ podprostor prostoru $\mathscr{H}$ všech takových posloupností γ, že

$$\Psi_\gamma(p^2) = \lambda.$$

Obdobně jako v [1] nazveme formuli $I_p(p, j, {}^u a_1^{(j)}, \ldots, {}^u a_j^{(j)})$ λ,ϑ-universální, jestliže bude

$$ {}^u a_l^{(j)} = e^{i(p/j)2\pi l}\, C, \quad l = 1, \ldots, j\,, \quad C = \frac{1}{1 + \vartheta^2 \lambda}\,. $$

Obdobně jako v [1] se snadno přesvědčíme, že

$$ \frac{\varrho^2(p, j, {}^u a_1^{(j)}, \ldots, {}^u a_j^{(j)}, \gamma, \gamma_0, \vartheta)}{\Phi^2(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta)} = 1 + \frac{(C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta) - C)^2}{C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta)\,(1 - C(p, j, \gamma, \gamma_0, \vartheta))}\,. \tag{7} $$

Z toho však bezprostředně plyne následující věta:

Věta 2. *Buď $\gamma \in \mathscr{H}_{p,\lambda}$, $\gamma_0 \in \mathscr{H}_{p,1}$, potom λ,ϑ-universální formule je asymptoticky ϑ-optimální.*

5. ZÁVĚR

Srovnejme nyní výsledky, ke kterým jsme dospěli v [1] a v tomto pojednání.

V případě, že $\vartheta = 0$, tj. za předpokladu přesného výpočtu, dospěli jsme v [1] k závěru, že je nejvhodnější užívat tzv. universální formuli, tj. užívat lichoběžníkovou formuli (pokládáme $C = 1$), i když pro každý konkrétní prostor H_γ je optimální $C < 1$. Počítáme-li s poruchami universální formule dostáváme $C < 1$ v závislosti na $p, \gamma, \gamma_0, \vartheta$.

Literatura

[1] *I. Babuška*: Über die optimale Berechnung der Fourier'schen Koeffizienten. Apl. Mat. 11 (1966), 113—123.

[2] *I. Babuška*: Об оптимальной регуляризации метод суммирования ряда фурье. Apl. Mat. 11 (1966), 333—340.

Резюме

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška)

Работа занимается вопросом оптимального вычисления функционала (1) при предположении, что у нас только значения функции f в точках равномерной сетки. При этом предполагается, что известны только значения функции f с некоторыми помехами, точнее, что известны только значения функции $f + g$ и о g знаем только то, что это малая функция.

Zusammenfassung

ÜBER DIE REGULARISATION DER OPTIMALEN FORMEL FÜR DIE BERECHNUNG VON FOURIER' KOEFFIZIENTEN

IVO BABUŠKA

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe die optimale Berechnung des Funktionals (1) unter der Voraussetzung zu finden, dass wir nur die Funktionenwerte f im gleichmässigen Netz kennen. Dabei ist weiter vorausgesetzt dass diese Funktionenwerte f nur mit Störungen bekannt sind, genauer gesagt, dass nur die Funktion $f + g$ bekannt ist, wobei g eine kleine Funktion ist.

Adresa autora: Ing. dr. *Ivo Babuška* Dr.Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Opletalova 45.