

# Aplikace matematiky

---

Karol Rečičár

Vektorové premietanie v  $n$ -rozmernom priestore a niektoré jeho aplikácie v geometrii nerastných ložísk

*Aplikace matematiky*, Vol. 11 (1966), No. 6, 478–489

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103055>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VEKTOROVÉ PREMIETANIE V  $n$ -ROZMERNOM PRIESTORE  
A NIEKOTRÉ JEHO APLIKÁCIE V GEOMETRII NERASTNÝCH LOŽÍSK

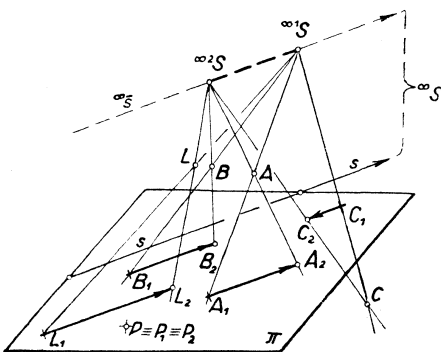
KAROL REČIČÁR

(Došlo dňa 5. novembra 1965.)

1. VEKTOROVÉ PREMIETANIE V TROJROZMERNOM PRIESTORE

Metóda vektorového premietania v trojrozmernom priestore ([1], str. 23–35) je definovaná nasledovne:

V operačnom priestore  $\Pi^3$  (euklidovskom trojrozmernom priestore, rozšírenom o úbežné prvky) je daná úbežná priamka  ${}^\infty\bar{s}$ , určená dvoma úbežnými bodmi  ${}^{\infty 1}S$  a  ${}^{\infty 2}S$  (schematický obr. 1); podľa terminológie viacrozmernej geometrie hovoríme, že priamka  ${}^\infty\bar{s}$  je určená dvojbodovým simplexom  ${}^{\infty 1}S{}^{\infty 2}S$ , ktorý označujeme  ${}^\infty s_2$  (dvojbodový simplex určuje priamku, teda tu  ${}^\infty s_2 \equiv {}^\infty\bar{s}$ ). Priamka  ${}^\infty\bar{s}$  nech má s rovinou  $\pi$ , t. j. priemetňou, priestoru  $\Pi^3$  spoločný bod  ${}^\infty S$ , určený smerom  $s$ .



Obr. 1.

Ľubovoľnému vlastnému bodu  $A$  priestoru  $\Pi^3$  možno priradiť ako jeho priemet na priemetni  $\pi$  priesečníky premietajúcich priamok  ${}^{\infty 1}SA$  a  ${}^{\infty 2}SA$  s rovinou  $\pi$ , čiže usporiadanú dvojicu bodov  $A_1 = {}^{\infty 1}SA \cdot \pi$  a  $A_2 = {}^{\infty 2}SA \cdot \pi$ . Každému vlastnému bodu  $A, B, C, \dots$  priestoru  $\Pi^3$  prislúcha takto jednoznačne ako priemet v priemetni  $\pi$  usporiadaná dvojica bodov, čiže určitý vektor  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots$  rovnobežný s pevným smerom  $s$ .

Podľa tohoto priradenia aj naopak každému vektoru  $L_1L_2$  v priemetni  $\pi$ , rovnobežnému so smerom  $s$ , ako priemetu

odpovedá v priestore  $\Pi^3$  jednoznačne určitý bod  $L$  ako vzor. Priamky  $L_1{}^{\infty 1}S$  a  $L_2{}^{\infty 2}S$  ležia totiž v jednej rovine, určenej priamkami  $L_1L_2$  a  ${}^\infty\bar{s}$ , ktoré sú podľa predpokladu rovnobežné (majú totiž jediný spoločný bod  ${}^\infty S$ ), pretínajú sa teda v jednom bode  $L$ .

Bod  $P$  ležiaci v priemetni  $\pi$  sa stotožňuje s obidvoma svojimi priemetmi:  $P \equiv \equiv P_1 \equiv P_2$  (má za priemet nulový vektor  $P_1 P_2$ ).

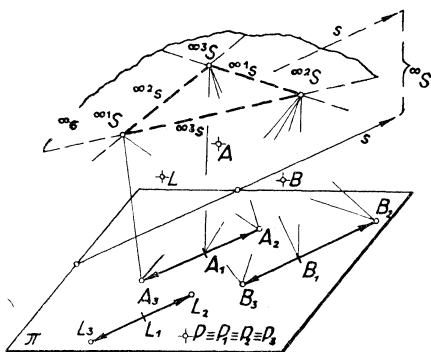
## 2. VEKTOROVÉ PREMIETANIE V PRIESTOROCH S ROZMERMI $> 3$

V predchádzajúcich odsekoch pre priestor  $\Pi^3$  definované vektorové premietanie možno rozšíriť aj do viacrozmerných priestorov. V práci [2] (str. 127–132) je pojednané o takom rozšírení pre štvorrozmerný priestor  $\Pi^4$  (obr. 2).

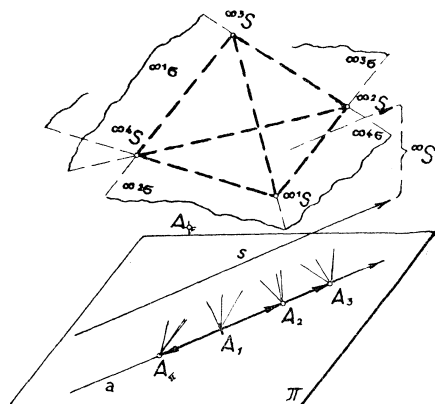
Prvky vektorového premietania v päťroznom operačnom priestore  $\Pi^5$  sú naznačené na obr. 3. Štvorbodový simplex  ${}^{\infty}S_4 = {}^{\infty}S^{\infty 2}S^{\infty 3}S^{\infty 4}S$  (štvorsten) určuje úbežný trojrozmerný priestor  ${}^{\infty}\Pi^3$  v priestore  $\Pi^5$ . Priestor  ${}^{\infty}\Pi^3$  nech má s rovinou  $\pi$  priestoru  $\Pi^5$  jediný spoločný bod  ${}^{\infty}S$  ([3]), určený smerom  $s$ .

Premietame tu zo štyroch rovín  ${}^{\infty 1}\sigma = {}^{\infty 2}S^{\infty 3}S^{\infty 4}S$ ,  ${}^{\infty 2}\sigma = {}^{\infty 3}S^{\infty 4}S^{\infty 1}S$ ,  ${}^{\infty 3}\sigma = {}^{\infty 4}S^{\infty 1}S^{\infty 2}S$ ,  ${}^{\infty 4}\sigma = {}^{\infty 1}S^{\infty 2}S^{\infty 3}S$  úbežného priestoru  ${}^{\infty}\Pi^3$  na rovinu  $\pi$ . Vlastný bod  $A$  priestoru  $\Pi^5$  má tu svoje priemety z rovín  ${}^{\infty 1}\sigma$ ,  ${}^{\infty 2}\sigma$ ,  ${}^{\infty 3}\sigma$ ,  ${}^{\infty 4}\sigma$  na priemetňu  $\pi$  v spoločných bodoch jednotlivých premietajúcich trojrozmerných priestorov  $[A^{\infty i}\sigma]$ , pričom  $i = 1, 2, 3, 4$ , s rovinou  $\pi$ :  $A_1 = [A^{\infty 1}\sigma] \cdot \pi$ ,  $A_2 = [A^{\infty 2}\sigma] \cdot \pi$ ,  $A_3 = [A^{\infty 3}\sigma] \cdot \pi$ ,  $A_4 = [A^{\infty 4}\sigma] \cdot \pi$ .

Všetky štyri priemety  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ležia tu zase na jednej priamke  $a \parallel s$ , lebo štvorrozmerný priestor  $[A^{\infty}\Pi^3]$  má s rovinou  $\pi$  v priestore  $\Pi^5$  spoločnú priamku  $a$  ([3]:  $4 + 2 - 1 = 5$ ) smerujúcu do bodu  ${}^{\infty}S$  ako spoločného bodu priestoru  ${}^{\infty}\Pi^3$  a roviny  $\pi$  podľa vyššie vysloveného predpokladu; preto body  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , ako spoločné body priestoru  $[A^{\infty}\Pi^3]$  a roviny  $\pi$ , musia ležať práve na priamke  $a \parallel s$ .



Obr. 2.



Obr. 3.

Každému vlastnému bodu  $(A, B, \dots)$  priestoru  $\Pi^5$  sú takto jednoznačne priradené určité štyri usporiadané body v priemetni  $\pi$  ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ;  $B_1, B_2, B_3, B_4$ ; ...), ležiace vždy na jednej priamke rovnobežnej so smerom  $s$ , čiže tri vektory  $(A_1 A_2, A_1 A_3,$

$A_1A_4; B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4; \dots$ ), majúce spoločný začiatočný bod a rovnobežné so smerom  $s$ .

Platí aj naopak: Každým štyrom usporiadaným bodom  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  v priemetni  $\pi$ , ležiacim na jednej priamke  $\parallel s$ , čiže trom vektorom  $(L_1L_2, L_1L_3, L_1L_4)$  so spoločným začiatočným bodom a rovnobežným so smerom  $s$ , ako priemetu prislúcha v priestore  $\Pi^3$  jednoznačne určitý bod  $(L)$  ako vzor.

Dôkaz: Priamka  $L_1L_2L_3L_4 \parallel s$  má s trojrozmerným priestorom  ${}^\infty\Pi^3$  (tvoreným rovinami  ${}^\infty i\sigma, i = 1, 2, 3, 4$ ) len jeden spoločný bod  ${}^\infty S$  podľa predpokladu, určuje preto s ním štvorrozmerný priestor ( $[3] : 1 + 3 - 0 = 4$ ), v ktorom ležia všetky štyri trojrozmerné priestory  $[L_i {}^\infty i\sigma], i = 1, 2, 3, 4$ . Priestory  $[L_i {}^\infty i\sigma], i = 1, 2, 3, 4$ , majú teda jediný spoločný bod  $L$  ( $[3]$ ).

Bodu  $P$  ležiacemu v priemetni  $\pi$  prislúchajú v priemetni ako priemet tri nulové vektory ( $P \equiv P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv P_4$ ).

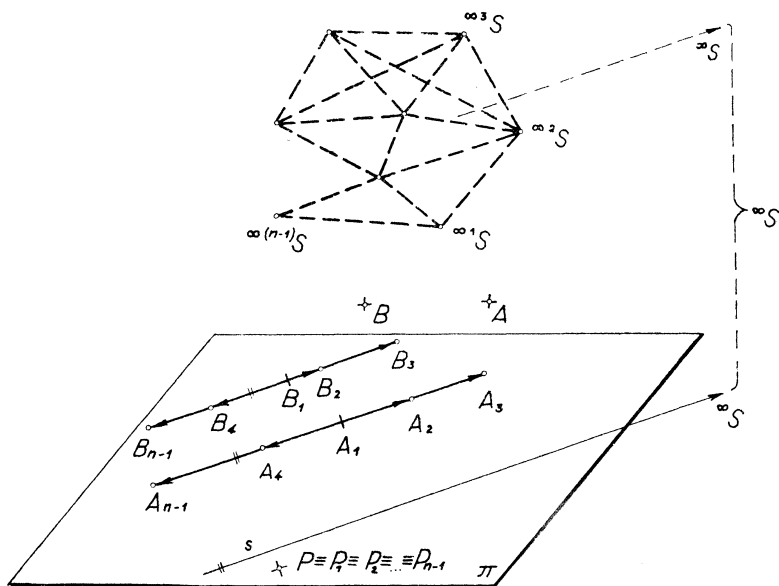
### 3. ZOVŠEOBECNENIE VEKTOROVÉHO PRIEMIETANIA PRE $n$ -ROZMERNÝ PRIESTOR $\Pi^n$

**3.1. Podstata.** Operačným priestorom nech je  $n$ -rozmerný euklidovský priestor, rozšírený o úbežné prvky,  $\Pi^n$ . Zvolíme v ňom úbežný  $(n - 2)$ -rozmerný lineárny priestor  ${}^\infty\Pi^{n-2}$ , určený  $(n - 1)$ -bodovým simplexom  ${}^\infty s_{n-1} = {}^\infty 1S {}^\infty 2S \dots {}^\infty (n-1)S$  (obr. 4). (Ďalej budeme rozumieť pod priestorom vždy lineárny priestor.) Priestor  ${}^\infty\Pi^{n-2}$  nech má s rovinou  $\pi$ , priemetňou, priestoru  $\Pi^n$  spoločný jediný bod  ${}^\infty S$  ( $[3]$ ), určený smerom  $s$ .

Priemietame tu na priemetňu  $\pi$  z  $n - 1$   $(n - 3)$ -rozmerných úbežných priestorov, tzv. priemetných priestorov,  ${}^\infty 1\Pi^{n-3} = {}^\infty 2S {}^\infty 3S \dots {}^\infty (n-1)S, {}^\infty 2\Pi^{n-3} = {}^\infty 3S {}^\infty 4S \dots {}^\infty (n-1)S {}^\infty 1S, \dots, {}^\infty (n-1)\Pi^{n-3} = {}^\infty 1S {}^\infty 2S \dots {}^\infty (n-2)S$  priestoru  ${}^\infty\Pi^{n-2}$ . Priemety  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  vlastného bodu  $A$  priestoru  $\Pi^n$  definujeme ako spoločné body jednotlivých  $(n - 2)$ -rozmerných priemietajúcich priestorov s rovinou  $\pi$  ( $[3]$ ):  $A_1 = \{A {}^\infty 1\Pi^{n-3}\} \cdot \pi, A_2 = \{A {}^\infty 2\Pi^{n-3}\} \cdot \pi, \dots, A_{n-1} = \{A {}^\infty (n-1)\Pi^{n-3}\} \cdot \pi$ . Body  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  ležia na jednej priamke rovnobežnej so smerom  $s$ . Dôkaz tvrdenia vypílyva z toho, že  $(n - 1)$ -rozmerný priestor  $\langle A {}^\infty\Pi^{n-2} \rangle$  má tu s rovinou  $\pi$  v  $n$ -rozmernom priestore  $\Pi^n$  obecnú spoločnú priamku  $a$  ( $[3] : n - 1 + 2 - 1 = n$ ) smerujúcu do bodu  ${}^\infty S$  ako spoločného bodu priestoru  ${}^\infty\Pi^{n-2}$  s rovinou  $\pi$  podľa predpokladu; body  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , ako body ležiace v priestore  $\langle A {}^\infty\Pi^{n-2} \rangle$  (obsahujúcom priemietajúce priestory  $\{A {}^\infty i\Pi^{n-3}\}, i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) a súčasne v rovine  $\pi$ , musia byť na priamke  $a \parallel s$ .

Každému vlastnému bodu  $(A, B, \dots)$  priestoru  $\Pi^n$  je takto jednoznačne priradených  $n - 1$  usporiadaných bodov  $(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}; B_1, B_2, \dots, B_{n-1}; \dots)$  v priemetni  $\pi$ , ležiacich vždy na jednej priamke rovnobežnej s určitým smerom  $s$ , čiže  $n - 2$  vektorov, ktoré majú spoločný začiatočný bod a sú rovnobežné so smerom  $s$  (napr.  $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{n-1}; B_1B_2, B_1B_3, \dots, B_1B_{n-1}; \dots$ ).

Je to jedno-jednoznačné priradenie, lebo aj naopak: každej množine  $n - 1$  usporiadaných bodov v rovine  $\pi$ , ležiacich na priamke rovnobežnej so smerom  $s$  (napr.  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ ), čiže množine  $n - 2$  vektorov, vychádzajúcich zo spoločného začiatočného bodu a rovnobežných so smerom  $s$  ( $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{n-1}$ ), ako priemetu odpovedá v priestore  $\Pi^n$  jednoznačne určitý bod ( $A$ ) ako vzor. Dôkaz



Obr. 4.

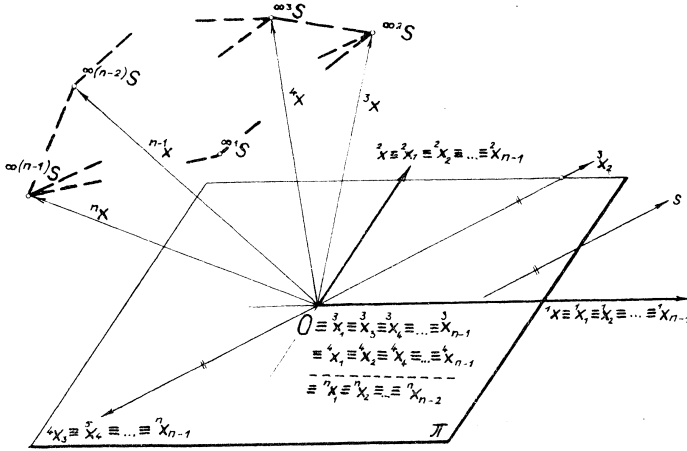
vyssloveného tvrdenia je nasledovný: Priamka  $a = A_1A_2 \dots A_{n-1} \parallel s$  a priestor  ${}^\infty\Pi^{n-2}$  (tvorený jednotlivými priemetnými priestormi  ${}^\infty\Pi^{n-3}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , definovanými vyššie), majúci s priamkou  $a$  – podľa predpokladu – iba jeden spoločný bod  ${}^\infty S$ , určujú  $(n - 1)$ -rozmerný priestor ([3]:  $1 + n - 2 - 0 = n - 1$ ). Všetkých  $n - 1$   $(n - 2)$ -rozmerných priestorov  $\{A_i {}^\infty\Pi^{n-3}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , leží preto v tom istom  $(n - 1)$ -rozmernom priestore a má teda jediný spoločný bod  $A$  v priestore  $\Pi^n$  ([3]).

Z  $n - 1$  bodov v priemetni  $\pi$ , tvoriacich priemet bodu priestoru  $\Pi^n$ , môžu niektoré splynúť. Ak splynú všetky, potom ide o priemet bodu, napr.  $P$ , ležiaceho v priemetni  $\pi$ :  $P \equiv P_1 \equiv P_2 \equiv \dots \equiv P_{n-1}$ ; priemetom takého bodu je  $n - 2$  nulových vektorov.

**3.2. Súradný systém v priestore  $\Pi^n$ .** Na jednoznačné určenie polohy bodu, daného  $n$ -súradnicami, v  $n$ -rozmernom priestore použijeme súradný  $n$ -hran  $O({}^1x, {}^2x, \dots, {}^nx)$ , pričom nech je napr.  ${}^3x = O^{\infty 2}S$ ,  ${}^4x = O^{\infty 3}S$ , ...,  ${}^nx = O^{\infty(n-1)}S$  (obr. 5). Pri-

metňu  $\pi$  zvolíme v rovine určenej súradnými osami  $^1x$  a  $^2x$ , pre priemety ktorých zrejme platí:  $^1x_1 \equiv ^1x_2 \equiv \dots \equiv ^1x_{n-1} \equiv ^1x$ ,  $^2x_1 \equiv ^2x_2 \equiv \dots \equiv ^2x_{n-1} \equiv ^2x$ .

Priemet  $^3x_2$  súradnej osi  $^3x$  je v priamke predchádzajúcej počiatkom  $O$  a rovnobežnej so smerom  $s$ .



Obr. 5.

Dôkaz: Podľa definície priemet  $^3x_2$  dostaneme z  $(n - 3)$ -rozmerného priemetného priestoru  ${}^{\infty 2}\Pi^{n-3} = {}^{\infty 3}S {}^{\infty 4}S \dots {}^{\infty (n-1)}S {}^{\infty 1}S$ . Priamka  $^3x$  s týmto priemetným priestorom nemá nijaký spoločný bod (lebo ináč by bola úbežná, čo je vylúčené pri vlastnom bode  $O$ ), preto s ním určuje  $(n - 1)$ -rozmerný priestor  $\Pi^{n-1}$  ([3]:  $1 + n - 3 - (-1) = n - 1$ ), ktorý má s priemetňou  $\pi$ , v  $n$ -rozmernom priestore, spoločnú priamku ([3]:  $n - 1 + 2 - 1 = n$ ), a to predchádzajúcu počiatkom  $O$  (ako bodom priamky  $^3x$  v rovine  $\pi$ ) a rovnobežnú so smerom  $s$  (t. j. idúcu do bodu  ${}^{\infty}S$  ako spoločného bodu roviny  $\pi$  a priestoru  ${}^{\infty}\Pi^{n-2} = {}^{\infty 1}S {}^{\infty 2}S \dots {}^{\infty (n-1)}S$ , ktorý je časťou uvažovaného priestoru  $\Pi^{n-1}$ ).

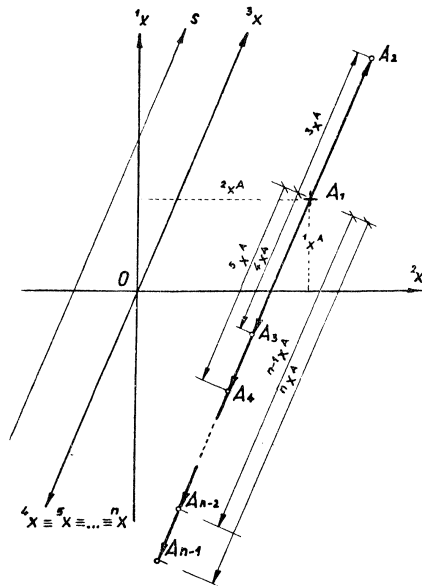
Ostatné priemety súradnej osi  $^3x$  sa stotožňujú s počiatkom  $O$ :  $^3x_1 \equiv ^3x_3 \equiv \dots \equiv ^3x_4 \equiv \dots \equiv ^3x_{n-1} \equiv O$ .

Dôkaz: Priemet  $^3x_1$  sa dostane z  $(n - 3)$ -rozmerného priemetného priestoru  ${}^{\infty 1}\Pi^{n-3} = {}^{\infty 2}S {}^{\infty 3}S \dots {}^{\infty (n-1)}S$ . Priamka  $^3x$  s týmto  $(n - 3)$ -rozmerným priestorom (pričom má s ním spoločný bod  ${}^{\infty 2}S$ ) určuje  $(n - 2)$ -rozmerný priestor ([3]:  $1 + n - 3 - 0 = n - 2$ ), ktorý má s priemetňou  $\pi$ , v  $n$ -rozmernom priestore, spoločný bod ([3]:  $n - 2 + 2 - 0 = n$ ), ktorý môže byť len počiatok. Obdobný je dôkaz tvrdenia pre ostatné priemety  $^3x_3, ^3x_4, \dots, ^3x_{n-1}$ .

Pre priemety ďalších súradných osí platí analogicky:  $^4x_3 \equiv ^5x_4 \equiv \dots \equiv ^nx_{n-1}$  je v priamke prechádzajúcej počiatkom  $O$  a rovnobežnej so smerom  $s$ ;  $^4x_1 \equiv ^4x_2 \equiv \dots \equiv ^4x_4 \equiv \dots \equiv ^4x_{n-1} \equiv 0, \dots, ^nx_1 \equiv ^nx_2 \equiv \dots \equiv ^nx_{n-2} \equiv O$ .

**3.3. Zobrazenie v nákrēsni.** Priemetňu  $\pi$  stotožníme s nákrēsňou. Zvolíme v nej napr. pravouhly súradný systém  $O({}^1x, {}^2x)$  a ľubovoľnú orientovanú priamku  $s$  (obr. 6). Priemety orientovaných súradných osí  ${}^1x, {}^2x$  označíme kvôli jednoduchosti  ${}^1x, {}^2x$ . Narysujeme orientovaný priemet súradnej osi  ${}^3x$  počiatkom  $O$ , napr. súhlasne rovnobežne so smerom  $s$  a označíme ho kvôli jednoduchosti iba  ${}^3x$ . Priemet ostatných súradných osí nech je v priamke idúcej počiatkom  $O$  nesúhlasne rovnobežne so smerom  $s$ ; označíme stručne  $x^4 \equiv \equiv {}^5x \equiv \dots \equiv {}^nx$ .

Prvé dve súradnice  ${}^1x^A, {}^2x^A$  bodu  $A$   $n$ -rozmerného priestoru  $\Pi^n$  určujú jeho prvý, tzv. začiatočný priemet  $A_1$ ; súradnica  ${}^3x^A$ , nanesená v smere osi  ${}^3x$  od priemetu  $A_1$ , určí priemet  $A_2$ ; obdobne ďalšie súradnice  ${}^4x^A, {}^5x^A, \dots, {}^nx^A$ , vynesené od priemetu  $A_1$  v smere  ${}^4x \equiv {}^5x \equiv \dots \equiv {}^nx$ , určujú ďalšie priemety  $A_3, A_4, \dots, A_{n-1}$ . Dostávame takto zobrazenie bodu  $A$  priestoru  $\Pi^n$  na nákrēsni  $n - 2$  vektormi, napr.  $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_{n-1}$ , so spoločným začiatočným bodom  $A_1$  a rovnobežnými so smerom  $s$ .



Obr. 6.

#### 4. NIEKOTRÉ APLIKÁCIE V GEOMETRII NERASTNÝCH LOŽÍSK

Ak rozumíme „bodom“ polymetalického rudného ložiska ťažisko miesta, z ktorého sa odobral vzorok rudy, potom takýto „bod“ je charakterizovaný jednak tromi premenlivými súradnicami  $x, y, z$ , určujúcimi stereometrickú polohu (t. j. polohu bodu v bežnom trojrozmernom priestore), jednak ďalšími parametrami, ktoré vyjadrujú napr. mocnosť ložiska v okolí uvažovaného bodu a iné kvalitatívne ukazovatele, napr. obsahy rôznych kovov ([4]).

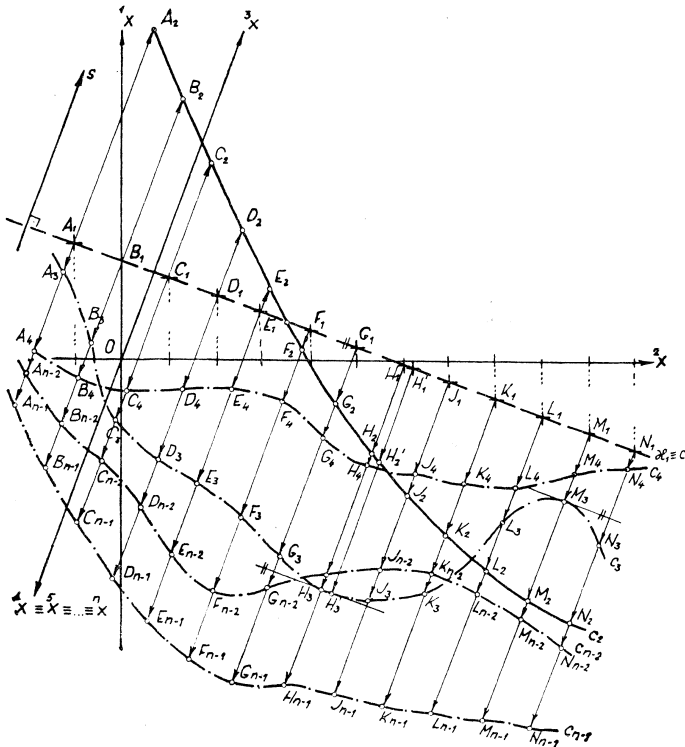
„Bod“ polymetalického rudného ložiska s polohovými súradnicami  $x, y, z$  — označíme ich  ${}^1x, {}^2x, {}^3x$  — a ďalšími kvalitatívnymi súradnicami  ${}^4x, {}^5x, \dots, {}^nx$ , vyjadrujúcimi napr. percentuálne obsahy rôznych  $n - 3$  kovov v „bode“, možno považovať za bod určitého  $n$ -rozmerného euklidovského priestoru  $\Pi^n$  a vektorove znázorniť podľa predchádzajúcich úvah.

Ak v „bode“ ložiska sledujeme obsah len jedného kovu, pôjde o bod v štvorrozmernom operačnom priestore  $\Pi^4$ , ak sledujeme v ňom obsah dvoch rôznych kovov, ide o bod päťrozmerného operačného priestoru  $\Pi^5$  a obecné „bod“, v ktorom zisťujeme obsah  $r$  rozličných kovov, je bodom  $(3 + r)$ -rozmerného operačného priestoru  $\Pi^{3+r}$ .

#### 4.1. Znázornenie kovnatostí v bodoch šikmého prieskumného vrtu polymetalickým ložiskom.

Na ozrejmienie použiteľnosti vektorového zobrazenia  $n$ -rozmerného priestoru vyberieme extrémny príklad.

V bodoch  $A, B, \dots, M, N$ , ktorých stereometrická poloha je určená súradnicami  ${}^1x, {}^2x, {}^3x$ , šikmého prieskumného zakriveného vrtu (ležiaceho v jednej vertikálnej



Obr. 7.

rovine  $x$ ) sú zistené príslušné hodnoty kovnatostí vzhľadom na  $r$  krovov ( ${}^1k^A, {}^2k^A, \dots, {}^rk^A; {}^1k^B, {}^2k^B, \dots, {}^rk^B; \dots; {}^1k^N, {}^2k^N, \dots, {}^rk^N$ ).

V nákrese (obr. 7) zvolíme pravouhlú súradnú sústavu  $O({}^1x, {}^2x)$  a pri vhodne zvolenej mierke zobrazíme zo súradníc  ${}^1x, {}^2x$  začiatočné priemety  $A_1, B_1, \dots, M_1, N_1$  jednotlivých bodov. Ďalej zvolíme vhodne smer osi  ${}^3x \parallel s$  (na obr. 7 napr. kolmo na začiatočný priemet, pôdorys  $c_1 \equiv x_1$  vrtu) a pomocou súradníc  ${}^3x^A, {}^3x^B, \dots, {}^3x^N$ , vynášaných v smere osi  ${}^3x$  v primeranej mierke, zostrojíme ďalšie priemety  $A_2, B_2, \dots, N_2$  tak, že si myslíme priemetňu  $\pi$  položenú do vhodnej úrovne (na obr. 7 napr.



medzi úrovňou bodov  $E$  a  $F$ ). Tieto priemety znázorňujú polohu bodov vrtu v obvyklom trojrozmernom priestore; spojením priemetov – za predpokladu spojitého priebehu vrtu – dostávame krivku  $c_2$  ako grafický obraz priebehu vrtu v trojrozmernom priestore.

Priemet ďalších súradných osí  ${}^4x \equiv {}^5x \equiv \dots \equiv {}^n x$  zvolíme nesúhlasne rovnobežne so smerom  $s$ . Nanesieme od jednotlivých začiatočných priemetov namerané hodnoty kovnatostí  ${}^4x^A = {}^1k^A, {}^5x^A = {}^2k^A, \dots, {}^n x^A = {}^r k^A; {}^4x^B = {}^1k^B, \dots, {}^n x^B = {}^r k^B; \dots; {}^4x^N = {}^1k^N, \dots, {}^n x^N = {}^r k^N$  v priemeranej mierke rovnobežne s príslušnými súradnými osami, čím dostávame v koncových bodoch ďalšie priemety  $A_3, A_4, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}; B_3, B_4, \dots, B_{n-2}, B_{n-1}; \dots; N_3, N_4, \dots, N_{n-2}, N_{n-1}$ . Za predpokladu, že sa kovnatosti menia spojitě, dostávame spojením jednotlivých priemetov krivky kovnatostí  $c_3$  (napr. pre  $Hg$ ),  $c_4(Cu), \dots, c_{n-2}(Mn)$  a  $c_{n-1}(Fe)$ .

Z priebehu jednotlivých kriviek kovnatostí môžeme usudzovať takto:

Zrudnenie vo vrte vzhľadom na zložku  $Hg$  začína pravdepodobne vľavo od bodu  $A$  (v bode, ktorého začiatočný priemet je v priesečníku krivky  $c_3$  s priemetom  $c_1$ ).

Vyhľuchnutie vzhľadom na zložku  $Cu$  nastáva v okolí bodu  $N$  vpravo (v bode, ktorého začiatočný priemet je v priesečníku krivky  $c_4$  s priemetom  $c_1$ ).

Maximálna kovnatosť vzhľadom na zložku  $Hg$  je v okolí bodu  $H'$  vrtu (na pravo od bodu  $H$ ), najmenšia kovnatosť  $Hg$  v úseku  $C - N$  je v okolí bodu  $M$  (sú to body, v priemetoch  $H'_3$  a  $M_3$  ktorých dotyčnice krivky  $c_3$  sú rovnobežné s priemetom  $c_1$ ).

#### **4.2. Grafické zistenie rozloženia bilančných úsekov polymetalickej žily vzhľadom na jednotlivé úžitkové zložky pozdĺž horizontálnej prieskumnej chodby.**

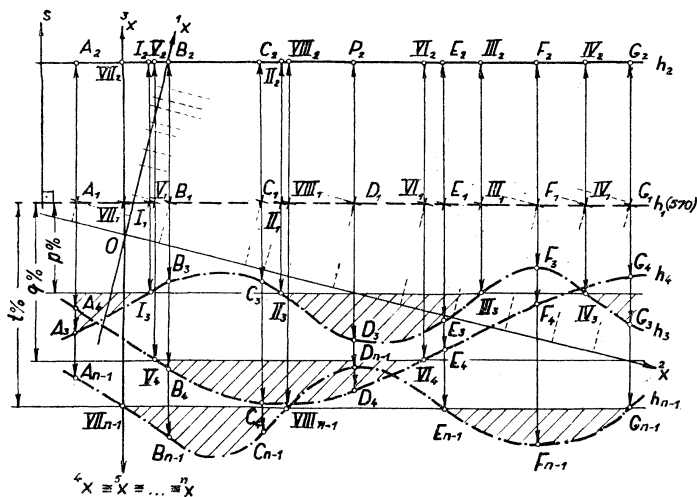
V niekoľkých bodoch  $A, B, \dots, G$  horizontálnej priamočiarej prieskumnej banskej chodby, razenej s osou  $h(570)$  v polymetalickom ložisku, sú zistené obsahy rôznych  $r$  kovov.

Znázorníme polohy bodov súčasne s príslušnými kovnatosťami pomocou vektorového premietania v  $n$ -rozmernom priestore ( $n = 3 + r$ ) ako v predchádzajúcom prípade (obr. 8).

Zvolíme rovinu úrovne 550 m za priemietňu  $\pi$ , stotožníme ju s nákrešňou a zvolíme v nej vhodne pravouhlý súradný systém  $O({}^1x, {}^2x)$ . Zo súradníc  ${}^1x, {}^2x$  zostrojíme začiatočné priemety-pôdorysy  $A_1, B_1, \dots, G_1$  bodov chodby, ktoré ležia na začiatočnom priemete-pôdoryse  $h_1(570)$  chodby. Zvolíme ďalej vhodným spôsobom smer  $s \perp h_1(570)$ . Znázorníme priestorovú polohu chodby  $h_2 = A_2B_2 \dots G_2$  a z hodnôt kovnatostí v jednotlivých bodoch ďalšie priemety  $A_3, A_4 \dots A_{n-1}; B_3, B_4, \dots, B_{n-1}; \dots; G_3, G_4, \dots, G_{n-1}$ . V smere osí  ${}^1x, {}^2x$  rysujeme v mierke  $M$ , v smere osí  ${}^3x$ , podľa potreby, v inej vhodnej mierke  $M'$  a v smere ostatných súradných osí v ďalších primeraných mierkach.

Spojením jednotlivých koncových bodov príslušnej kovnatosti dostávame – za predpokladu spojitej zmeny kovnatosti – krivky  $h_3, h_4, \dots, h_{n-1}$ , znázorňujúce zmenu kovnatosti ložiska v smere chodby.

Ak sú hranice bilančnosti jednotlivých kovov dané hodnotami  $p\%, q\%, \dots, t\%$  ([4]), potom priamky zostrojené rovnobežne s pôdorysom  $h_1(570)$  vo vzdialenostiach



Obr. 8.

$p\%, q\%, \dots, t\%$  pretnú príslušné krivky kovnatostí  $h_3, h_4, \dots, h_{n-1}$  v priemetoch bodov, ktoré ohraničujú úseky bilančnosti jednotlivých kovov. Na obr. 8 vidíme, že úseky bilančnosti kovu s krivkou  $h_3$  sú obmedzené bodmi A a I, II a III, IV a G; kovu s krivkou  $h_4$  bodmi V a VI, kovu s krivkou  $h_{n-1}$  bodmi VII a VIII, E a G.

#### Literatúra

- [1] Rečičár, K.: Metóda vektorového premietania. Sborník vedeckých prác VŠT v Košiciach, č. 2/1957.
- [2] Rečičár, K.: Vektorové premietanie v štvorrozmernom priestore a jeho aplikácie v banskom meračstve. Rudy, č. 4/1964.
- [3] Schoute, P. H.: Mehrdimensionale Geometrie I. Leipzig, 1902.
- [4] Stočes, B.: Důlní geologie I/2. Praha, 1954.

МЕТОД ВЕКТОРНОЙ ПРОЕКЦИИ В  $n$ -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ НЕДР

КАРОЛ РЕЧИЧАР (KAROL REČIČAR)

В первой части статьи дается обобщение метода векторной проекции из трехмерного пространства на пятимерное и  $n$ -мерное операционное пространство Евклида.

В пятимерном операционном пространстве  $P^5$  проектируется на плоскость проекции из четырех несобственных плоскостей несобственного трехмерного пространства  ${}^\infty P^3$ , определенного четырьмя точками симплекса  ${}^\infty 1S^\infty 2S^\infty 3S^\infty 4S$ . Проекцией точки (за исключением несобственных точек) являются здесь четыре упорядоченные точки, лежащие на прямой, параллельной фиксированному направлению  $s$ , или три вектора, имеющие общую исходную точку и лежащие на одной прямой, параллельной фиксированному направлению  $s$ .

В  $n$ -мерном операционном пространстве  $P^n$  проектируется на плоскость проекции из  $n - 1$  ( $n - 3$ )-мерных несобственных пространств  $(n - 2)$ -мерного пространства  ${}^\infty P^{n-2}$ , заданного  $n - 1$  точками симплекса  ${}^\infty 1S^\infty 2S \dots {}^\infty (n-1)S$ . Проектируя какую-либо точку (за исключением несобственной точки) в плоскость чертежа, мы оплучим  $n - 1$  упорядоченных точек, лежащих на прямой, параллельной фиксированному направлению, или  $n - 2$  векторов с общей исходной точкой, параллельных фиксированному направлению  $s$ .

„Точку“ полиметаллического рудного месторождения с позиционными координатами  ${}^1x, {}^2x, {}^3x$  и дальнейшими качественными координатами  ${}^4x, {}^5x, \dots, {}^nx$ , выражающими, напр., процентные содержания разных  $n - 3$  металлов в точке, можно считать точкой определенного  $n$ -мерного пространства Евклида и изобразить  $n - 2$  векторами на плоскость проекции, как это было определено выше. Этим дана возможность применить эту проекцию в геометрии недр.

Во второй части статьи показаны два примера подобного применения.

Изображены (фиг. 7) с помощью векторной проекции в  $n$ -мерном пространстве точки наклонной разведочной скважины, проходящей через полиметаллическое месторождение, а именно их положение в обычном трехмерном пространстве и их содержание металла по отношению к  $r$  различных металлов. По прохождению отдельных линий содержания металла можно судить, напр., о пространственном положении точек начала оруднения и точек нулевого содержания, точек наибольшего и наименьшего содержания металла по отношению к отдельным рассматриваемым полезным компонентам.

Дальше (фиг. 8) с помощью метода векторного изображения  $n$ -мерного про-

странства графически определяется расположение балансовых участков полиметаллической жилы по отношению к отдельным полезным компонентам вдоль горизонтального разведочного горного штрека.

## Zusammenfassung

### DIE VEKTORPROJEKTIONSMETHODE IM $n$ -DIMENSIONALEN RAUM UND EINIGE ANWENDUNGEN IN DER GEOMETRIE DER LAGERSTÄTTEN

KAROL REČIČÁR

Im ersten Teil des Artikels wird die Verallgemeinerung der Vektorprojektionsmethode aus dem dreidimensionalen Raum auf den fünf- und  $n$ -dimensionalen euklidischen Operationsraum abgeleitet.

Es wird im fünfdimensionalen Raum  $\Pi^5$  aus vier unendlich fernen Ebenen eines unendlich fernen dreidimensionalen, durch vier Punkte eines Simplex  ${}^1S^{\infty}{}^2S^{\infty}{}^3S^{\infty}{}^4S$  bestimmten Raumes auf die Projektionsebene projiziert. Die Projektion eines im Endlichen liegenden Punktes des fünfdimensionalen Raumes  $\Pi^5$  ist durch vier geordnete Punkte gebildet, die auf einer mit fester Richtung  $s$  parallelen Geraden liegen, d.h. durch drei Vektoren, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben und mit einer festen Richtung  $s$  parallel sind.

Im  $n$ -dimensionalen Raum  $\Pi^n$  erfolgt das Projizieren auf die Projektionsebene aus  $n - 1$  ( $n - 3$ )-dimensionalen unendlich fernen Räume eines ( $n - 2$ )-dimensionalen, unendlich fernen durch ein ( $n - 1$ )-pünktiges Simplex  ${}^{\infty}{}^1S^{\infty}{}^2S \dots {}^{\infty}{}^{(n-1)}S$  bestimmten Raumes. Die Projektion eines im Endlichen liegenden Punktes ist durch  $n - 1$  geordnete und auf einer Geraden liegenden Punkte gebildet (wobei die Gerade mit einer festen Richtung  $s$  parallel ist), d.h. durch  $n - 2$  Vektoren mit einem gemeinsamen Anfangspunkt, wobei die Vektoren stets auf einer mit fester Richtung  $s$  parallelen Geraden liegen.

Der „Punkt“ einer polymetallischen Erzlagerstätte mit  ${}^1x, {}^2x, {}^3x$  Lagekoordinaten und mit weiteren  ${}^4x, {}^5x, \dots, {}^nx$  qualitativen Koordinaten, die z.B. den prozentuellen Metallgehalt von  $n - 3$  verschiedenen Metallen in diesem Punkt ausdrücken, kann als der Punkt eines bestimmten  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes betrachtet werden und auf der Projektionsbene durch  $n - 2$  Vektoren im Sinne der oben definierten Projektionsmethode dargestellt werden. Dadurch wird die Möglichkeit einer Anwendung der oben angeführten Projektionsmethode in der Geometrie der Lagerstätten gegeben.

Im zweiten Teil des Artikels werden zwei Beispiele solcher Anwendung angeführt.

Es werden (Abb. 7) Punkte einer schiefen Forschungsbohrung durch eine polymetallische Lagerstätte mittels Vektorprojektionsmethode im  $n$ -dimensionalen Raum

dargestellt und zwar deren Lage im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum und deren Metallgehalt in Bezug auf  $r$  verschiedene Metalle. Aus dem Verlauf einzelner Metallgehaltlinien kann man z.B. über die räumliche Lage von Punkten des Anfangs der Vererzung und des Null-Gehaltes, von Punkten höchsten und niedrigsten Metallgehaltes in Bezug auf die einzelnen untersuchten nutzbaren Komponenten urteilen.

Weiter wird (Abb. 8) mit Hilfe von Vektorprojektionsmethode im  $n$ -dimensionalen Raume die Verteilung der Billanzabschnitte eines polymetallischen Ganges in Bezug auf einzelne nutzbare Komponenten entlang einer horizontalen Forschungsstrecke graphisch untersucht.

*Adresa autora:* Doc. Karol Rečičár, Katedra matem. a deskr. geom. BF VŠT, Švermova 5, Košice.