

Aplikace matematiky

Zdeněk Piras; Miloslav Tocháček

Užití lineárního programování k řešení příhradových kovových konstrukcí

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 6, 452–466

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103053>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

UŽITÍ LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ K ŘEŠENÍ PŘÍHRADOVÝCH KOVOVÝCH KONSTRUKCÍ

ZDENĚK PIRAS, MILOSLAV TOCHÁČEK

(Došlo dne 24. listopadu 1965.)

1. ÚVOD

Kovy jsou z mnoha hledisek velmi výhodným materiálem pro konstrukční účely. Rovněž naše hospodářství počítá se širokým uplatněním kovových konstrukcí, hlavně ocelových. Aby se při dnešní (i budoucí) zvýšené spotřebě vystačilo s omezeným množstvím stavebního kovu, je třeba jím více než kdy jindy šetřit. V souvislosti s tím nabývají stále větší důležitosti úlohy optimálního návrhu těch kovových konstrukcí, jejichž vyřešení není jednoznačné.

Jedním typem takových konstrukcí jsou staticky neurčité příhradové konstrukce daného geometrického tvaru (rovinné či prostorové s pruty stálého průřezu kloubově spojenými), rozhoduje-li při návrhu každého prutu táž kombinace vnějších zatížení¹⁾. Podmínkou optimalizace zde bude požadavek nejmenšího objemu či váhy konstrukce případně nejnižší ceny aj.

Podobnou úlohou je problém, v němž konstrukci měníme přidáním prutů s cílem vytvořit výhodnější systém. Bude tomu tak např., přidáme-li předpínací pruty z vysokohodnotných materiálů. Zde potřebujeme znát, jak volit průřezové plochy jednotlivých prutů a jaké zavést předpětí, aby nová konstrukce byla výhodnější než základní.

Nesnadnost úloh tohoto typu spočívá v tom, že obvyklý analytický způsob vyhledávání extrému ztroskotává na tom, že funkce nemá v místě extrému derivaci.

Obvyklý postup vyhledávání optima, spočívající v tom, že se navrhne několik variant a vybere se varianta s optimálním ukazatelem, je příliš primitivní a nepřesný, nehledě k tomu, že může vést k výsledkům, které jsou od skutečného optima značně vzdáleny.

Cílem článku je ukázat, že problém lze řešit pomocí exaktní metody — využitím lineárního programování.

¹⁾ Řešení lze užít též pro konstrukce, u nichž v několika málo prutech rozhodují ještě jiné kombinace zatížení, přičemž tyto pruty zesílíme. Řešení pak bude samozřejmě pouze přibližné.

2. MATEMATICKÝ ZÁPIS PROBLÉMU

Při formulaci problému se budeme snažit zavést symboliku tak, aby byla srovnatelná se symbolikou užívanou pro formulaci úloh lineárního programování.

Osové síly y_j v jednotlivých prutech j konstrukce n -krát staticky neurčité jsou dány vztahem

$$(1) \quad y_j = a_j + \sum_{k=1}^n x_{k,1} b_{jk}.$$

Zde a_j jsou osové síly zvolené základní staticky určité podsoustavy od vnějšího zatížení a b_{jk} od jedničkových sil $x_{k,1} = +1$, působících v místě uvolněných zbytných vazeb k . V případě, že se bude jednat o předpjatou konstrukci, je vhodné zvolit za zbytné pruty k pruty předpínací. Síla $x_{k,1}$ se skládá ze staticky neurčité síly z_k a síly z vlivu předpětí v_k ,

$$(2) \quad x_{k,1} = z_k + v_k.$$

Předpokládejme, že prutů je v soustavě m . Při výpočtu podle mezních stavů a za předpokladu, že osové síly jsou uvažovány jako výpočtové (tj. jsou v nich uvažovány příslušné zhoršující vlivy), dostáváme pevnostní výminky ve tvaru

$$(3) \quad -\bar{\alpha}_j \bar{x}_{j,2} \leq y_j \leq \alpha_j x_{j,2}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Zde $x_{j,2}(\bar{x}_{j,2})$ jsou průřezové plochy a součinitelé $\alpha_j(\bar{\alpha}_j)$ zahrnují veličiny vlivu součinitele statického působení, výpočtové meze průtažnosti a součinitele, vyjadřujícího u tažených prutů vliv oslabení průřezu otvory, u tlačných prutů vliv vzpěru. Pruhem jsou označeny veličiny, platící pro tlak.

Z optimalizačních podmínek zvolme podmínku minimální váhy. Poté můžeme úlohu formulovat takto:

Jest určit optimální velikost proměnných $x_{k,1} \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ a $x_{j,2} \geq 0$ (příp. $\bar{x}_{j,2} \geq 0$), $j = 1, 2, \dots, m$, vyhovující nerovnostem

$$(4) \quad -\bar{\alpha}_j \bar{x}_{j,2} \leq a_j + \sum_{k=1}^n x_{k,1} b_{jk} = \alpha_j x_{j,2}$$

při podmínce minimalizace lineární formy

$$(5) \quad G = \sum_{j=1}^m c_j \begin{cases} x_{j,2} \\ \bar{x}_{j,2} \end{cases}.$$

Koeficienty c_j reprezentují součin délky prutu a specifické váhy materiálu, z něhož je prut vyroben. Svorka ve vz. (5) značí, že je třeba počítat buď s plochami $x_{j,2}$ či $\bar{x}_{j,2}$ podle toho, jsou-li příslušné pruty taženy či tlačeny. Podobně platí ve vz. (4) buď pravá či levá nerovnost.

Z přetvárných výmínek pak ke zjištěným optimálním průřezovým plochám $x_{j,2}$ a $\bar{x}_{j,2}$ lze určit velikosti staticky neurčitých sil z_k . Potřebné síly z vlivu předpětí v_k vypočteme pro zjištěné hodnoty $x_{k,1}$ a z_k ze vz. (2).

Na rozdíl od běžných úloh lineárního programování jsou naše úlohy odlišné v tom, že zatímco v úlohách běžných řešíme jedinou soustavu typu (6) s ohledem na jedinou lineární formu typu (8), již je třeba minimalizovat (tedy optimum hledáme v jediné oblasti), v našich úlohách je soustav rovnic či nerovností typu (4) a jim odpovídajících lineárních forem typu (5) velmi mnoho. Obor řešení tvoří pak řada na sebe navazujících oblastí, charakterizovaných určitým rozložením znamének osových sil po konstrukci. V konkrétním případě jsou tyto oblasti konvexní n -rozměrné mnohostěny. Optimum hledáme tak, že najdeme relativní optimum ve výchozí oblasti a přes toto optimum přecházíme do oblasti sousední, v níž opět hledáme relativní optimum. Výpočet skončí tehdy, když se relativní optima sousedních oblastí ztotožní. Tento bod nám udává optimum absolutní.

Tak např. pro konstrukci na obr. 1a jsou znázorněny na sebe navazující konvexní mnohostrany (jedná se tedy o dvojrozměrný problém) – obr. 2. Vycházíme z relativního minima A , příslušejícího jisté konstrukci o váze G_A . V oblasti **1** nalezneme relativní minimum B této oblasti, odpovídající konstrukci o váze $G_B < G_A$. Odtud přecházíme do další oblasti atd. Hledání absolutního minima skončí v bodě E , v němž se ztotožnila relativní minima oblastí **4, 5** (a ovšem i dalších dvou sousedních oblastí).

Rovnice typu (6), sestavené pro naše úlohy, mají tu výhodu, že se v každé z nich objevuje jediná základní proměnná, vyjádřená již pomocí nezákladních proměnných, což usnadňuje výpočty.

Další výhodou při početním řešení je okolnost, že v jednotlivých oblastech není třeba hledat základní řešení, z něhož vycházíme k dalším výpočtům. Základní řešení pro později sledovanou oblast nám dává optimální řešení z dříve sledované sousední oblasti. Rovněž výchozí základní řešení (v našem případě bod A) se zjistí přímo. Složitěji je třeba přípustné základní řešení vyhledávat, chceme-li výpočty urychlit a přeskočíme hledání relativních optim v některých oblastech, ležících mezi oblastí výchozí a oblastí s absolutním optimem.

V našich úlohách se zhusta stává, že v soustavě (4) bývá u konstrukcí, vyznačujících se jistou pravidelností (u stavebních konstrukcí je to případ obvyklý), značný počet rovnic lineárně závislých. Tak např. 2 krát staticky neurčitá konstrukce, obr. 1a, má 32 prutů (mělo by se tedy uvažovat 32 rovnic), ale vzhledem k symetrii se při řešení můžeme zabývat pouze 15 rovnicemi soustavy (6).

5. GRAFICKÉ ŘEŠENÍ

Než přistoupíme k početnímu řešení, seznámíme se s řešením grafickým. To je výhodné především pro soustavy 2krát staticky neurčité. Pro konstrukce 1krát staticky neurčité lze výhodně užít početního řešení, odvozeného v [6], kde pracujeme s váhovými mnohostrany. Pro konstrukce n -krát staticky neurčité ($n > 2$) je grafické řešení těžkopádné. Přesto však i pro tyto případy přináší jistý užitek: lze jím stanovit základní řešení bližší optimálnímu, než je řešení výchozí.

Vysvětleme nejdříve grafickou metodu přizpůsobenou našim úlohám. Základní konstrukci podle obr. 1a chceme vylehčit pomocí nově přidaných prutů 13 a 40, jež ve vzniklé 2krát staticky neurčité konstrukci považujeme za zbytné. Máme stanovit průřezové plochy $x_{j,2}$, resp. $\bar{x}_{j,2}$ prutů a síly z vlivu předpětí v_1 a v_2 tak, aby váha konstrukce byla minimální.

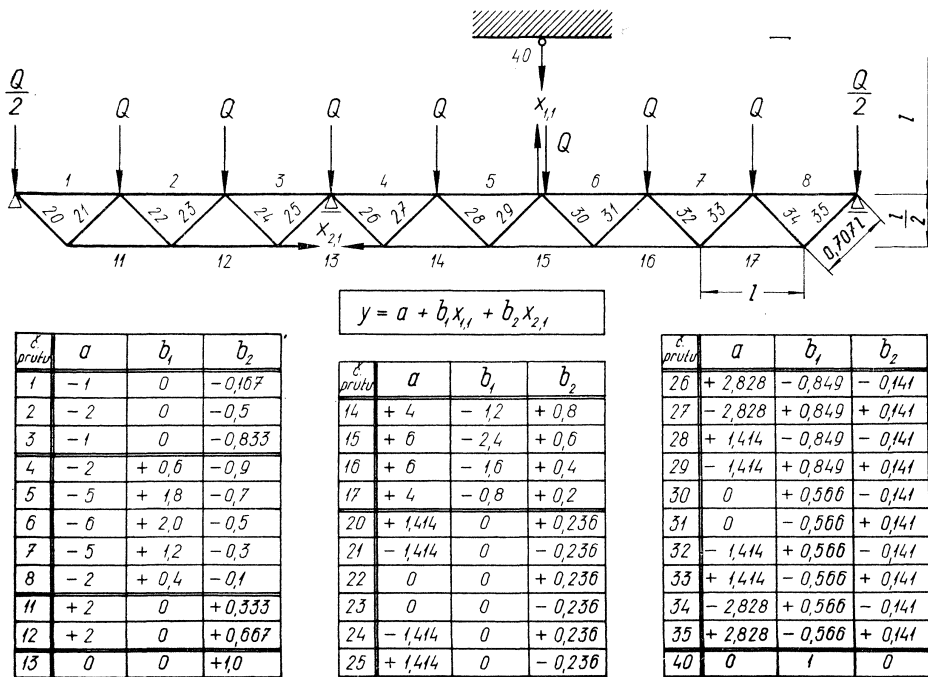
Vzhledem k tomu, že ve vz. (4) platí pro optimální konstrukci znaménko rovnosti (jak již bylo vysvětleno), máme pro j -tý prut vztah

$$(10) \quad \begin{aligned} a_j + b_{1j}x_{1,1} + b_{2j}x_{2,1} &= \alpha_j x_{j,2} \quad \text{pro tažený prut,} \\ a_j + b_{1j}x_{1,1} + b_{2j}x_{2,1} &= -\bar{\alpha}_j \bar{x}_{j,2} \quad \text{pro tlačný prut.} \end{aligned}$$

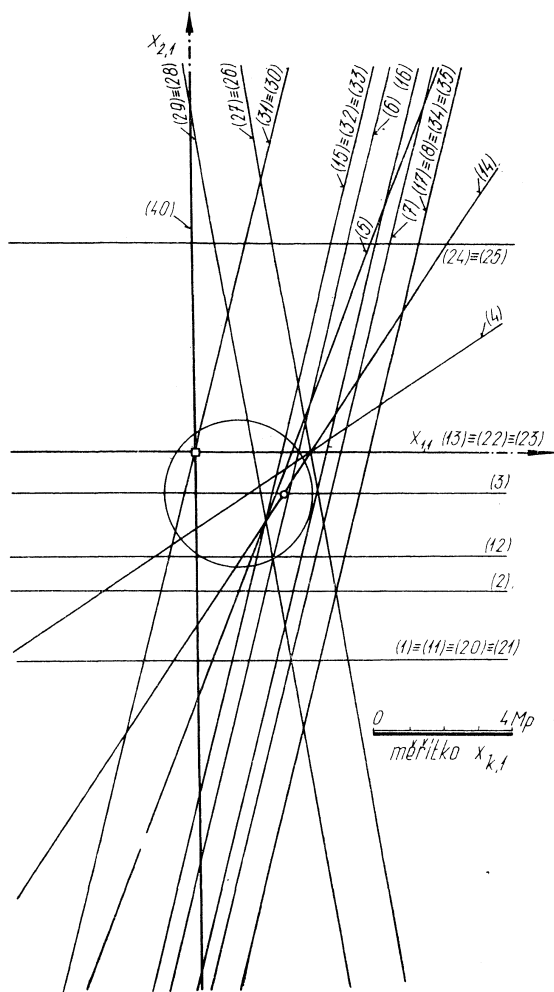
Přitom musí být

$$(11) \quad x_{j,2} \geq 0 \quad \text{či} \quad \bar{x}_{j,2} \geq 0.$$

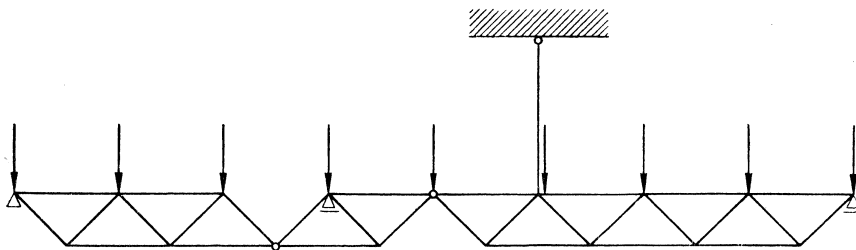
Uvažujeme-li ve vz. (11) rovnost, dostáváme znázorněním vz. (10) soustavu přímek o souřadných osách $x_{1,1}$ a $x_{2,1}$, která je znázorněna na obr. 1b, kde čísla v závorkách značí čísla prutů. Pro zatížení břemeny $Q = 1$ jsou osové síly $y_j = a_j + b_{1j}x_{1,1} + b_{2j}x_{2,1}$ uvedeny v tabulce na obr. 1a; při $Q \neq 1$ jsou Q -násobné.



Obr. 1a. Konstrukce 2-krát staticky neurčitá s tabulkou osových sil, zatížených břemeny $Q = 1$.

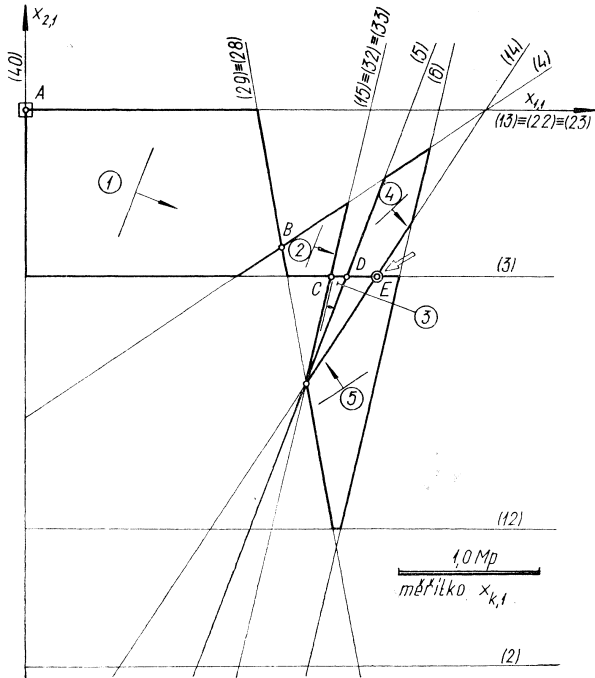


Obr. 1b. Soustava omezujících přímek pro pruty konstrukce z 1a.



Obr. 1c. Optimální staticky určitá konstrukce.

Uvažujeme-li znaménka nerovnosti, vymezuje nám každá přímka dvě poloroviny, z nichž v té či oné (podle toho, je-li prut tažen či tlačěn) mohou ležet přípustná řešení $(x_{1,1}^0, x_{2,1}^0)$. Podle rozložení znamének osových sil po konstrukci nalzáme přípustné řešení vždy v jiném mnohostranu. Průsečíky jednotlivých přímek představují základní



Obr. 2. Soustava konvexních mnohostranů pro konstrukci z obr. 1a.

řešení. Přes body, znázorňující základní řešení, lze tedy přejít do sousedního mnohostranu. V jednotlivých mnohostranech platí různé účelové funkce (5), jež je třeba minimalizovat; mění se v nich kombinace průřezových ploch $x_{j,2}$ a $\bar{x}_{j,2}$, vstupujících do vz. (5). Pro konstrukci 2krát staticky neurčitou jest

$$(12) \quad G = \sum_{j=1}^m \left\{ \begin{array}{l} 1/\alpha_j \\ -1/\bar{\alpha}_j \end{array} \right\} c_j (a_j + b_{1j}x_{1,1} + b_{2j}x_{2,1}).$$

Předpokládejme, že pruty jsou z téhož materiálu. Odhadneme-li předem součinitele vzpěrnosti pro tlačené pruty (jejichž odhad můžeme jistým způsobem zpřesnit – viz [7]), dostáváme místo vz. (12) účelovou funkci

$$(13) \quad \bar{G} = \sum_{j=1}^m \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -g_j \end{array} \right\} \bar{c}_j (a_j + b_{1j}x_{1,1} + b_{2j}x_{2,1}),$$

kde \bar{c}_j nyní značí jednotkovou délku prutu a ϑ_j je součinitel vzpěrnosti, který pro pruty délky l má odhadnutou hodnotu 2 a pro pruty délky $0,707l$ hodnotu 1,5.

Vyjděme od základní konstrukce — bez prutů 13 a 40; této konstrukci přísluší základní řešení, na obr. 2 znázorněné bodem A ($x_{1,1} = 0, x_{2,1} = 0$). Obr. 2 je částí obr. 1b, jež nás při řešení zajímá, ve zvětšeném měřítku. Stanovme \bar{G} pro jednu z oblastí, přímkykajících se k bodu A , např. pro oblast, označenou **1**. Výpočet je proveden ve sloupci **1** tab. 1, v níž tvoří

$$p = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\vartheta \end{Bmatrix} \bar{c}a, \quad p_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\vartheta \end{Bmatrix} \bar{c}b_1, \quad p_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\vartheta \end{Bmatrix} \bar{c}b_2$$

absolutní členy a koeficienty při $x_{1,1}$ a $x_{2,1}$ rovnic (13). Všechny přímky $\bar{G}_1 = 92 - 21x_{1,1} + 8,333x_{2,1}$ oblasti **1** jsou mezi sebou rovnoběžné a kolmé k vektoru V o složkách $(-21; 8,333)$.

Pro každou oblast platí, že výraz \bar{G} se zmenšuje, pohybujeme-li přímkou, znázorňující tento výraz, kolmou k příslušnému vektoru $V(\sum p_1, \sum p_2)$, ve smyslu opačném, než je kladný smysl tohoto vektoru. Na obr. 2 je v každé oblasti, jež nás bude zajímat, znázorněna jedna z přímek \bar{G} a vyznačen směr a smysl, v němž se výraz \bar{G} zmenšuje.

V oblasti **1** nabývá, jak je z obr. 2 patrné, výraz \bar{G}_1 své nejnižší hodnoty v bodě B , který je nejzazším přípustným bodem oblasti **1**, posuzováno s ohledem na směr a smysl zmenšování výrazu \bar{G}_1 . Bod B odpovídá konstrukci s nulovými průřezovými plochami prutů 4, 28 (a 29, v němž je osová síla lineárně závislá na osově síle v prutu 28). Představuje minimum oblasti **1**. Absolutní minimum může ležet buď jen ve druzhých dvou polorovinách určených přímkami (4) a (28) \equiv (29), protínajícími se v bodě B (tedy v oblasti **2**), nebo v bodě B , jestliže bude tento bod relativním minimem i v oblasti **2**.

Při přechodu přes přímky (4) a (28) \equiv (29) do nových polorovin přípustných řešení se mění znaménko osových sil v prutech 4, 28 a 29 a tím i výraz (13). Tento nový výraz \bar{G}_2 pro oblast **2** jest vypočten ve sloupci **2** tab. 1. V tomto sloupci není třeba vyplňovat řádky, jež se nezměnily. Lineární formu \bar{G}_2 vypočteme z \bar{G}_1 tak, že k němu přičteme ty řádky sloupce **2**, jež se změnily a odečteme odpovídající řádky sloupce **1**. Tyto doplňky jsou uvedeny v tab. 1 v řádce $\Delta\bar{G}$ s indexem oblasti, do níž přecházíme, tedy např. $\Delta\bar{G}_2$. Minimum oblasti **2** se zjistí graficky obdobně jako u oblasti **1**; leží v bodě C .

Postup opakujeme, dokud se neztotožní relativní minima na sebe navazujících sousedních oblastí. Na obr. 2 k tomu dojde v bodě E , jež udává absolutní minimální řešení

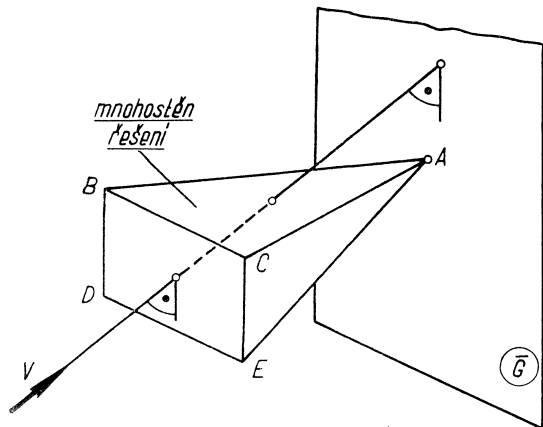
$$x_{3,2} \equiv \bar{x}_{3,2} = 0; \quad x_{14,2} \equiv \bar{x}_{14,2} = 0.$$

Při výše zvolených pevnostních konstantách α a $\bar{\alpha}$ má tedy nejnižší váhu staticky určitá konstrukce, v níž jsou pruty 3 a 14 nulové, obr. 1c. Protože jde o konstrukci staticky určitou, jsou tedy síly z vlivu předpětí $v_1 = v_2 = 0$. Souřadnice $(x_{1,1})_{\min}$

a $(x_{2,1})_{\min}$ bodu E zjistíme odečtením z obr. 2 či výpočtem z rovnic $y_3 = 0, y_{14} = 0$; dostáváme

$$(x_{2,1})_{\min} = -1,2 \text{ Mp} \quad \text{a} \quad (x_{1,1})_{\min} = 2,533 \text{ Mp} \quad \text{při} \quad Q = 1 \text{ Mp};$$

jinak jsou Q -krát větší. Z těchto sil můžeme nyní vypočítat osové síly y_j ostatních prutů. Na ně navrheme profily, jako plně využitě (což ovšem vzhledem k výrobním důvodům nebude pravděpodobně stoprocentně splněno).



Obr. 3. Konvexní mnohostěn konstrukce 3-krát staticky neurčitě.

Z výsledku lze vyvodit, že v sledovaném případě je nejlehčí příhradová konstrukce staticky určitá, nepředpjatá. Bývá tomu tak ve většině případů, neboť se stává pouze mimořádně, aby v předposlední a poslední oblasti byly přímky G rovnoběžné s přímkou, oddělující tyto oblasti. Ještě řidší pak bývá případ, kdy v poslední oblasti vyjde $\sum p_1 = 0$ a $\sum p_2 = 0$, což znamená, že jest $G = \text{konst.}$ pro celou oblast včetně hranic.

Jak již bylo uvedeno, je pro $n > 2$ grafické řešení obtížné či zcela nemožné. Poznatky získané pro 2-rozměrný prostor lze však bez obtíží rozšířit na prostory vícerozměrné

a získat tak dobrý přehled o úlohách, zabývajících se konstrukcemi vícekrát staticky neurčitými.

Pro konstrukce n -krát staticky neurčitě jsou prostory přípustných řešení n -rozměrné konvexní mnohostěny, navzájem na sebe navazující. Lineární formy \bar{G}_i , jež je třeba v jednotlivých mnohostěnech minimalizovat, jsou nadrovinami, kolnými k vektorům $V_i (\sum p_{1,i}, \sum p_{2,i}, \dots, \sum p_{n,i})$. Smysl zmenšování forem \bar{G}_i je opět opačný ke smyslu vektorů V_i . Nadroviny \bar{G}_i vycházejí za jednotlivé oblasti zpravidla opět přes jejich vrcholy a jen mimořádně přes útvary vícerozměrné. Pro ilustraci je na obr. 3 znázorněn jeden z 3-rozměrných mnohostěňů, příslušející nějaké 3-krát staticky neurčitě konstrukci, v němž rovina \bar{G} určuje jedno relativní maximální řešení A a nespočetně minimálních řešení v rovině $BEDE$.

6. POČETNÍ ŘEŠENÍ SIMPLEXOVOU METODOU

Z metod lineárního programování volíme k početnímu řešení našich úloh simplexovou metodu. Lze je ovšem řešit i jinými upravenými metodami (např. metodou inverzních matic [8], metodou vedoucích proměnných [1], metodou úplného popisu

[2] aj.). Simplexová metoda je vhodná pro svou jednoduchost a univerzální použitelnost, jakož i proto, že výpočty lze dobře provádět na samočinných počítačích.

Předpokládejme, že známe přípustné řešení soustavy (6). Řešme tedy tuto soustavu podle základních proměnných (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že to bude právě prvních m proměnných). Dostaneme

$$(14) \quad \begin{aligned} x_1 &= B_1 - (A_{1,m+1}x_{m+1} + A_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + A_{1,n+m}x_{n+m}), \\ x_2 &= B_2 - (A_{2,m+1}x_{m+1} + A_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + A_{2,n+m}x_{n+m}), \\ &\dots\dots\dots \\ x_m &= B_m - (A_{m,m+1}x_{m+1} + A_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + A_{m,n+m}x_{n+m}). \end{aligned}$$

V našich úlohách, jak již bylo uvedeno, dostáváme vyjádření základních proměnných přímo – bez řešení soustavy (6). Čísla B_i ($i = 1, 2, \dots, m$) jsou kladná, což plyne z toho, že při základním řešení, kde pokládáme nezákladní proměnné x_{m+i} ($i = 1, 2, \dots, n$) rovny nule, musí být proměnné x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) nezáporné.

Podobně vyjádříme i účelovou funkci L

$$(15) \quad L = C - (C_{m+1}x_{m+1} + C_{m+2}x_{m+2} + \dots + C_{n+m}x_{n+m}).$$

Jelikož jsou proměnné x_i nezáporné, bude se lineární forma L zmenšovat, budeme-li zvětšovat ty nezákladní proměnné x_{m+i} (i je některé z čísel $1, 2, \dots, n$), při nichž jsou koeficienty C_{m+i} kladné. Existuje-li několik nezákladních proměnných x_{m+i} , které je výhodné zvětšovat, můžeme začít u libovolné z nich, doporučuje se však začínat u proměnné buď s největším nebo nejmenším kladným koeficientem. Vybranou nezákladní proměnnou x_{m+r} můžeme zvětšovat jen potud, pokud žádná ze základních proměnných x_1, x_2, \dots, x_m v soustavě (14) nenabude nulové hodnoty a neodejde tím z báze. Jakmile se tak stane, nahradíme ji v bázi nezákladní proměnnou x_{m+r} .

Zvětšujeme proměnnou x_{m+r} od nuly až na hodnotu x_{m+r}^* . Základní proměnné x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) nabývají hodnot

$$(16) \quad x_i^* = B_i - A_{i,m+r}x_{m+r}^*.$$

Je-li $A_{i,m+r} < 0$, roste proměnná x_i a zůstává kladnou. Naopak při $A_{i,m+r} > 0$ se x_i zmenšuje a x_{m+r} lze zvětšovat nejvýše do hodnoty $B_i/A_{i,m+r}$, kdy $x_i = 0$. Protože žádná z proměnných x_i nemůže být záporná, položíme x_{m+r}^* rovno nejmenšímu z poměrů $B_i/A_{i,m+r}$ s kladnými jmenovateli. Nechť je tomu tak pro $i = t$. Při $x_{m+r} = B_t/A_{t,m+r}$ bude základní proměnná $x_t = 0$ a je možno ji vyloučit z báze, do níž naopak vstoupí proměnná x_{m+r} .

Vyjádříme nové základní proměnné novými proměnnými nezákladními a podobně i lineární formu L . Postup opakujeme, pokud se v účelové funkci L objevují při nezákladních proměnných kladné koeficienty C_{m+i} . Po konečném počtu transformací (neuvažujeme-li případ degenerace úlohy, kdy dochází k cyklické výměně proměnných v bázi) dosáhneme toho, že v lineární formě L budou všechna $C_{m+i} \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; pak již nemá smysl nezákladní proměnné x_{m+i} zvětšovat. Tím jsme

dospěli k optimálnímu řešení, v němž položíme výsledné nezákladní proměnné rovny nule, základní proměnné x_i budou pak rovny příslušným B_i a lineární forma L číslu C .

V našich úlohách je tím dáno relativní minimum některé oblasti. Přes něj musíme nyní přejít do sousední oblasti, v níž nalezené minimum tvoří základní řešení. Zjistíme lineární formu $L (\equiv G)$ pro sousední oblast a v řešení pokračujeme. K absolutnímu minimu dospějeme, až se ztotožní relativní minima sousedních oblastí, což je vyjádřeno tím, že lineární formy L zjištěné pro tyto oblasti mají pouze záporné součinitele C_{m+i} při nezákladních proměnných x_{m+i} .

Příklad na simplexovou metodu

Řešme příklad z odst. 5. Vyjděme opět ze základní konstrukce, obr. 1a; základní řešení je dáno tím, že nezákladní proměnné $x_{1,1} = 0$ a $x_{2,1} = 0$. Vyšetřování začneme např. v oblasti **1**: Znaménka osových sil v jednotlivých prutech zjistíme při $x_{1,1} = 0 + \varepsilon$ a $x_{2,1} = 0 - \varepsilon$ (ε malé kladné číslo). Napíšeme soustavu (10) v soulase se zjištěnými znaménky osových sil. Za základní proměnné $x_{j,2}$ vezmeme v tomto případě součiny jednotlivých průřezových ploch a výpočtových mezí průtažnosti. Nezákladními proměnnými jsou síly ve zbytných prutech $x_{1,1}$ a $x_{2,1}$. Protože v oblasti **1** (i v dalších sledovaných oblastech) jest $x_{2,1} \leq 0$, použijeme zjednodušené substituce (9) a zavedeme $x_{2,1} = -x'_{2,1}$, $x'_{2,1} \geq 0$. Po vyškrtnutí lineárně závislých rovnic máme soustavu, zapsanou v 1. sloupci tab. 2 spolu s lineární formou \bar{G} (vz. (13)), a to tak, že úprava tabulky odpovídá obecné úpravě rovnic soustavy (14): koeficienty při nezákladních proměnných mají znaménka jako koeficienty $A_{i,m+i}$ v závorce, před níž je znaménko minus.

V lineární formě \bar{G} jsou koeficienty při obou nezákladních proměnných kladné; možno tedy zavést do báze buď $x_{1,1}$ nebo $x'_{2,1}$. Vybereme si $x_{1,1}$. Touto proměnnou nahradíme v bázi proměnnou, jež je určena podle výše uvedeného pravidla — proměnnou $x_{28,2}$.

Transformujeme nyní soustavu zapsanou v 1. sloupci tab. 2 tak, abychom měli základní proměnné i lineární formu \bar{G} vyjádřeny pomocí nových nezákladních proměnných $x_{28,2}$ a $x'_{2,1}$. Tato transformovaná soustava je zapsána ve 2. sloupci. Transformaci provádíme podle vzoru uvedeného v tab. 3.

Ve 2. sloupci je v lineární formě \bar{G} kladný koeficient při $x'_{2,1}$. V soulase s předepsaným postupem vymění proměnná $x'_{2,1}$ v bázi proměnnou $\bar{x}_{4,2}$. Provedená transformace nové soustavy je uvedena ve sloupci 3. Tím jsme obdrželi v oblasti **1** relativní minimum.

Přejdeme tedy do oblasti **2**, kde dosažené minimum je základním řešením. Změní-li se nyní znaménka osových sil v prutech 4 a 28, objeví se v lineární formě \bar{G} při nezákladních proměnných opět kladné koeficienty a proces minimalizace může pokračovat.

Jelikož jest $\bar{x}_{28,2} = -1,5x_{28,2}$ a $x_{4,2} = -\frac{1}{2}\bar{x}_{4,2}$ dostaneme hodnoty 4. sloupce v kolonce $\bar{x}_{28,2}$ a $x_{4,2}$ přenásobením odpovídajících kolonek 3. sloupce čísly $-1,5$ a $-\frac{1}{2}$. Při výpočtu lineární formy \bar{G} pro 4. sloupec je třeba připomenout, že síly

Tab. 1. Stanovení lineární

1				2				3				prut
prut	p	p_1	p_2	prut	p	p_1	p_2	prut	p	p_1	p_2	prut
$\bar{1}$	2	0	0,333									
$\bar{2}$	4	0	1									
$\bar{3}$	2	0	1,667					$\bar{3}$	-1	0	-0,833	$\bar{3}$
$\bar{4}$	4	-1,2	1,8	4	-2	0,6	-0,9					5
$\bar{5}$	10	-3,6	1,4									
$\bar{6}$	12	-4	1									
$\bar{7}$	10	-2,4	0,6									
$\bar{8}$	4	-0,8	0,2									
11	2	0	0,333									
12	2	0	0,667									
13	0	0	-2									
14	4	-1,2	0,8									
15	6	-2,4	0,6					$\bar{15}$	-12	4,8	-1,2	
16	6	-1,6	0,4									
17	4	-0,8	0,2									
20	1	0	0,167									
21	1,5	0	0,25									
22	0	0	-0,25									
23	0	0	-0,167									
24	1,5	0	-0,25									
25	1	0	-0,167									
26	2	-0,6	-0,1									
27	3	-0,9	-0,15									
28	1	-0,6	-0,1	$\bar{28}$	-1,5	0,9	0,15					
29	1,5	-0,9	-0,15	29	-1,0	0,6	0,1					
30	0	0,4	-0,1									
31	0	0,6	-0,15									
32	1,5	-0,6	0,15					32	-1	0,4	-0,1	
33	1	-0,4	0,1					33	-1,5	0,6	-0,15	
34	3	-0,6	0,15									
35	2	-0,4	0,1									
40	0	1	0									
				\bar{G}_1	92	-21	8,333	\bar{G}_2	81	-16,2	6,133	\bar{G}_3
				$\Delta\bar{G}_2$	-11	4,8	-2,2	$\Delta\bar{G}_3$	-26	9,2	-4,8	$\Delta\bar{G}$
				\bar{G}_2	81	-16,2	6,133	\bar{G}_3	55	-7	1,333	\bar{G}

Tab. 1. Stanovení lineárních forem

1				2				3					
prut	p	p_1	p_2	prut	p	p_1	p_2	prut	p	p_1	p_2	prut	p
$\bar{1}$	2	0	0,333										
$\bar{2}$	4	0	1										
$\bar{3}$	2	0	1,667					$\bar{3}$	-1	0	-0,833	$\bar{3}$	2
$\bar{4}$	4	-1,2	1,8	4	-2	0,6	-0,9					5	-5
$\bar{5}$	10	-3,6	1,4										
$\bar{6}$	12	-4	1										
$\bar{7}$	10	-2,4	0,6										
$\bar{8}$	4	-0,8	0,2										
11	2	0	0,333										
12	2	0	0,667										
13	0	0	-2										
14	4	-1,2	0,8										
15	6	-2,4	0,6					$\bar{15}$	-12	4,8	-1,2		
16	6	-1,6	0,4										
17	4	-0,8	0,2										
20	1	0	0,167										
21	1,5	0	0,25										
22	0	0	-0,25										
23	0	0	-0,167										
24	1,5	0	-0,25										
25	1	0	-0,167										
26	2	-0,6	-0,1										
27	3	-0,9	-0,15										
28	1	-0,6	-0,1	$\bar{28}$	-1,5	0,9	0,15						
29	1,5	-0,9	-0,15	29	-1,0	0,6	0,1						
30	0	0,4	-0,1										
31	0	0,6	-0,15										
32	1,5	-0,6	0,15					32	-1	0,4	-0,1		
33	1	-0,4	0,1					33	-1,5	0,6	-0,15		
34	3	-0,6	0,15										
35	2	-0,4	0,1										
40	0	1	0										
				\bar{G}_1	92	-21	8,333	\bar{G}_2	81	-16,2	6,133	\bar{G}_3	55
				$\Delta\bar{G}_2$	-11	4,8	-2,2	$\Delta\bar{G}_3$	-26	9,2	-4,8	$\Delta\bar{G}_4$	-12
				\bar{G}_2	81	-16,2	6,133	\bar{G}_3	55	-7	1,333	\bar{G}_4	43

1 forem \bar{G}

4		
p	p_1	p_2
2	0	1,667
-5	1,8	-0,7
55	-7	1,333
-12	5,4	0,4
43	-1,6	1,733

5			
prut	p	p_1	p_2
$\bar{3}$	-1	0	-0,833
$\bar{14}$	-8	2,4	-1,6
\bar{G}_4	43	-1,6	1,733
$\Delta\bar{G}_5$	-15	3,6	-4,9
\bar{G}_5	28	2	-3,167

D			
prut	p	p_1	p_2
$\bar{3}$	-1	0	-0,833
4	-2	0,6	-0,9
\bar{G}_1	92	-21	8,333
$\Delta\bar{G}_D$	-9	1,8	-5,2
\bar{G}_D	83	-19,2	3,133

Oblast 1

Sloupec 1.			
		$x_{1,1}$	$x'_{2,1}$
$\bar{x}_{1,2}$	2	0	0,333
$\bar{x}_{2,2}$	4	0	1
$\bar{x}_{3,2}$	2	0	1,667
$\bar{x}_{4,2}$	4	1,2	1,8
$\bar{x}_{5,2}$	10	3,6	1,4
$\bar{x}_{6,2}$	12	4	1
$\bar{x}_{7,2}$	10	2,4	0,6
$\bar{x}_{8,2}$	4	0,8	0,2
$x_{12,2}$	2	0	0,667
$x_{14,2}$	4	1,2	0,8
$x_{15,2}$	6	2,4	0,6
$x_{16,2}$	6	1,6	0,4
$x_{26,2}$	2,828	0,849	-0,141
$x_{28,2}$	1,414	0,849	-0,141
$x_{30,2}$	0	-0,566	-0,141
\bar{G}	92	21	8,333

Sloupec 2.			
		$x_{28,2}$	$x'_{2,1}$
$\bar{x}_{1,2}$	2	0	0,333
$\bar{x}_{2,2}$	4	0	1
$\bar{x}_{3,2}$	2	0	1,667
$\bar{x}_{4,2}$	2	-1,414	2
$\bar{x}_{5,2}$	4	-4,243	2
$\bar{x}_{6,2}$	5,333	-4,714	1,667
$\bar{x}_{7,2}$	6	-2,828	1
$\bar{x}_{8,2}$	2,667	-0,943	0,333
$x_{12,2}$	2	0	0,667
$x_{14,2}$	2	-1,414	1
$x_{15,2}$	2	-2,828	1
$x_{16,2}$	3,333	-1,886	0,667
$x_{26,2}$	1,414	-1	0
$x_{1,1}$	1,667	1,179	-0,167
$x_{30,2}$	0,943	0,667	-0,235
\bar{G}	57	-24,748	11,833

Sloupec 3.			
		$x_{28,2}$ ($\bar{x}_{28,2}$)	\bar{x}_i (x_i)
$\bar{x}_{1,2}$	1,667	0,236	-0
$\bar{x}_{2,2}$	3	0,707	-0
$\bar{x}_{3,2}$	0,333	1,178	-0
$\bar{x}'_{2,1}$	1	-0,707	0
$\bar{x}_{5,2}$	2	-2,828	-
$\bar{x}_{6,2}$	3,667	-3,535	-0
$\bar{x}_{7,2}$	5	2,121	-0
$\bar{x}_{8,2}$	2,333	-0,707	-0
$x_{12,2}$	1,333	0,471	-0
$x_{14,2}$	1	-0,707	-0
$x_{15,2}$	1	-2,121	-0
$x_{16,2}$	2,667	-1,414	-0
$x_{26,2}$	1,414	-1	-
$x_{1,1}$	1,833	1,061	0,1
$x_{30,2}$	1,178	0,5	0,
\bar{G}	45,167	-16,381	-5
(\bar{G})	45,167	8,563	8

↑

↑

Tab. 2. Vyhledávání optimálních parametrů konstrukce podle obr. 1a simplexovou metodou

3.		Oblast 2												
		Sloupec 4.				Sloupec 5.				Sloupec 6.				
.2 ,2)	$\bar{x}_{4,2}$ ($x_{4,2}$)			$\bar{x}_{28,2}$	$x_{4,2}$			$\bar{x}_{28,2}$	$\bar{x}_{3,2}$			$x_{15,2}$ ($\bar{x}_{15,2}$)	$\bar{x}_{3,2}$ ($x_{3,2}$)	
36	-0,167	$\bar{x}_{1,2}$	1,667	-0,157	0,333	$\bar{x}_{1,2}$	1,6	0	-0,2	$\bar{x}_{1,2}$	1,6	0	-0,2	\bar{x}_1
07	-0,5	$\bar{x}_{2,2}$	3	-0,471	1	$\bar{x}_{2,2}$	2,8	0	-0,6	$\bar{x}_{2,2}$	2,8	0	-0,6	\bar{x}_2
78	-0,833	$\bar{x}_{3,2}$	0,333	-0,786	1,667	$x_{4,2}$	0,2	-0,417	0,6	$x_{4,2}$	0,4	0,25	0,45	x_4
707	0,5	$x'_{2,1}$	1	0,471	-1	$x'_{2,1}$	1,2	0	0,6	$x'_{2,1}$	1,2	0	0,6	x'_2
828	-1	$\bar{x}_{5,2}$	2	1,886	2	$\bar{x}_{5,2}$	1,6	2,828	-1,2	$\bar{x}_{5,2}$	0,4	-1,5	-0,3	\bar{x}_1
535	-0,833	$\bar{x}_{6,2}$	3,667	2,857	1,667	$\bar{x}_{6,2}$	3,333	3,143	-1	$\bar{x}_{6,2}$	2	-1,667	0	\bar{x}_6
121	-0,5	$\bar{x}_{7,2}$	5	1,414	1	$\bar{x}_{7,2}$	4,8	1,886	-0,6	$\bar{x}_{7,2}$	4	-1	0	\bar{x}_7
707	-0,167	$\bar{x}_{8,2}$	2,333	0,471	0,333	$\bar{x}_{8,2}$	2,267	0,629	-0,2	$\bar{x}_{8,2}$	2	-0,333	0	\bar{x}_8
471	-0,333	$x_{12,2}$	1,333	-0,314	0,667	$x_{12,2}$	1,2	0	-0,4	$x_{12,2}$	1,2	0	-0,4	x_1
707	-0,5	$x_{14,2}$	1	0,471	1	$x_{14,2}$	0,9	0,942	-0,6	$x_{14,2}$	0,4	-0,5	-0,3	x_1
121	-0,5	$x_{15,2}$	1	1,414	1	$x_{15,2}$	0,8	1,886	-0,6	$\bar{x}_{28,2}$	0,424	0,53	-0,318	\bar{x}_2
414	-0,333	$x_{16,2}$	2,667	0,943	0,667	$x_{16,2}$	2,5	1,257	-0,4	$x_{16,2}$	2	-0,667	0	x_1
1	0	$x_{26,2}$	1,414	0,667	0	$x_{26,2}$	1,414	0,667	0	$x_{26,2}$	1,131	-0,354	0,212	x_2
61	0,083	$x_{1,1}$	1,833	-0,707	-0,167	$x_{1,1}$	1,867	-0,786	0,1	$x_{1,1}$	2,2	0,417	-0,15	x_1
5	0,118	$x_{30,2}$	1,178	-0,333	-0,236	$x_{30,2}$	1,226	-0,444	0,141	$x_{30,2}$	1,414	0,236	0	x_3
381	-5,917	\bar{G}	45,167	8,563	8,833	\bar{G}	43,4	12,727	-5,3	\bar{G}	38	-6,75	-1,25	(
563	8,833									(\bar{G})	38	1,458	-0,5	((

metodou

				Oblast 3				Oblast 4			
Sloupec 6.				Sloupec 7.				Sloupec 8.			
		$x_{15,2}$ ($\bar{x}_{15,2}$)	$\bar{x}_{3,2}$ ($x_{3,2}$)			$\bar{x}_{5,2}$ ($x_{5,2}$)	$x_{3,2}$ ($\bar{x}_{3,2}$)			$x_{14,2}$ ($\bar{x}_{14,2}$)	$\bar{x}_{3,2}$ ($x_{3,2}$)
$\bar{x}_{1,2}$	1,6	0	-0,2	$\bar{x}_{1,2}$	1,6	0	0,4	$\bar{x}_{1,2}$	1,6	0	-0,2
$\bar{x}_{2,2}$	2,8	0	-0,6	$\bar{x}_{2,2}$	2,8	0	1,2	$\bar{x}_{2,2}$	2,8	0	-0,6
$x_{4,2}$	0,4	0,25	0,45	$x_{4,2}$	0,467	0,167	-0,8	$x_{4,2}$	0,6	0,5	0,3
$x'_{2,1}$	1,2	0	0,6	$x'_{2,1}$	1,2	0	-1,2	$x'_{2,1}$	1,2	0	0,6
$\bar{x}_{5,2}$	0,4	-1,5	-0,3	$\bar{x}_{15,2}$	0,533	1,333	0,8	$\bar{x}_{15,2}$	1,6	4	-1,2
$\bar{x}_{6,2}$	2	-1,667	0	$\bar{x}_{6,2}$	1,555	-1,111	-0,667	$\bar{x}_{6,2}$	0,667	-3,333	1
$\bar{x}_{7,2}$	4	-1	0	$\bar{x}_{7,2}$	3,733	-0,667	-0,4	$\bar{x}_{7,2}$	3,2	-2	0,6
$\bar{x}_{8,2}$	2	-0,333	0	$\bar{x}_{8,2}$	1,911	-0,222	-0,133	$\bar{x}_{8,2}$	1,733	-0,667	0,2
$x_{12,2}$	1,2	0	-0,4	$x_{12,2}$	1,2	0	0,8	$x_{12,2}$	1,2	0	-0,4
$x_{14,2}$	0,4	-0,5	-0,3	$x_{14,2}$	0,267	-0,333	0,4	$x_{5,2}$	0,4	1,5	-0,3
$\bar{x}_{28,2}$	0,424	0,53	-0,318	$\bar{x}_{28,2}$	0,566	0,354	0,849	$\bar{x}_{28,2}$	0,849	1,06	-0,636
$x_{16,2}$	2	-0,667	0	$x_{16,2}$	1,822	-0,444	-0,267	$x_{16,2}$	1,467	-1,333	0,4
$x_{26,2}$	1,131	-0,354	0,212	$x_{26,2}$	1,037	-0,236	-0,566	$x_{26,2}$	0,849	-0,707	0,424
$x_{1,1}$	2,2	0,417	-0,15	$x_{1,1}$	2,311	0,278	0,467	$x_{1,1}$	2,533	0,833	-0,4
$x_{30,2}$	1,414	0,236	0	$x_{30,2}$	1,477	0,157	0,094	$x_{30,2}$	1,603	0,471	-0,141
\bar{G}	38	-6,75	-1,25	\bar{G}	37,222	-1,944	-1,667	\bar{G}	35,667	-1,332	-0,4
(\bar{G})	38	1,458	-0,5	(\bar{G})	37,222	0,888	-0,667	(\bar{G})	35,667	-0,834	-2,2

Tab. 3. Simplexová tabulka

1	$x_{m+1} \dots$	$x_{m+r} \dots$	x_{m+n}
x_1	$A_{1,m+1}$	$A_{1,m+r}$	$A_{1,m+n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_t	$A_{t,m+1}$	$A_{t,m+r}$	$A_{t,m+n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	$A_{m,m+1}$	$A_{m,m+r}$	$A_{m,m+n}$
L	C_{m+1}	C_{m+r}	C_{m+n}

$x_{m+r} \dots$ nezákladní proměnná s nejmenším nebo největším z kladných koeficientů C_{m+i}
 x_t ... základní proměnná s nejmenším poměrem $\frac{B_t}{A_{t,m+r}}$

Výpočet po sloupcích

Výpočet po řádcích

2	$x_{m+1} \dots$	$x_t \dots$	x_{m+n}
x_1	$B_1 + \alpha_1 B_t$	$A_{1,m+1} + \alpha_1 A_{t,m+1}$	$\alpha_1 A_{1,m+n} + \alpha_1 A_{t,m+n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{m+r}	$\alpha_t B_t$	$\alpha_t A_{t,m+1}$	$\alpha_t A_{t,m+n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	$B_m + \alpha_m B_t$	$A_{m,m+1} + \alpha_m A_{t,m+1}$	$\alpha_m A_{m,m+n} + \alpha_m A_{t,m+n}$
L	$C + \alpha B_t$	$C_{m+1} + \alpha A_{t,m+1}$	$\alpha C_{m+n} + \alpha A_{t,m+n}$

$\alpha_i = -\frac{A_{i,m+r}}{A_{t,m+r}}$ pro $i = 1, 2, \dots, m, i \neq t$;
 $\alpha_t = \frac{C_{m+r}}{A_{t,m+r}}$

2	$x_{m+1} \dots$	$x_t \dots$	x_{m+n}
x_1	$B_1 + \beta A_{1,m+r}$	$A_{1,m+1} + \beta A_{1,m+r}$	$\beta A_{1,m+r} + A_{1,m+n} + \beta A_{t,m+r}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{m+r}	$-\beta$	$-\beta A_{t,m+r}$	$-\beta A_{t,m+n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_m	$B_m + \beta A_{m,m+r}$	$A_{m,m+1} + \beta A_{m,m+r}$	$\beta A_{m,m+r} + A_{m,m+n} + \beta A_{t,m+r}$
L	$C + \beta C_{m+r}$	$C_{m+1} + \beta A_{t,m+r}$	$\beta C_{m+r} + C_{m+n} + \beta A_{t,m+r}$

$\beta_j = -\frac{A_{t,m+j}}{A_{t,m+r}}$ pro $j = 1, 2, \dots, n, j \neq r$;
 $\beta_r = -\frac{1}{A_{t,m+r}}$; $\beta = -\frac{B_t}{A_{t,m+r}}$

v prutech 28 a 29 jsou lineárně závislé. Mění se tedy $\bar{x}_{29,2}$ na $x_{29,2}$. Dostáváme

$$\bar{G} = 45,167 - (8,563\bar{x}_{28,2} + 8,833x_{4,2}).$$

Podle předepsaného algoritmu výměni ve sloupci 5 proměnná $x_{4,2}$ v bázi proměnnou $\bar{x}_{3,2}$ a ve sloupci 6 proměnná $\bar{x}_{28,2}$ proměnnou $x_{15,2}$.

Sloupec 5 bychom mohli dostat rovnou ze sloupce 3 tak, že ve sloupci 3 napíšeme pod řádek \bar{G} ještě řádek (\bar{G}) platný pro 4. sloupec. Jelikož v něm jsou nezákladními proměnnými proměnné $\bar{x}_{28,2}$ a $x_{4,2}$, zapišme tyto do závorek v záhlaví pod proměnné $x_{28,2}$ a $\bar{x}_{4,2}$. Nyní normálním postupem určíme proměnnou, která odejde z báze – v našem případě proměnná $\bar{x}_{3,2}$. Transformace se provede normálně až na kolonku pro $\bar{x}_{28,2}$, kde musíme obdržené hodnoty přenásobit poměrem $x_{28,2} : \bar{x}_{28,2} = -1/1,5$. Dále pak číslo, stojící v 5. sloupci na místě, odpovídajícím poloze centrálního prvku v 3. sloupci, je převratná hodnota centrálního členu, dělená poměrem $\bar{x}_{4,2}/x_{4,2} = -2$, udávaným záhlavím proškrtnuté kolonky 3. sloupce. V řádce \bar{G} sloupce 5 se počítá podle uvedených pravidel pouze absolutní člen. Naopak koeficient při nové nezákladní proměnné $\bar{x}_{3,2}$ je třeba rovněž dělit číslem -2 , udávaným záhlavím odpovídající kolonky v 3. sloupci. V kolonkách s koeficienty u ostatních nezákladních proměnných (v našem případě je to jen $\bar{x}_{28,2}$) násobíme poměrem udávaným záhlavím odpovídající kolonky 3. sloupce (u nás $x_{28,2}/\bar{x}_{28,2} = -1/1,5$) pouze druhý ze sčítanců, nikoliv tedy oba sčítance jako v ostatních řádcích. V našem případě např. dostaneme

$$8,563 + (-5,3) \cdot 1,178 \cdot \frac{1}{-1,5} = 12,727.$$

Pokračujeme obdobným způsobem pro další oblasti. Výpočet končí dosažením absolutního minima, v němž se ztotožní relativní minima sousedních oblastí. K tomu dojde, když v řádce \bar{G} předchází a následující oblasti jsou při nezákladních proměnných záporné koeficienty. Položíme-li tyto nezákladní proměnné rovny nule, nabývá \bar{G} svého absolutního minima. V našem případě pro oblast **4**, sloupec 8

$$\bar{G} = 35,667 - (-1,332x_{14,2} - 0,4\bar{x}_{3,2})$$

a pro sousední oblast **5**, již v tabulce 2 odpovídá sloupec 9

$$\bar{G} = 35,667 - (0,834\bar{x}_{14,2} - 2,2x_{3,2}).$$

V optimální konstrukci budou mít pruty 3 a 14 nulové průřezové plochy, optimální velikost sil $x_{k,1}$ jest

$$(x_{1,1})_{\min} = 2,533 \text{ Mp}; \quad (x_{2,1})_{\min} = -(x'_{2,1})_{\min} = -1,2 \text{ Mp}.$$

Výsledky získané simplexovou metodou souhlasí s výsledky grafického řešení.

V problémech, v nichž nelze snadno nalézt výchozí řešení a je třeba řešit soustavu (6) pro základní proměnné, užíváme s výhodou metody umělých vektorů. Tato metoda spolu s problémem odstranění degenerace úlohy a s užitím kontrolního testu pro výpočet je uvedena v [7].

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] *Beale, E. M. L.*: An alternative method for linear programming. Proc. Cambridge Philos. Soc. 50, 4, 1954.
- [2] *Dorfman, R. - Samuelson, P. A. - Solow, R. M.*: Linear Programming and Economic Analysis. Mc Graw-Hill, 1958.
- [3] *Habr, J.*: Lineární programování. SNTL, Praha 1961.
- [4] *Piras, Z.*: Aplikace lineárního programování a užití samočinných počítačů při výzkumu stavebních konstrukcí, Stavební ústav ČVUT, Praha 1963.
- [5] *Piras, Z. - Machan, P.*: Řešení prutových konstrukcí staticky neurčitých metodou lineárního programování. Stavebnický časopis SAV, IX, 5–6, 1961.
- [6] *Tocháček, M.*: Předpjaté kovové konstrukce, zvláště příhradové. ÚTAM ČSAV, Praha 1960.
- [7] *Tocháček, M.*: Předpjaté kovové konstrukce. 1. Konstrukce s pruty plně využitými. ÚTAM ČSAV, Praha 1961.
- [8] *VAJDA, S.*: Theory of Games and Linear Programming, Methuen, London 1957.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТАЛЬНЫХ ФЕРМ

ЗДЕНЕК ПИРАС (ZDENĚK PIRAS), МИЛОСЛАВ ТОХАЧЕК (MILOSLAV TOCHÁČEK)

При решении статически неопределимых ферм мы можем получить бесконечное число не одинаково удобных решений. Если мы введем в качестве критерия оптимальности требование наименьшего объема или веса (или наименьшей стоимости или наибольшей несущей способности итд.), мы можем по до сих пор существовавшему способу предложить несколько вариантов и выбрать наилучший вариант. Применение линейного программирования позволяет уточненный расчет конструкции.

Условия прочности определяют для конструкций n -раз статически неопределимых ферм систему m уравнений (или неравенств) с $n + m$ неизвестными, где неизвестными являются площади поперечных сечений и силы в лишних связях. Величина веса, которую мы хотим минимализировать, является линейной функцией площадей поперечных сечений. Следовательно, эта проблема разрешима методом линейного программирования.

В отличие от обычных задач линейного программирования мы должны в наших задачах всегда определить характер знака сил в лишних связях, чтобы выполнить требование неотрицательности переменных. Преимуществом является факт, что в уравнениях (неравенствах) существует почти всегда только одна базисная переменная, так что исходное решение не нужно искать. Главным отличием наших задач от обычных является то обстоятельство, что мы должны искать оптимум в нескольких друг на друга навязывающих областях, в то время как в обычных задачах мы ищем оптимум только в одной области. В нашем случае мы переходим через найденное относительное оптимальное значение одной области в другую область, и при этом оптимальное решение первой области

определяет автоматически исходное решение в следующей области. Мы получим глобальное оптимальное значение, если совпадают относительные оптимальные значения двух соседних областей.

В статье изложен графический метод решения, удобный для дважды статически неопределимых конструкций. Для более сложных конструкций нужно применить вычислительный метод. Для этого выбран симплексный метод линейного программирования. Практическое применение метода иллюстрировано примером.

Summary

USE OF LINEAR PROGRAMMING FOR DESIGN OF METAL TRUSSES

ZDENĚK PIRAS, MILOSLAV TOCHÁČEK

When designing the statically indeterminate trusses we can obtain an infinite number of variously suitable solutions. If we introduce as an optimizing criterion the requirement of minimum volume or weight (resp. minimum cost or maximum carrying capacity etc.) we shall obtain, using the usual method of design, a limited number of variants and choose the best one. The use of linear programming makes it possible to obtain the more precise design.

For n -times statically indeterminate structures, the strength conditions determine a system of m equations (inequalities resp.) for $n + m$ unknowns where the unknowns are the sectional areas and the forces in redundancies. The weight quantity which we intend to minimize is a function of sectional areas. This is a problem we can solve by the method of linear programming.

In contradistinction to usual programming problems, we always have to determine the character of forces in redundancies with respect to the sign to satisfy the requirement of non-negativity of the variables. It is an advantage that almost without exception only one basic variable occurs in the equations (inequalities) and, therefore, we have not to seek an initial solution. The fundamental difference of our problems to the usual ones is the fact that, while we seek the optimum in only one area, here we have to seek it in several contacting areas. We pass over the found relative optimum of one area into the other one and at the same time the optimum solution of the first area determines automatically the initial solution in the following area. We reach the absolute optimum when the relative optimum values of two contacting areas are identical.

A graphic method of solution suitable for twice statically indeterminate structures is discussed in this paper. For more complicated structures a numerical method is to be used. For this purpose simplex method of linear programming was chosen. The practical utilization of this method is illustrated by an example.

Adresy autorů: Prom. mat. Zdeněk Piras CSc, Stavební ústav ČVUT, Šolínova 7, Praha 6 - Dejvice. — Ing. Miloslav Tocháček CSc, dtto.