

Aplikace matematiky

Karel Beneš

Vliv driftu a mřížkového proudu u počítačích stejnosměrných zesilovačů na přesnost řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 5, 399–409

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103045>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VLIV DRIFTU A MŘÍŽKOVÉHO PROUDU U POČÍTAČÍCH
STEJNOSMĚRNÝCH ZESILOVAČŮ NA PŘESNOST ŘEŠENÍ
LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC
S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

KAREL BENEŠ

(Došlo dne 20. května 1965.)

Vlivem změn anodových a žhavicích napětí, dále vlivem změn hodnot součástí počítačích stejnosměrných zesilovačů i vlivem stárnutí elektronek nastává kolísání výstupního napětí zesilovače. Na výstupu zesilovače se objevuje určité chybové napětí i při uzemněném vstupu zesilovače, tzv. drift. Podobný účinek vyvolává i mřížkový proud prvé elektrony zesilovače. Tento drift a mřížkový proud mají vliv na přesnost řešení úlohy, a jak uvidíme dále, tento vliv driftu a mřížkového proudu závisí na výsledku řešení dané úlohy.

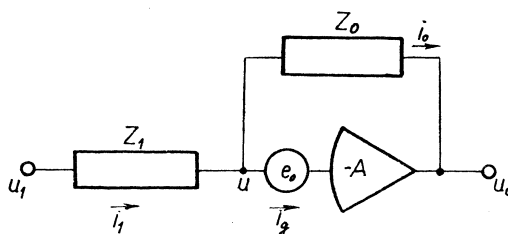
1. VLIV DRIFTU A MŘÍŽKOVÉHO PROUDU NA VÝSTUPNÍ NAPĚTÍ ZESILOVAČE

Vztah mezi výstupním napětím počítačeho zesilovače u_0 , vstupním napětím u_1 , rušivým napětím na mřížce zesilovače e_0 a mřížkovým proudem i_g určíme z obou Kirchhoffových zákonů (obr. 1)

$$u = -\frac{u_0}{A} - e_0$$

a

$$(1) \quad u_0 = -\frac{Z_0}{Z_1} u_1 - e_0 \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1}\right) + i_g Z_0$$



Obr. 1. Náhradní schéma počítačej jednotky.

(za předpokladu $|A| \rightarrow \infty$). Chybové napětí vlivem driftu a mřížkového proudu v případě invertoru, kdy vstupní a zpětnovazební impedance jsou ohmické odpory, je

$$(2) \quad \Delta u = -e_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right) + i_g R_0$$

a v případě integrační jednotky, kdy vstupní impedance $Z_1 = R$ a zpětnovazební impedance vyjádřena v operátorovém tvaru $Z_0 = 1/CP$, je chybové napětí

$$(3) \quad \Delta u = -e_0 - \frac{1}{RC} \int_0^t e_0 dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_g dt .$$

Chybová napětí pro sčítací jednotku a sčítací integrátor jsou potom dána výrazy

$$(4) \quad \Delta u = -e_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{R_0}{R_i} \right) + i_g R_0$$

pro sčítací jednotku a

$$(5) \quad \Delta u = -e_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} \int_0^t e_0 dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_g dt$$

pro sčítací integrátor.

Vliv prvního členu na pravé straně rovnice (3) a (5) můžeme vůči druhému a třetímu členu celkem zanedbat. Ve výrazech (3a) a (5a) pro e_r se tím dopouštíme chyby $e_0(1/T)$, kde T je celková doba integrace. Nahraďme dále počítací jednotku s driftem a mřížkovým proudem ideální jednotkou bez driftu a mřížkového proudu s takovým rušivým napětím e_r na vstupu, aby jeho účinek byl stejný jako účinek driftu a mřížkového proudu reálné jednotky. Pro dříve uvažované případy tedy platí

$$(2a) \quad e_r = e_0 \left(1 + \frac{R_0}{R_1} \right) - i_g R_0 \quad \text{pro invertor ,}$$

$$(3a) \quad e_r = \frac{1}{C} \left(\frac{e_0}{R} - i_g \right) \quad \text{pro integrátor ,}$$

$$(4a) \quad e_r = e_0 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{R_0}{R_i} \right) - i_g R_0 \quad \text{pro sčítací jednotku ,}$$

$$(5a) \quad e_r = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} e_0 - \frac{1}{C} i_g \quad \text{pro sčítací integrátor .}$$

Ve všech těchto případech jsme předpokládali, že vstupy počítacích jednotek s napětím e_r mají přenos resp. koeficient integrace roven -1 .

2. VLIV DRIFTU A MŘÍŽKOVÉHO PROUDU NA PŘESNOST ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

a) S vynulovanou jednotkou:

Řešením diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' + ay = 0$$

při počáteční podmínce $y_{(0)} = P_0$ je funkce

$$(6) \quad y = P_0 e^{-at}.$$

b) S roznulovanou jednotkou:

Schéma (obr. 2) je popsáno rovnicí

$$Y = -a \int_0^t Y dt - e_r \int_0^t dt + Y_{(0)},$$

po derivaci podle času

$$Y' + aY = -e_r$$

a výstupní napětí jednotky

$$(7) \quad Y = C e^{-at} - \frac{e_r}{a}.$$

Zavedeme-li počáteční podmínku nastavením výstupního napětí integrátoru na požadovanou hodnotu počáteční podmínky, potom výstupní napětí jednotky bude

$$(8) \quad Y = \left(P_0 + \frac{e_r}{a} \right) e^{-at} - \frac{e_r}{a}.$$

Chyba způsobená roznulováním jednotky je potom dána rozdílem výstupních napětí roznulované jednotky a jednotky znulované.

$$(9) \quad \delta(y) = Y - y = \frac{e_r}{a} (e^{-at} - 1).$$

Z tohoto výsledku plyne, že pro $a > 0$ chyba narůstá v absolutní hodnotě s časem ke své maximální hodnotě

$$|\delta(y)| \max = \left| \frac{e_r}{a} \right|.$$

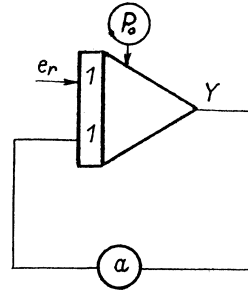
U relativní chyby

$$\frac{\delta(y)}{y} = \frac{1}{aP_0} e_r (1 - e^{-at})$$

je to ovšem obráceně: pro $a > 0$ roste nad všechny meze, pro $a < 0$ konverguje k hodnotě

$$\frac{1}{aP_0} e_r.$$

Je-li $a < 0$, potom absolutní hodnota chyby s časem narůstá neomezeně.



Obr. 2. Programové schéma pro řešení rovnice 1. řádu s roznulovanou počítací jednotkou.

3. VLIV DRIFTU A MŘÍŽKOVÉHO PROUDU NA PŘESNOST ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU

a) S vynulovanými jednotkami:

Řešením diferenciální rovnice 2. řádu

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{s počátečními podmínkami} \quad y_{(0)} = P_2, \quad y'_{(0)} = P_1$$

při jednoduchých reálných kořenech charakteristické rovnice je funkce

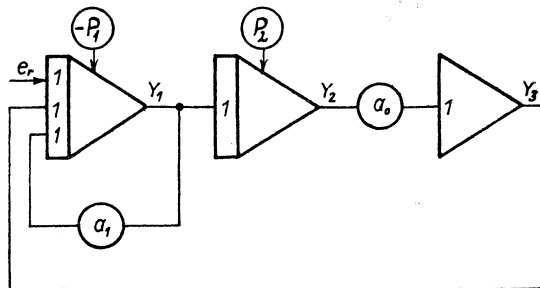
$$(10) \quad y = \frac{P_1 - \lambda_2 P_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{P_1 - \lambda_1 P_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t},$$

při dvojnásobném kořenu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$(11) \quad y = [P_2 + (P_1 - \lambda P_2) t] e^{\lambda t}$$

a při komplexně sdružených kořenech $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$ ($b \neq 0$)

$$(12) \quad y = e^{at} \left(P_2 \cos bt + \frac{P_1 - aP_2}{b} \sin bt \right).$$



Obr. 3. Programové schéma pro řešení rovnice 2. řádu s roznulovanou prvou jednotkou.

b) Vliv roznulování pouze prvního integrátoru:

Výstupní napětí jednotlivých jednotek podle obr. 3 označíme Y_1, Y_2 a Y_3 . Schéma na obr. 3 je potom popsáno následujícím systémem rovnic:

$$Y_3 = -a_0 Y_2,$$

$$Y_2 = -\int_0^t Y_1 dt + Y_2(0),$$

$$Y_1 = -a_1 \int_0^t Y_1 dt - \int_0^t Y_3 dt - e_r \int_0^t dt + Y_1(0).$$

Po derivacích dostaneme

$$(13) \quad Y_2' = -Y_1,$$

$$(14) \quad Y_1' = -a_1 Y_1 - Y_3 - e_r = -a_1 Y_1 + a_0 Y_2 - e_r.$$

Tento systém rovnic se dá derivací rovnice (13) a dosazením do rovnice (14) převést na diferenciální rovnici 2. řádu pro Y_2

$$(15) \quad Y_2'' + a_1 Y_2' + a_0 Y_2 = e_r.$$

Výstupní napětí Y_2 má pro výše uvedené případy kořenů charakteristické rovnice a pro $a_0 \neq 0$ a při stejných počátečních podmínkách $Y_2(0) = P_2$, $Y_1(0) = -P_1$ tvar

$$(16) \quad Y_2 = \frac{P_1 - \lambda_2[P_2 - (e_r/a_0)]}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{P_1 - \lambda_1[P_2 - (e_r/a_0)]}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \frac{e_r}{a_0},$$

$$(17) \quad Y_2 = \left\{ P_2 - \frac{e_r}{a_0} + \left[P_1 - \left(P_2 - \frac{e_r}{a_0} \right) \right] t \right\} e^{\lambda t} + \frac{e_r}{a_0},$$

$$(18) \quad Y_2 = e^{at} \left[\left(P_2 - \frac{e_r}{a_0} \right) \cos bt + \frac{P_1 - a[P_2 - (e_r/a_0)]}{b} \sin bt \right] + \frac{e_r}{a_0}.$$

Chyba řešení $\delta_{(y)} = Y_2 - y$ vlivem roznulování počítací jednotky pro jednotlivé případy kořenů charakteristické rovnice

$$(19) \quad \delta_{(y)} = \frac{\lambda_2(e_r/a_0) e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1(e_r/a_0) e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e_r}{a_0},$$

$$(20) \quad \delta_{(y)} = \left(-\frac{e_r}{a_0} + \frac{e_r}{a_0} t \right) e^{\lambda t} + \frac{e_r}{a_0},$$

$$(21) \quad \delta_{(y)} = \left(-\frac{e_r}{a_0} \cos bt + \frac{ae_r}{ba_0} \sin bt \right) e^{at} + \frac{e_r}{a_0}.$$

Jsou-li v prvých dvou případech kořeny charakteristické rovnice menší než nula, potom chyba nepřesáhne hodnotu e_r/a_0 . Pro případ komplexních kořenů musí být $\text{Re}(\lambda) \leq 0$, aby chyba s časem neomezeně nenarůstala (pro $a = 0$ ve třetím případě je

$$\delta_{(y)} = \frac{e_r}{a_0} (1 - \cos bt)$$

a to je konečné:

$$|\delta_{(y)}| \max = \left| 2 \frac{e_r}{a_0} \right|.$$

c) Vliv roznulování první a třetí jednotky:

Tento případ se podobá předchozímu případu. Soustava na obr. 4 je popsána následujícím systémem rovnic:

$$Y_3 = -a_0 Y_2 - e_{r_3},$$

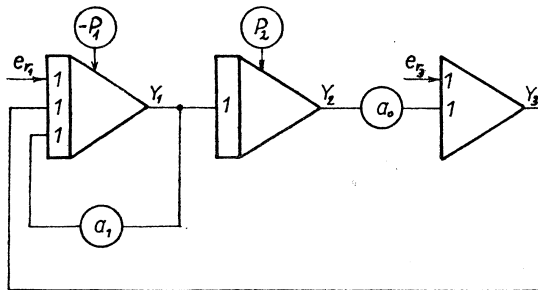
$$Y_2 = -\int_0^t Y_1 dt + Y_2(0),$$

$$Y_1 = -a_1 \int_0^t Y_1 dt - \int_0^t Y_3 dt - e_{r_1} \int_0^t dt + Y_1(0).$$

Převedením této soustavy na diferenciální rovnici 2. řádu pro Y_2 stejným postupem jako v předchozím případě, dostaneme

$$(22) \quad Y_2'' + a_1 Y_2' + a_0 Y_2 = e_{r_1} - e_{r_3}.$$

Označíme-li součet rušivých napětí $e_{r_1} - e_{r_3} = e_r$, přejde rovnice (22) na dříve řešenou rovnici (15). Při $r_{r_3} = e_{r_1}$ nenastává v řešení žádná chyba.



Obr. 4. Programové schéma s roznulovanou první a třetí jednotkou.

d) Vliv roznulování druhé jednotky:

Soustava na obr. 5 je popsána následujícími rovnicemi:

$$Y_3 = -a_0 Y_2,$$

$$Y_2 = -\int_0^t Y_1 dt - e_{r_2} \int_0^t dt + Y_2(0),$$

$$Y_1 = -a_1 \int_0^t Y_1 dt - \int_0^t Y_3 dt + Y_1(0).$$

$$(23) \quad Y_2' = -Y_1 - e_{r_2},$$

$$(24) \quad Y_1' = -a_1 Y_1 - Y_3 = -a_1 Y_1 + a_0 Y_2.$$

Další úpravou dostaneme

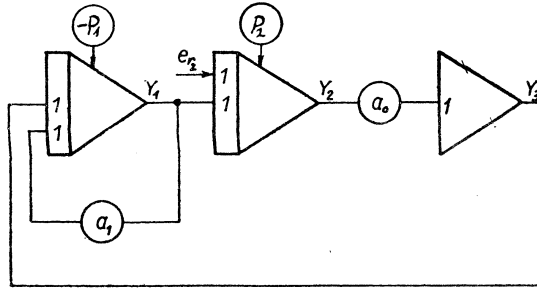
$$(25) \quad Y_2'' + a_1 Y_2' + a_0 Y_2 = -a_1 e_{r_2}.$$

Při počátečních podmínkách $Y_2(0) = P_2$, $Y_2'(0) = -Y_1(0) - e_{r_2} = P_1 - e_{r_2}$ má rovnice (25) pro jednotlivé případy kořenů charakteristické rovnice řešení

$$(26) \quad Y_2 = \frac{P_1 - e_{r_2} - [P_2 + (a_1 e_{r_2}/a_0)] \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{P_1 - e_{r_2} - [P_2 + (a_1 e_{r_2}/a_0)] \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} - \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0},$$

$$(27) \quad Y_2 = \left\{ P_2 + \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0} + \left[P_1 - e_{r_2} - \lambda \left(P_2 + \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0} \right) \right] t \right\} e^{\lambda t} - \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0},$$

$$(28) \quad Y_2 = \left[\left(P_2 + \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0} \right) \cos bt + \frac{P_1 - e_{r_2} - a [P_2 + (a_1 e_{r_2}/a_0)]}{b} \sin bt \right] e^{at} - \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0}.$$



Obr. 5. Programové schéma s roznulovanou druhou jednotkou.

Chyby řešení $\delta_{(y)} = Y_2 - y$ jsou pro jednotlivé případy kořenů charakteristické rovnice

$$(29) \quad \delta_{(y)} = \frac{-e_{r_2} - (a_1 e_{r_2}/a_0) \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{-e_{r_2} - (a_1 e_{r_2}/a_0) \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} - \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0},$$

$$(30) \quad \delta_{(y)} = \left[\frac{a_1 e_{r_2}}{a_0} - \left(e_{r_2} + \lambda \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0} \right) t \right] e^{\lambda t} - \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0},$$

$$(31) \quad \delta_{(y)} = \left[\frac{a_1 e_{r_2}}{a_0} \cos bt + \frac{-e_{r_2} - (a_1 e_{r_2}/a_0)}{b} \sin bt \right] e^{at} - \frac{a_1 e_{r_2}}{a_0}.$$

Splňují-li v prvních dvou případech kořeny charakteristické rovnice podmínku $\lambda_1, \lambda_2, \lambda < 0$, ve třetím případě podmínku $\text{Re}(\lambda) \leq 0$, potom chyba řešení s časem neomezeně nenarůstá. V prvních dvou případech absolutní hodnota chyby nepřesáhne hodnotu

$$\left| \frac{a_1 e_{r2}}{a_0} \right|,$$

ve třetím případě hodnotu

$$\left| 2a_1 e_{r2} \frac{1}{a_0} \right| + \left| \frac{1}{b} e_{r2} \right|,$$

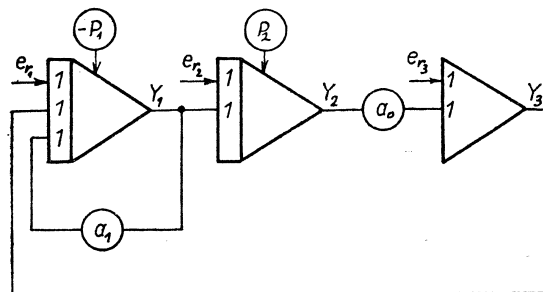
poněvadž funkce

$$(32) \quad z = \frac{a_1 e_{r2}}{a_0} \cos bt + \frac{-e_{r2}}{b} \sin bt$$

splňuje podmínku

$$(33) \quad |z| < \left| \frac{a_1 e_{r2}}{a_0} \right| + \left| \frac{-e_{r2}}{b} \right|.$$

e) Vliv roznulování první, druhé a třetí jednotky:



Obr. 6. Programové schéma s roznulovanou první, druhou i třetí jednotkou.

Soustava na obr. 6 je popsána rovnicemi

$$Y_3 = -a_0 Y_2 - e_{r3},$$

$$Y_2 = - \int_0^t Y_1 dt - e_{r2} \int_0^t dt + Y_2(0),$$

$$Y_1 = -a_1 \int_0^t Y_1 dt - \int_0^t Y_3 dt - e_{r1} \int_0^t dt + Y_1(0).$$

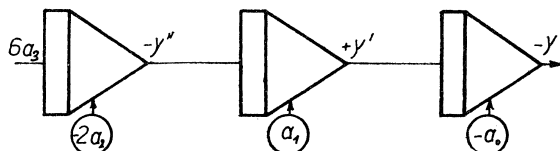
Převedením tohoto systému rovnic na diferenciální rovnici 2. řádu pro Y_2 dostaneme

$$(34) \quad Y_2'' + a_1 Y_2' + a_0 Y_2 = e_{r_1} - e_{r_3} - a_1 e_{r_2}.$$

Splňují-li reálné kořeny nebo reálné části kořenů charakteristické rovnice podmínku λ , $\text{Re}(\lambda) < 0$, potom chyba vlivem driftu a mřížkového proudu nepřesáhne zase hodnotu $1/a_0(e_{r_1} - e_{r_3} - a_1 e_{r_2})$, v případě komplexních kořenů, kdy reálné části kořenů $\text{Re}(\lambda) = 0$, nepřesáhne absolutní chyba hodnotu

$$\left| \frac{2}{a_0} (e_{r_1} - e_{r_3} - a_1 e_{r_2}) \right| + \left| \frac{1}{b} e_{r_2} \right|.$$

Z rozboru uvedených případů vyplývá, že drift a mřížkový proud zesilovače mají podstatný vliv na přesnost řešení pouze v případě, kdy reálná část některého kořenu charakteristické rovnice je kladná a řešení probíhá delší dobu, dále je velikost chyby nepřímou úměrná koeficientu při y na levých stranách řešených rovnic.



Obr. 7. Programové schéma pro řešení rovnice (32).

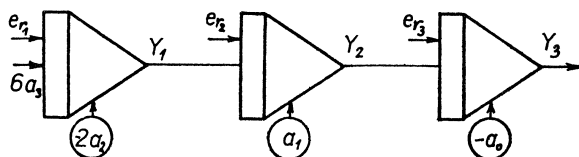
Chyba v řešení narůstá s časem i v tom případě, kdy je alespoň jeden kořen charakteristické rovnice nulový, nebo má-li charakteristická rovnice několikanásobný nulový kořen. Poslední případ nastává např. při řešení kořenů polynomu, kdy polynom n -tého stupně modelujeme řešením diferenciální rovnice n -tého řádu $y^{(n)} = a_n n!$ s vhodnými počátečními podmínkami. Např. polynom 3. stupně

$$y = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

vymodelujeme řešením diferenciální rovnice 3. řádu

$$(35) \quad y''' = 6a_3$$

s počátečními podmínkami $y_{(0)} = a_0$, $y'_{(0)} = a_1$, $y''_{(0)} = 2a_2$ (obr. 7).



Obr. 8. Programové schéma pro řešení rovnice (32) s roznulovanými jednotkami.

Programové schéma s roznulovanými jednotkami, které řeší rovnici (35) je na obr. 8 a je popsáno rovnicemi

$$\begin{aligned} Y_3 &= - \int_0^t Y_2 dt - e_{r_3} \int_0^t dt + Y_3(0), \\ Y_2 &= - \int_0^t Y_1 dt - e_{r_2} \int_0^t dt + Y_2(0), \\ Y_1 &= -6a_3 \int_0^t dt - e_{r_1} \int_0^t dt + Y_1(0) \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $Y_3(0) = -a_0$, $Y_2(0) = a_1$, $Y_1(0) = -2a_2$. Postupným derivováním těchto rovnic dospějeme k diferenciální rovnici 3. řádu pro Y_3

$$(36) \quad Y_3''' = -6a_3 - e_{r_1},$$

jejímž řešením je funkce

$$\begin{aligned} (37) \quad Y_3 &= - (a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0) - \left(e_{r_3} - \frac{e_{r_2}}{2} t + \frac{e_{r_1}}{6} t^2 \right) t = \\ &= -y - \left(e_{r_3} - \frac{e_{r_2}}{2} t + \frac{e_{r_1}}{6} t^2 \right) t. \end{aligned}$$

Z výsledku je patrné, že chyba způsobená roznulováním rychle s časem narůstá. Je tedy nutno i v těchto případech dbát na vynulování zesilovačů.

Jinak se dá snížit vliv roznulování při řešení diferenciálních rovnic vhodnou časovou transformací (chyba je úměrná převrácené hodnotě koeficientu u y v diferenciální rovnici) a využitím celého napěťového pracovního rozsahu jednotlivých počítačích jednotek. V tomto případě se provádí amplitudová transformace pro každou funkci Y_1, Y_2, \dots, Y_n zvlášť (tzv. normalizace měříték nebo optimální programování).

Seznam použité literatury

- [1] *Nenádál Z., Mirtes B.*: Analogové počítače. SNTL, Praha 1962.
- [2] *Mirtes B.*: Číslíkové měření. SNTL, Praha 1961.
- [3] *Matyáš J.*: Rozbor přesnosti elektronických diferenciálních analyzátorů. Stroje na zpracování informací, Sborník V. NČSAV, Praha 1957.
- [4] *Adler H.*: Elektronische Analogrecher. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ДРЕЙФА И СЕТОЧНОГО ТОКА УСИЛИТЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА НА ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

КАРЕЛ БЕНЕШ (KAREL BENEŠ)

В настоящей статье описано влияние дрейфа и сеточного тока усилителей постоянного тока на точность решения некоторых дифференциальных уравнений. В статье выводятся соотношения, определенные влиянием дрейфа и сеточного тока на напряжение на выходе инвертора, сумматора, интегратора и сумматорного интегратора и, кроме того, их влияние на способ решения некоторых дифференциальных уравнений. Оказывается, что ошибка решения не возрастает беспредельно со временем в тех случаях, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательную, в некоторых случаях нулевую действительную часть.

Summary

INFLUENCE OF DRIFT AND GRID CURRENT OF D-C AMPLIFIERS ON THE ACCURACY OF SOLUTION OF LINER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

KAREL BENEŠ

This paper deals with the influence of the drift and grid current of D-C amplifiers on the accuracy of solution of some linear differential equations. There are derived relations for the influence of the drift and grid current on the output voltage of inverter, summation unit, integrator and summation-integrator and then on the solution of some equations. It is shown, that the error does not exhibit unbounded growth if the roots of the characteristic equation have negative (or, in some cases, zero) real parts.

Adresa autora: Inž. Karel Beneš, Přírodovědecká fakulta Palackého university, Leninova 26, Olomouc.