Josef Matušů

Das Fouriersche Integral und die Distributionen von J. G. Mikusiński

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 5, 362–384

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103043`

DAS FOURIERSCHE INTEGRAL UND DIE DISTRIBUTIONEN VON J. G. MIKUSIŃSKI

JOSEF MATUŠŮ

(Eingegangen am 14. April 1965.)

1. Es sei $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ der kommutative Ring der im Intervall $0 \leqq t < \mathsf{T} \leqq +\infty$ definierten und stetigen (komplexwertigen) Funktionen $a = \{a(t)\}$, die im gewöhnlichen Sinne addiert und im Sinne der Faltung multipliziert werden. Durch folgende Definition wird in $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ eine sogenannte „starke" Konvergenz eingeführt:

Definition 1. *Die Folge der Elemente $a_n \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert stark gegen das Element $a \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ dann und nur dann, wenn $a_n \rightrightarrows a$ (gleichmässig) für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$.*

Die Menge $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ wird hiermit zu einem abstrakten Raum vom Typus L*, d.h. zu einem FRÉCHETschen Raum vom Typus L, der noch ein zusätzliches Axiom zu erfüllen hat. Durch dieses Axiom wird folgendes garantiert: Gilt $\lim_{n\to+\infty} a_n = a = \lim_{n\to+\infty} b_n$, dann konvergiert auch die gemischte Folge $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ stark gegen das Element a (sieh [1]). In diesem L*-Raum sind dann die KURATOWSKIschen Hüllenaxiome erfüllt (sieh [2]).

Der L*-Raum aller rationalen Zahlen, in dem der Konvergenzbegriff in der üblichen Form eingeführt ist, bildet das Fundament der bekannten CANTORschen Konstruktion der reellen Zahlen. Durch MIKUSIŃSKI [3] wurde gezeigt, dass auch der L*-Raum $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ in ähnlicher Weise zur Konstruktion neuer mathematischer Objekte benützt werden kann, die nicht direkt definiert werden können. Zu diesem Zweck muss noch eine sogenannte „schwache" Konvergenz in $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ eingeführt werden:

Definition 2. *Die Folge der Elemente $a_n \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist dann und nur dann schwach konvergent, wenn ein Element $g \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ mit folgenden Eigenschaften existiert: 1° g ist fremd zur Nullteilermenge von $\mathscr{C}_\mathsf{T}$; 2° die Folge ga_n $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert stark gegen ein Element $A \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$. Existiert ein $a \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ derart, dass $A = ga$, dann konvergiert die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ (definitionsgemäss) schwach gegen das Element a.*

Bemerkung 1. Von TITCHMARSH [4] wurde bewiesen: Sind a, $b \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ und gilt $\{\int_0^t a(t-x)\, b(x)\, \mathrm{d}x\} = \{0\}$, dann ist $a(t) = 0$ im Intervall $0 \leqq t < y$ und $b(t) = 0$ im Intervall $0 \leqq t < z$, wobei $y + z \geqq \mathrm{T}$. Im Falle $\mathrm{T} = +\infty$ folgt daraus unmittelbar, dass die Nullteilermenge in $\mathscr{C}_\infty$ leer ist. Man überzeugt sich leicht, dass im Falle $\mathrm{T} < +\infty$ Nullteiler in $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ wirklich vorhanden sind. Sei z.B. $\mathrm{T} = 2$, $g \in \mathscr{C}_2$, wobei

$$g = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < 1\,, \\ t - 1 & \text{für} \quad 1 \leqq t < 2\,. \end{cases}$$

Durch einfache Rechnung wird bestätigt, dass $g^2 = \{0\}$. Damit $g \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ keinen Nullteiler darstellt, ist es notwendig und hinreichend, dass g in keiner Umgebung $\langle 0, \varepsilon)$ des Ursprungs $t = 0$ identisch verschwindet.

Man kann leicht beweisen: Konvergiert die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen das Element a und die Folge b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen das Element b, dann konvergieren die Folgen $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach entsprechend gegen $a \pm b$, ab. Konvergiert die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen a und ist $c \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$, dann konvergiert die Folge ca_n $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen ca. Ferner gilt der Satz von der Eindeutigkeit des schwachen Limes. Jede stark konvergente Folge ist umsomehr auch schwach konvergent, aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Ähnlich wie in der CANTORschen Theorie der reellen Zahlen wird nun der Begriff der äquivalenten (schwach konvergenten) Folgen eingeführt. Mit $\mathscr{A}$ bezeichnen wir die Menge aller schwach konvergenten Folgen a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Definition 3. *Zwischen zwei zu $\mathscr{A}$ gehörenden Folgen a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bestehe die Relation ϱ dann und nur dann, wenn die Folge der Differenzen $a_n - b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen Null strebt.*

Diese in $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A} \times \mathscr{A}$ definierte Relation ϱ ist reflexiv, transitiv und symmetrisch, d.h. ϱ ist eine Äquivalenzrelation von $\mathscr{A}$. Die Menge $\mathscr{A}$ zerfällt somit in paarweise fremde Äquivalenzklassen. Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen heisst die Quotientenmenge von $\mathscr{A}$ nach der Äquivalenzrelation ϱ und wird mit $\mathscr{A}/\varrho$ bezeichnet.

Definition 4. *Die zur Quotientenmenge $\mathscr{A}/\varrho$ gehörenden Elemente werden Distributionen genannt. Eine Distribution, d.h. Äquivalenzklasse, die eine stationäre Folge $a_n = a \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ enthält, heisst stark. Den Begriff einer sogenannten schwachen Distribution erhält man durch Negation.*

Der Summe (Differenz) und dem Produkt von Äquivalenzklassen entspricht die Summe (Differenz) und das Produkt der zugehörigen Distributionen. Bezüglich dieser Addition und Multiplikation ist $\mathscr{A}/\varrho$ ein kommutativer Ring, der von nun an auch mit $\boldsymbol{\mathscr{C}}_{\mathrm{T}}$ bezeichnet wird. Die Menge aller starken Distributionen ist mit $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ isomorph. Auf Grund dieser Isomorphie kann jede starke Distribution $\tilde{a}$ mit dem Repräsentanten $a = a_n \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der entsprechenden Äquivalenzklasse identifiziert werden: $\tilde{a} = a$.

In $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ gibt es nun zwei ausgezeichnete Untermengen von Distributionen. Erstens die Untermenge $\mathscr{S}_\mathrm{T}$, die folgendermassen definiert ist:

Definition 5. *Die Distribution $a \in \mathscr{C}_\mathrm{T}$ gehört zu $\mathscr{S}_\mathrm{T}$ dann und nur dann, wenn das Produkt ua $(u = \{1\} \in \mathscr{C}_\mathrm{T})$ eine starke Distribution ist, die in der Form $ua = \{\int_0^t a(x)\,\mathrm{d}x\}$ ausgedrückt werden kann, wobei die (komplexe) Funktion $\{a(t)\}$ im Intervall $0 \leqq t < \mathrm{T}$ lokal summierbar ist.*

Die Funktion $\{a(t)\}$, die der Distribution $a \in \mathscr{S}_\mathrm{T}$ entspricht, ist bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt $\{a(t)\}$ eine in $0 \leqq t < \mathrm{T}$ lokal summierbare Funktion, dann existiert eine Folge $a_n \in \mathscr{C}_\mathrm{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ derart, dass $ua_n \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathrm{T}} \{\int_0^t a(x)\,\mathrm{d}x\}$ für $n \to +\infty$. Nach Definition 2 ist dann a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine schwach konvergente Folge. Ist nun a die durch die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bestimmte Distribution, dann konvergiert die Folge ua_n $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen ua. Wegen $ua_n \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\mathrm{T}} \{\int_0^t a(x)\,\mathrm{d}x\}$ für $n \to +\infty$, folgt dann auf Grund der Eindeutigkeit des schwachen Limes, dass $ua = \{\int_0^t a(x)\,\mathrm{d}x\}$. Die Untermenge $\mathscr{S}_\mathrm{T}$ kann dann isomorph auf die Menge $\mathscr{S}_\mathrm{T}$ aller (komplexwertigen) Funktionen $\{a(t)\}$ bezogen werden, die im Intervall $0 \leqq t < \mathrm{T}$ lokal summierbar sind. Selbstverständlich wird vorausgesetzt, dass auch in $\mathscr{S}_\mathrm{T}$ die Multiplikation im Sinne der Faltung erklärt ist. Auf Grund dieser Isomorphie können die Distributionen $a \in \mathscr{S}_\mathrm{T}$ mit den entsprechenden Funktionen $\{a(t)\} \in \mathscr{S}_\mathrm{T}$ identifiziert werden: $a = \{a(t)\}$; diese Identifikation fällt im Falle, dass $\{a(t)\} \in \mathscr{C}_\mathrm{T}$, mit der oben erklärten zusammen.

Die zweite in $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ enthaltene Untermenge $\mathscr{K}$ ist folgendermassen definiert:

Definition 6. *Die Distribution $a \in \mathscr{C}_\mathrm{T}$ gehört zu $\mathscr{K}$ dann und nur dann, wenn eine komplexe Zahl z derart existiert, dass die der schwach konvergenten Folge $\{zn \exp(-nt)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ entsprechende Distribution mit a zusammenfällt.*

Die Folge $\{zn \exp(-nt)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist bei komplexem z auch wirklich schwach konvergent. Durch einfache Rechnung folgt: $u^2\{zn \exp(-nt)\} = \{\int_0^t (t - x)\, zn \,.\, \exp(-nx)\,\mathrm{d}x\} = \{-z/n + (z/n)\exp(-nt) + zt\} = \{-z/n + (z/n)\exp(-nt)\} + u\{z\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Offenbar $\{-z/n + (z/n)\exp(-nt)\} \rightrightarrows \{0\}$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathrm{T}$, so dass $u^2\{zn \exp(-nt)\} \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathrm{T}} u\{z\}$ für $n \to +\infty$; die Folge $\{zn \exp(-nt)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist deshalb schwach konvergent. Die der Folge $\{zn \exp(-nt)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ entsprechende Distribution sei $[z]$, d.h. $[z] \in \mathscr{K}$. Man kann leicht beweisen, dass $[z_1] \pm [z_2] = [z_1 \pm z_2]$, $[z_1][z_2] = [z_1 z_2]$ für je zwei Distributionen $[z_1], [z_2] \in \mathscr{K}$. Auf Grund dieser Beziehungen kann die Untermenge $\mathscr{K}$ isomorph auf den Körper $\mathscr{K}$ aller komplexen Zahlen bezogen werden. Diese Isomorphie ermöglicht dann eine Identifikation der Distributionen $[z] \in \mathscr{K}$ mit den entsprechenden Zahlen $z \in \mathscr{K}$: $[z] = z$. Jede komplexe Zahl ist somit eine schwache Distribution. Offenbar ist $0 = \{0\}$.

Die Zahl $z \in \mathcal{K}$ ist durch die schwach konvergente Folge $\{zn \exp(-nt)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bestimmt. Der Distribution uz entspricht dann die Folge $\{\int_0^t zn \exp(-nx)\,dx\} = \{-z \exp(-nt) + z\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Auch diese Folge ist schwach konvergent: $u\{-z \exp(-nt) + z\} = \{(z/n) \exp(-nt) - z/n + zt\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\{(z/n) \exp(-nt) - z/n\} \rightrightarrows 0$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$, $\{zt\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$. Die Folgen $\{-z \exp(-nt) + z\}$, $a_n = \{z\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sind offenbar äquivalent, denn $\{-z \exp(-nt)\} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} 0$ für $n \to +\infty$. Somit ist uz eine starke Distribution, die mit $\{z\}$ zu identifizieren ist: $uz = \{z\}$. Es wird dann $uz\{a(t)\} = \{z\}\{a(t)\} = \{\int_0^t za(x)\,dx\} = u\{za(t)\}$, d.h. $z\{a(t)\} = \{za(t)\}$ für jede zu $\mathscr{C}_\mathsf{T}$, bzw. $\mathscr{S}_\mathsf{T}$ gehörende Funktion; für $z = 1$ folgt speziell $1.\ \{a(t)\} = \{a(t)\}$. Daraus folgt unmittelbar, dass für jede Distribution $a \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ die Gleichung $1.\ a = a$ gilt.

Der kommutative Ring $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ der Mikusińskischen Distributionen ist eine sehr umfangreiche Elementenmenge. Dieser Ring enthält den Körper $\mathcal{K}$ aller komplexen Zahlen, sowie auch den kommutativen Ring $\mathscr{S}_\mathsf{T}$ aller im Intervall $0 \leqq t < \mathsf{T}$ lokal summierbaren Funktionen. Die komplexe Eins (Null) ist das Einselement (Nullelement) in $\mathscr{C}_\mathsf{T}$. Man pflegt die Eins mit dem Symbol δ, der sogenannten Diracschen „Funktion $\{\delta(t)\}$“, zu identifizieren: $1 = \delta$. Ferner sind in $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ auch solche Elemente enthalten, die man als Realisation der Heavisideschen Operatoren (Symbole) ansehen kann. Der Distribution u entspricht eigentlich der Heavisidesche Integrationsoperator. In $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ ist auch ein Analogon des Heavisideschen Differentiationsoperators enthalten. Es sei $a_n = \{n^2 \cos nt\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Durch einfache Rechnung wird bestätigt, dass $u^3 a_n = \{\int_0^t (x^2/2)\, n^2 \cos n(t - x)\,dx\} = \{t - (1/n) \sin nt\} = u^2 - \{(1/n) \sin nt\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $u^3 a_n \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} u^2$ für $n \to +\infty$. Die Folge $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ ist somit schwach konvergent. Wenn nun mit s die der Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ entsprechende Distribution bezeichnet wird, dann gilt $u^3 s = u^2$, d.h. $us = su = 1 = \delta$. Die Distributionen u, s sind also zueinander invers. Wird $a \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ als absolut stetige Funktion vorausgesetzt, dann gilt $a = \{\int_0^t a'(x)\,dx + a(0)\} = u\{a'(t)\} + ua(0)$, d.h. $sa = su\{a'(t)\} + su\, a(0) = a' + a(0)$. Zu demselben Ergebnis gelangt man auch im Falle $a \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$, $a' \in \mathscr{S}_\mathsf{T}$ ($a' \neq \pm \infty$ existiert überall mit eventueller Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge).

2. In der Konstruktion des Ringes $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ liegt das Fundament der Theorie von den Mikusińskischen Distributionen. Geht es nun darum, die Distributionen auch praktisch anzuwenden (als Anwendungsgebiet seien z.B. die Differentialgleichungen genannt), dann ist es notwendig, eine „Analysis der Distributionen“ aufzubauen.

Durch folgende Definition wird erstens der Begriff der sogenannten Distributionsfunktion eingeführt.

Definition 7. *Eine Abbildung der topologischen Menge* E *der Variablen* $y, z, \ldots$ *in* $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ *wird als Distributionsfunktion bezeichnet.*

Aus Einfachheitsgründen werden im weiteren Distributionsfunktionen nur einer Variablen $y \in \mathsf{E}$ betrachtet. Unter den Distributionsfunktionen gibt es zwei wichtige Spezialfälle. Der erste umfasst die sogenannten numerischen Distributionsfunktionen: Für jedes $y \in \mathsf{E}$ ist das entsprechende Bild $a(y)$ (der „Wert" der Distributionsfunktion im Punkte y) eine komplexe Zahl. Der zweite Fall umfasst die sogenannten parametrischen Distributionsfunktionen: Für jedes $y \in \mathsf{E}$ ist das entsprechende Bild eine starke Distribution: $a(y) = \{a(y, t)\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$. Zum Aufbau der Analysis von Distributionen ist es notwendig auch in $\mathscr{C}_\mathsf{T}$ eine sogenannte „starke" und „schwache" Konvergenz einzuführen:

Definition 8. *Die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von Distributionen konvergiert stark gegen die starke Distribution a dann und nur dann, wenn folgendes gilt*: $1°$ *Fast alle Glieder der Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sind starke Distributionen*; 2^0 *die Folge dieser starken Distributionen konvergiert stark gegen a (sieh Definition* 1).

Definition 9. *Die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von Distributionen konvergiert schwach gegen die Distribution a dann und nur dann, wenn ein Element $g \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ mit folgenden Eigenschaften existiert*: $1°$ *g ist fremd zur Nullteilermenge von $\mathscr{C}_\mathsf{T}$*; $2°$ *die Folge ga_n $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert stark gegen ga (im Sinne der Definition* 8).

Man kann leicht beweisen: Konvergiert die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von Distributionen schwach gegen die Distribution a und die Folge b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von Distributionen schwach gegen die Distribution b, dann konvergieren die Folgen $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen $a \pm b$, ab. Konvergiert die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von Distributionen schwach gegen die Distribution a und $c \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$, dann konvergiert die Folge ca_n $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach gegen ca. Es gilt auch der Satz von der Eindeutigkeit des schwachen Limes einer Folge von Distributionen. Offenbar wird die schwache Konvergenz durch die starke impliziert. Konvergiert die Folge $a_n \in \mathscr{K}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ im gewöhnlichen Sinne gegen $a \in \mathscr{K}$, dann konvergiert diese Folge auch schwach gegen a.

Beispiel 1. Es wurde gezeigt (sieh S. 364), dass $u^2\{zn \exp(-nt)\} \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}, \mathscr{C}_\mathsf{T}} u\{z\} = u^2 z$ für $n \to +\infty$, $z \in \mathscr{K}$. Die Folge der Distributionen $\{zn \exp(-nt)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert deshalb im Sinne der Definition 9 schwach gegen die Distribution z:

$$\{zn \exp(-nt)\} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} z \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Bemerkung 2. Sei $0 < \mathsf{T}_1 < \mathsf{T}_2 \leqq +\infty$. Gehört die Funktion a zu $\mathscr{C}_{\mathsf{T}_2}$, dann gehört die von a auf dem Intervall $0 \leqq t < \mathsf{T}_1$ erzeugte partielle Funktion a_{T_1} zu $\mathscr{C}^*_{\mathsf{T}_1}$, wobei $\mathscr{C}^*_{\mathsf{T}_1}$ den kommutativen Unterring von $\mathscr{C}_{\mathsf{T}_1}$ bedeutet, der aus allen denjenigen Funktionen besteht, die in $t = \mathsf{T}_1$ einen endlichen linksseitigen Limes besitzen. Sind $a, b \in \mathscr{C}_{\mathsf{T}_2}$ und $c = a \pm b$, $d = ab$, dann gilt für die entsprechenden Funktionen $a_{\mathsf{T}_1}, b_{\mathsf{T}_1}, c_{\mathsf{T}_1}, d_{\mathsf{T}1}$: $c_{\mathsf{T}_1} = a_{\mathsf{T}_1} \pm b_{\mathsf{T}_1}$, $d_{\mathsf{T}_1} = a_{\mathsf{T}_1} b_{\mathsf{T}_1}$. Die Abbildung $a \to a_{\mathsf{T}_1}$ ist somit ein Homomorphismus, der Ring $\mathscr{C}^*_{\mathsf{T}_1}$ ist homomorph zum Ring $\mathscr{C}_{\mathsf{T}_2}$. Wird mit $\mathcal{N}_{T_2}$ ($\mathcal{N}^*_{T_1}$) die Nullteilermenge von $\mathscr{C}_{T_2}$ ($\mathscr{C}^*_{T_1}$) bezeichnet, dann gilt: Wenn $g \in \mathcal{N}_{T_2}$, dann $g_{T_1} \in \mathcal{N}^*_{T_1}$ (sieh Bemerkung 1) und umgekehrt. Konvergiert nun z.B. die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ schwach in $\mathscr{C}_{T_2}$, dann konvergiert die Folge $(a_n)_{T_1}$ $(n = = 1, 2, \ldots)$ schwach in $\mathscr{C}^*_{T_1}$. Man sieht ohne Mühe, dass die Distribution $a \in \mathscr{C}_{T_2}$, die durch die schwach konvergente Folge $a_n \in \mathscr{C}_{T_2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bestimmt ist, die Existenz der Distribution $a_{T_1} \in \mathscr{C}^*_{T_1}$ bedingt, die durch die schwach konvergente Folge $(a_n)_{T_1} \in \mathscr{C}^*_{T_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bestimmt ist. Auch die Abbildung $a \to a_{T_1}$ von Distributionen ist somit ein Homomorphismus, der Ring $\mathscr{C}^*_{T_1} \subset \mathscr{C}_{T_1}$ ist homomorph zum Ring $\mathscr{C}_{T_2}$. Bei dieser homomorphen Abbildung kann man die Distributionen $a \in \mathscr{C}_{T_2}$, die ein festes Bild $a_{T_1} \in \mathscr{C}^*_{T_1}$ haben, zu einer Klasse vereinigen. Jede Distribution $a \in \mathscr{C}_{T_2}$ gehört einer und nur einer Klasse an; d.h. die Menge $\mathscr{C}_{T_2}$ ist in Klassen eingeteilt, die den Distributionen von $\mathscr{C}^*_{T_1}$ eineindeutig zugeordnet sind. Sind a, b zwei Distributionen aus derselben Klasse und a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die entsprechenden (in $\mathscr{C}_{T_2}$) schwach konvergenten Folgen, dann sind a, b im folgenden Sinne äquivalent: 1° $(a_n)_{T_1} - (b_n)_{T_1} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_{T_1}} 0$ für $n \to +\infty$. Mit $\mathscr{B}$ bezeichnen wir die Menge aller in $\mathscr{C}_{T_2}$ schwach konvergenten Folgen, ϑ sei die in $\mathscr{B}^2$ definierte Relation, die der Forderung 1° genügt. Dieser Äquivalenzrelation entsprechende Quotientenmenge $\mathscr{B}/\vartheta$ ist eben eineindeutig auf $\mathscr{C}^*_{T_1}$ bezogen. Wird nun die Summe (Differenz) und das Produkt zweier Äquivalenzklassen von $\mathscr{B}/\vartheta$ in der üblichen Form erklärt, dann besteht sogar ein Isomorphismus zwischen $\mathscr{C}^*_{T_1}$ und $\mathscr{B}/\vartheta$.

Sei z.B. $T_1 = 1$, $T_2 > 1$. Wir setzen

$$a_n = \begin{cases} ne^{-nt} & \text{für} \quad 0 \leqq t < 1\,, \\ ne^{-n} + t - 1 & \text{für} \quad 1 \leqq t < T_2 \end{cases}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$. Durch einfache Rechnung folgt (sieh auch S. 364): $u^2 a_n = \{b_n(t)\}$, wobei

$$b_n(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} e^{-nt} + t \text{ für} \quad 0 \leqq t < 1\,, \\ -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} e^{-nt} + ne^{-n}\dfrac{(t-1)^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3t}{2} - \dfrac{1}{6} \quad \text{für} \quad 1 \leqq t < T_2 \end{cases}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$. Die Folgen $\{-1/n + (1/n)\exp(-nt)\}$, $\{ne^{-n}(t-1)^2/2\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergieren gleichmässig gegen Null auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < T_2$, so dass $u^2 a_n \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_{T_2}} A$ für $n \to +\infty$, wobei

$$A = \begin{cases} t \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < 1\,, \\ \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3t}{2} - \dfrac{1}{6} \quad \text{für} \quad 1 \leqq t < T_2\,; \end{cases}$$

die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ist deshalb schwach konvergent in $\mathscr{C}_{\mathsf{T}_2}$. Dieser Folge in $\mathscr{C}_{\mathsf{T}_2}$ entsprechende Distribution a ist offenbar von der DIRACschen „Funktion" δ verschieden, aber im Sinne der Äquivalenzrelation ϑ gehören a und δ zu derselben Äquivalenzklasse von $\mathscr{B}/\vartheta$. In $\mathscr{C}_1$ entspricht dieser Äquivalenzklasse die DIRACsche „Funktion" δ. Auf Grund der zwischen $\mathscr{C}_1^*$ und $\mathscr{B}/\vartheta$ bestehenden Isomorphie ist es angebracht diese Äquivalenzklasse auch mit δ zu bezeichnen.

Beispiel 2. Sei $0 < \mathsf{T}_1 \leqq \mathsf{T}_2 = +\infty$, $a \in \mathscr{C}_\infty$ (oder $\mathscr{S}_\infty$). Das Integral $\int_0^{+\infty} a(x) \,.\, \mathrm{d}x = H \neq 0$ soll wie ein verallgemeinertes LEBESGUEsches Integral konvergieren, d.h. $\int_0^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A a(x)\,\mathrm{d}x$. Man erhält durch partielle Integration:

$$(1) \qquad u^2\{na(nt)\} = \left\{\int_0^t (t - x)\, na(nx)\,\mathrm{d}x\right\} = (v = t - x,\, \mathrm{d}w = na(nx)\,\mathrm{d}x\,;$$

$$\mathrm{d}v = -\mathrm{d}x\,, \quad w = \int_0^x na(ny)\,\mathrm{d}y = \int_0^{nx} a(z)\,\mathrm{d}z = F(nx)) =$$

$$= [(t - x)\,F(nx)]_{x=0}^{x=t} + \int_0^t F(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^t F(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aus der Stetigkeit der Funktion $F(nx)$ im Intervall $\langle 0, +\infty\rangle$ folgt ihre Beschränktheit auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq x \leqq t < +\infty$. Bei Benützung des Satzes von LEBESGUE über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen folgt dann aus (1), dass

$$(2) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_0^t (t - x)\, na(nx)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t F(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \lim_{n \to +\infty} F(nx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^t H\,\mathrm{d}x = Ht$$

$(0 \leqq t < +\infty)$.

Betrachten wir weiter die Folge $g_n(t) = Ht - \int_0^t F(nx)\,\mathrm{d}x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ auf dem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < +\infty$. Wegen der Abschätzung

$$\left|Ht - \int_0^t F(nx)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^t (H - F(nx)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_0^t |H - F(nx)|\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^{t_1} |H - F(nx)|\,\mathrm{d}x$$

folgt dann, dass $\{g_n(t)\} \rightrightarrows 0$ für $n \to +\infty$ auf jedem solchen Intervall. Damit ist bewiesen (sieh (1), (2)), dass $u^2\{na(nt)\} \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\infty, \mathscr{C}_\infty} \{Ht\} = u^2 H$ für $n \to +\infty$. Die Folge der Distributionen $\{na(nt)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert deshalb im Sinne der Definition 9 schwach gegen die Distribution $H = H\delta$, d.h.

$$\left\{\frac{n\,a(nt)}{\int_0^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x}\right\} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\infty} \delta$$

für $n \to +\infty$. Aus der Bemerkung 2 folgt, dass auch

$$(3) \qquad \left\{\frac{n\,a(nt)}{\int_0^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x}\right\} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_{\mathrm{T}_1}} \delta$$

für $n \to +\infty$. Im Falle $\{a(t)\} = \{\exp(-t)\}$ ist $\int_0^{+\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = 1$; aus (3) folgt dann $\{n \exp(-nt)\} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_{\mathrm{T}_1}} \delta$ für $n \to +\infty$ (sieh S. 366). Wird $\{a(t)\} = \{\sin t/t\}$ ($a(0) = 1$) gesetzt, dann konvergiert das verallgemeinerte Integral $\int_0^{+\infty} [\sin x/x]\,\mathrm{d}x = \pi/2$. Aus (3) folgt dann, dass

$$(4) \qquad \left\{\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin nt}{t}\right\} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_{\mathrm{T}_1}} \delta$$

für $n \to +\infty$.

Bemerkung 3. Die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von starken Distributionen konvergiere schwach gegen die Distribution a. Die der Distribution a entsprechende Äquivalenzklasse von $\mathscr{A}/\varrho$ (sieh Definition 4) enthält dann die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Umgekehrt enthalte die Äquivalenzklasse der Distribution a die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von starken Distributionen. Diese Folge ist dann in $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ schwach konvergent. Im Sinne der Definition 2 existiert dann ein Element $g \in \mathscr{C}_\mathrm{T}$, das zur Nullteilermenge von $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ fremd ist, derart, dass $ga_n \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathrm{T}, \mathscr{C}_\mathrm{T}} A$ für $n \to +\infty$. Die Äquivalenzklasse der Distribution ga enthält offenbar die Folge ga_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Da diese Folge auch in der Äquivalenzklasse der Distribution A enthalten ist, folgt daraus, dass $A = ga$; d.h. $ga_n \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathrm{T}, \mathscr{C}_\mathrm{T}} ga$ für $n \to +\infty$. Aus der Definition 9 folgt dann, dass $a_n \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\mathrm{T}} a$ für $n \to +\infty$. Damit also die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von starken Distributionen gegen die Distribution a konvergiert, dazu ist es notwendig und hinreichend, dass die der Distribution a entsprechende Äquivalenzklasse von $\mathscr{A}/\varrho$ die Folge a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ enthält.

Gehen wir nun im Aufbau der „Analysis von Distributionen" um einen Schritt weiter. Durch die Definitionen 8, 9 wurde die „starke" und die „schwache" Konvergenz in $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ eingeführt. Demzufolge gibt es auch zwei Arten von Stetigkeit und Ableitung einer Distributionsfunktion im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}$, bzw. $y_0 \in \mathsf{E}'$ (E' bedeutet die Ableitung der Menge E).

Definition 10. *Sei E der Definitionsbereich der Distributionsfunktion $a(y)$. Die Distributionsfunktion $a(y)$ ist dann und nur dann stark (schwach) stetig im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}$, wenn folgendes gilt:*

$$(y_n \in \mathsf{E}\ (n = 1, 2, \ldots),\ y_n \to y_0\ \textit{für}\ n \to +\infty) \Rightarrow a(y_n) \xrightarrow[\text{stark (schwach)}]{\mathscr{C}_\mathrm{T}} a(y_0)$$

$$\textit{für} \quad n \to +\infty\,.$$

Beispiel 3. Wir betrachten die Distributionsfunktion $h(y) = \{h(y, t)\}$ mit dem Definitionsbereich $\mathsf{E} = \langle 0, +\infty)$, wobei

$$h(y, t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < y\,, \\ 1 & \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq t \end{cases}$$

$(0 \leqq t < \mathsf{T} \leqq +\infty)$. Sei $y_0 \in \mathsf{E}$, $y_n \in \mathsf{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to y_0$ für $n \to +\infty$. Durch einfache Rechnung folgt: $uh(y_n) = \{\int_0^t h(y_n, x)\,\mathrm{d}x\} = \{h_1(y_n, t)\}$, wobei

$$h_1(y_n, t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < y_n\,, \\ t - y_n & \text{für} \quad 0 \leqq y_n \leqq t \end{cases}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots; 0 \leqq t < \mathsf{T})$. Man überzeugt sich leicht, dass $uh(y_n) \rightrightarrows uh(y_0)$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$, d.h. $uh(y_n) \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}, \mathscr{C}_\mathsf{T}} uh(y_0)$ für $n \to +\infty$. Daraus folgt, dass $h(y_n) \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} h(y_0)$ für $n \to +\infty$, d.h. die (HEAVISIDEsche) Distributionsfunktion $h(y)$ ist im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}$ schwach stetig.

Man sieht unmittelbar, dass die starke Stetigkeit die schwache impliziert. Sind die Distributionsfunktionen $a(y)$, $b(y)$ stark (schwach) stetig in $y_0 \in \mathsf{E}$, dann sind auch die Summe, Differenz und das Produkt von $a(y)$, $b(y)$ stark (schwach) stetig in $y_0 \in \mathsf{E}$. Ist z.B. $a(y)$ eine numerische Distributionsfunktion, die im gewöhnlichen Sinne im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}$ stetig ist, dann gilt: $y_n \in \mathsf{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \xrightarrow{\mathsf{E}} y_0$ für $n \to +\infty$, $u^2 a(y_n) = \{ta(y_n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, worauf $\{ta(y_n)\} \rightrightarrows \{ta(y_0)\}$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$, d.h. $a(y_n) \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} a(y_0)$ für $n \to +\infty$. Umgekehrt sei die numerische Distributionsfunktion $a(y)$ im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}$ schwach stetig. Dann ist $a(y)$ in $y_0 \in \mathsf{E}$ auch im gewöhnlichen Sinne stetig.

Bezüglich der starken Stetigkeit von parametrischen Distributionsfunktionen gilt folgender

Satz 1. *Die in der Menge E definierte parametrische Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$ ist in E dann und nur dann stark stetig, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Die Funktion $\{a(y, t)\}$, aufgefasst als Funktion der Variablen y, t, ist im Bereich $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ im gewöhnlichen Sinne stetig.*

Beweis. Wir beweisen zuerst die Notwendigkeit dieser Bedingung. Sei $(y_0, t_0) \in \mathsf{D}$, ferner sei $(y_n, t_n) \in \mathsf{D}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Punktfolge, die gegen (y_0, t_0) konvergiert. Die Konvergenz in D sei dabei folgendermassen erklärt: $(y_n, t_n) \xrightarrow{\mathsf{D}} (y_0, t_0)$ für $n \to +\infty$ dann und nur dann, wenn $y_n \xrightarrow{\mathsf{E}} y_0$ und $t_n \to t_0$ für $n \to +\infty$. Aus $a(y_n) \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} a(y_0)$ für $n \to +\infty$ folgt, dass $\{a(y_n, t)\} \rightrightarrows \{a(y_0, t)\}$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$, d.h. $|a(y_n, t) - a(y_0, t)| \leqq \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ unabhängig von $t \in \langle 0, t_1 \rangle$, wobei $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$. Sei $t_1 \geqq t_0$, $t_n \in$

$\in \langle 0, t_1 \rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dann gilt $|a(y_n, t_n) - a(y_0, t_n)| \leqq \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Aus der Stetigkeit der Funktion $\{a(y_0, t)\}$ im Punkte $t = t_0$ folgt, dass $|a(y_0, t_n) - a(y_0, t_0)| \leqq \leqq \tilde{\varepsilon}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wobei $\lim\limits_{n \to +\infty} \tilde{\varepsilon}_n = 0$. Es wird dann

$$|a(y_n, t_n) - a(y_0, t_0)| \leqq |a(y_n, t_n) - a(y_0, t_n)| + |a(y_0, t_n) - a(y_0, t_0)| \leqq$$
$$\leqq \varepsilon_n + \tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n^*$$

$(n = 1, 2, \ldots)$, wobei $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n^* = 0$. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen.

Wir beweisen nun die Hinreichigkeit der Bedingung. Sei $y_0 \in \mathsf{E}$, $y_n \in \mathsf{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \xrightarrow{\mathsf{E}} y_0$ für $n \to +\infty$, $0 \leqq t_0 \leqq t_1 < \mathsf{T}$. Offenbar folgt bei gegebenem $\varepsilon > 0$, dass $|a(y_0, t) - a(y_0, t_0)| \leqq \varepsilon$, $|a(y_n, t) - a(y_0, t_0)| \leqq \varepsilon$, und zwar für alle natürlichen $n > N(\varepsilon, t_0)$ und jedes $t \in \mathsf{U}_{t_0}$, wobei $\mathsf{U}_{t_0} = E[t \in \langle 0, t_1 \rangle; |t - t_0| < \delta(\varepsilon, t_0)]$. Das System S aller dieser Intervalle U_{t_0} überdeckt das kompakte Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$. Die Intervalle U_{t_0} sind entweder offen oder halbabgeschlossen, ferner liegt ein jedes U_{t_0} „auf" dem Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$, d.h. die Intervalle U_{t_0} enthalten keine äusseren Punkte von $0 \leqq t \leqq t_1$. Die linksseitig (rechtsseitig) halbabgeschlossenen Intevalle von S beginnen (enden) im Punkte $t = 0$ $(t = t_1)$. Auch in solchem Fall gilt der Satz von Borel-Lebesgue, d.h. man kann ein endliches Untersystem $\tilde{\mathsf{S}}$ von S auswählen, das gleichfalls das Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$ überdeckt. Es seien $\mathsf{U}_{t_{0,1}}, \mathsf{U}_{t_{0,2}}, \ldots, \mathsf{U}_{t_{0,m}}$ $(m \geqq 1$ ganzzahlig) die Intervalle von $\tilde{\mathsf{S}}$. Für ein $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ gilt dann mit gewissem $\mathsf{U}_{t_{0,i_0}}$ (i_0 ist gleich einer der Zahlen $1, 2, \ldots, m$)

$$|a(y_n, t) - a(y_0, t)| \leqq |a(y_n, t) - a(y_0, t_{0,i_0})| + |a(y_0, t) - a(y_0, t_{0,i_0})| \leqq 2\varepsilon$$

für alle $n > N_{i_0} = N(\varepsilon, t_{0,i_0})$, d.h. $|a(y_n, t) - a(y_0, t)| \leqq 2\varepsilon$ für alle $n > \tilde{N} = \operatorname{Max}(N_1, N_2, \ldots, N_m)$ und jedes $t \in \langle 0, t_1 \rangle$, wobei $N_i = N(\varepsilon, t_{0,i})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Daraus folgt, dass $a(y_n) \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} a(y_0)$ für $n \to +\infty$, d.h., dass die parametrische Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$ im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}$ stark stetig ist.

Wieder sei $a(y)$ eine Distributionsfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathsf{E} \cup (y_0)$, $y_0 \in \mathsf{E}'$. Sei $y_0 \neq y_n \in \mathsf{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \xrightarrow{\mathsf{E}} y_0$ für $n \to +\infty$. Was die Ableitung dieser Distributionsfunktion betrifft, so muss hier vorausgesetzt werden, dass auch der Differenzenquotient $(a(y_n) - a(y_0))/(y_n - y_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Distribution darstellt. Diese Forderung wird erfüllt sein, wenn E z.B. aus lauter reellen Zahlen gebildet ist. Im folgenden setzen wir dies immer voraus.

Definition 11. *Sei $\mathsf{E} \cup (y_0)$ der Definitionsbereich der Distributionsfunktion $a(y)$, $y_0 \in \mathsf{E}'$. Die Distributionsfunktion $a(y)$ ist dann und nur dann stark (schwach) differenzierbar im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}'$, wenn folgendes gilt:*

$$(y_0 \neq y_n \in \mathsf{E}(n = 1, 2, \ldots), y_n \to y_0 \textit{ für } n \to +\infty) \Rightarrow \frac{a(y_n) - a(y_0)}{y_n - y_0} \xrightarrow[\text{stark (schwach)}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} A \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$$
$$\textit{für} \quad n \to +\infty .$$

Die Distribution A ist dabei definitionsgemäss die starke (schwache) Ableitung der Distributionsfunktion $a(y)$ im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}' : A = a'(y_0)$.

Beispiel 4. Sei z.B. $a(y) = \{y^2 + t^2\}$, d.h. eine parametrische Distributionsfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathsf{E} \cup (y_0)$, $y_0 \in \mathsf{E}'$. Man sieht, dass $\{y^2 + t^2\} = uy^2 + 2u^3$. Der Differenzenquotient ist gleich $(a(y_n) - a(y_0))/(y_n - y_0) = u(y_n + y_0) = \{y_n + y_0\}$, $y_0 \neq y_n \in \mathsf{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to y_0$ für $n \to +\infty$. Offenbar $\{y_n + y_0\} \rightrightarrows \{2y_0\}$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$, d.h. $(a(y_n) - a(y_0))/(y_n - y_0) \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} 2y_0 u$ für $n \to +\infty$. Die Distributionsfunktion $a(y)$ ist demzufolge im Punkte $y_0 \in \mathsf{E}'$ stark differenzierbar; die entsprechende starke Ableitung von $a(y)$ in y_0 ist gleich $a'(y_0) = 2y_0 u = \{2y_0\} = \{(\partial(y^2 + t^2)/\partial y)_{y=y_0}\}$.

Die schwache Differenzierbarkeit wird durch die starke impliziert. Für die starke und schwache Ableitung gelten folgende Rechenregel: $[a(y) \pm b(y)]' = a'(y) \pm b'(y)$, $[a(y)\, b(y)]' = a'(y)\, b(y) + a(y)\, b'(y)$, $[ca(y)]' = ca'(y)$, $c \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$; ferner gilt $[a(b(y))]' = a'(b(y)) \,.\, b'(y)$ mit einer numerischen Distributionsfunktion $b(y)$, deren Wertevorrat zum Definitionsbereich der Distributionsfunktion $a(y)$ gehört. In allen diesen Formeln wird vorausgesetzt, dass die rechten Seiten einen Sinn haben. Die starke (schwache) Differenzierbarkeit impliziert die starke (schwache) Stetigkeit. Ist $a(y)$ eine numerische Distributionsfunktion, dann fallen die Begriffe der schwachen Differenzierbarkeit und der Differenzierbarkeit im gewöhnlichen Sinne zusammen.

Im Beispiele 4 haben wir gesehen, dass die starke Ableitung der in diesem Beispiel betrachteten parametrischen Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$ durch die partielle Ableitung $\{\partial a(y, t)/\partial y\}$ ausgedrückt ist. Sei $a(y) = \{a(y, t)\}$ eine parametrische Distributionsfunktion mit dem insichdichten Definitionsbereich E. Es fragt sich, ob aus der gewöhnlichen Stetigkeit der partiellen Ableitung $\{a_y(y, t)\}$ (aufgefasst als Funktion der Variablen y, t) in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ auf die starke Differenzierbarkeit von $a(y)$ in E geschlossen werden kann (sieh in analoger Richtung den Satz 1). Nun gilt folgender

Satz 2. *Es existiert mindestens eine parametrische Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$, die in einer insichdichten Menge E definiert ist, derart, dass folgendes gilt*: 1° *Die partielle Ableitung $\{a_y(y, t)\}$ ist als Funktion der Variablen y, t in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ im gewöhnlichen Sinne stetig*; 2° *die Distributionsfunktion $a(y)$ ist nicht stark differenzierbar in E, d.h., dass mindestens in einem Punkte $y_0 \in \mathsf{E}$ die starke Ableitung $a'(y_0)$ nicht existiert.*

Beweis. Auf der y-Achse betrachten wir die Intervalle $\mathsf{F}_n = \langle 1/2^{2n-1}, 1/2^{2n-2} \rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Sei $\mathsf{E}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{F}_n$. Offenbar ist $y_0 = 0$ ein Häufungspunkt von E_0, ferner ist $\mathsf{E} = \mathsf{E}_0 \cup (y_0)$ eine insichdichte Menge. In E sei die folgende parametrische

Distributionsfunktion $a(y) \doteq \{a(y, t)\}$ definiert (sieh Abb. 1): $a(0, t) = 0$ im Intervall $0 \leqq t < \mathsf{T}$, für $y \in \mathsf{F}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sei

$$a(y, t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leqq t < \dfrac{1}{2^{2n-1}}, \\ \dfrac{1}{2^{2n-2}} - t & \text{für } \dfrac{1}{2^{2n-1}} \leqq t < \dfrac{1}{2^{2n-2}}, \\ 0 & \text{für } \dfrac{1}{2^{2n-2}} \leqq t < \mathsf{T}; \end{cases}$$

ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\mathsf{T} \geqq 1$ angenommen werden.

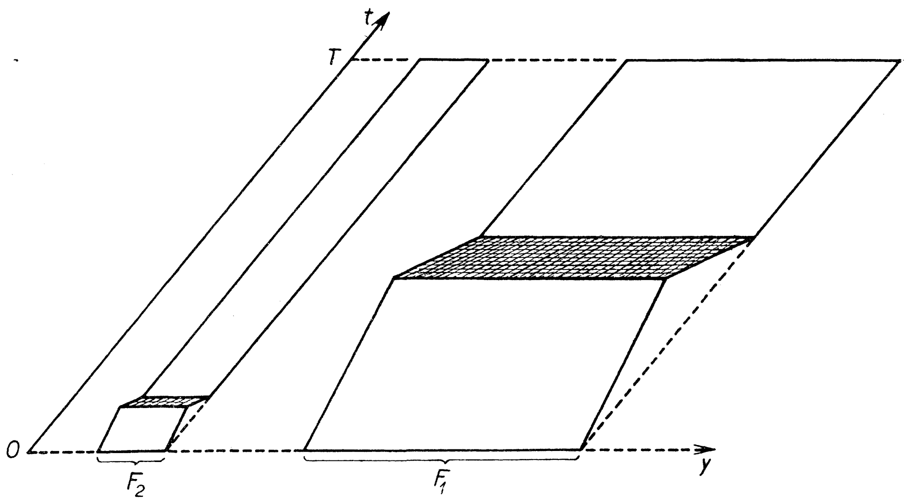

Abb. 1.

Sei $y_n \in \mathsf{E}_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to 0$ für $n \to +\infty$. Für $t = 0$ ist $(a(y_n, 0) - a(0, 0)) : y_n = a(y_n, 0)/y_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, d.h. $(a(y_n, 0) - a(0, 0))/y_n \to a_y(0, 0) = 0$ für $n \to +\infty$. Ist nun $t_0 \in (0, \mathsf{T})$, dann existiert eine natürliche Zahl n_0 derart, dass $a(y_n, t_0) = 0$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$. Dies hat zur Folge, dass $(a(y_n, t_0) - a(0, t_0))/y_n \to a_y(0, t_0) = 0$ für $n \to +\infty$. Damit ist gezeigt, dass $(a(y_n, t) - a(0, t))/y_n \to a_y(0, t) = 0$ für $n \to +\infty$, $0 \leqq t < \mathsf{T}$. Man sieht unmittelbar (sieh Abb. 1), dass auch $(a(y_n, t) - a(y_0^*, t))/(y_n - y_0^*) \to a_y(y_0^*, t) = 0$ für $n \to +\infty$, $0 \leqq t < \mathsf{T}$, wobei $y_0^* \in \mathsf{E}_0$, $y_0^* \neq y_n \in \mathsf{E}_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to y_0^*$ für $n \to +\infty$.

Die Folge $\tilde{y}_n = 1/2^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, die aus den Randpunkten der Intervalle F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ besteht, konvergiert gleichfalls gegen Null. Betrachten wir z.B. das Intervall $\mathsf{J} = \langle 0, 1/2 \rangle$ auf der t-Achse. Jeder natürlichen Zahl n sei die natürliche

Zahl $N = 2n - 1$ und die Zahl $t_n = 1/2^N \in \mathsf{J}$ zugeordnet. Es wird dann: $\tilde{y}_{N+1} = \tilde{y}_{2n} = 1/2^{2n-1} = 1/2^N$, $(a(\tilde{y}_{N+1}, t_n) - a(0, t_n))/\tilde{y}_{N+1} = (1/2^N)/(1/2^N) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Damit ist die folgende, in logischen Symbolen ausgedrückte Aussage, bewiesen ($\mathcal{N}$ bedeutet die Menge aller natürlichen Zahlen):

$$(5) \qquad \sum_{\varepsilon_0 \in (0,1)} \prod_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\substack{N \geqq n \\ N \in \mathcal{N}}} \sum_{t_n \in \mathsf{J}} \left[\left| \frac{a(\tilde{y}_{N+1}, t_n) - a(0, t_n)}{\tilde{y}_{N+1}} - a_y(0, t_n) \right| > \varepsilon_0 \right].$$

Aus (5) folgt, dass $\{(a(\tilde{y}_n, t) - a(0, t))/\tilde{y}_n\} \not\rightrightarrows \{a_y(0, t)\}$ für $n \to +\infty$ in J. Die starke Ableitung $a'(0)$ der parametrischen Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$ existiert deshalb nicht, obwohl $\{a_y(y, t)\}$, betrachtet als Funktion der Variablen y, t, in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ im gewöhnlichen Sinne stetig ist.

Im Gegenteil zu Satz 2 gilt nun folgender

Satz 3. *Der Definitionsbereich* E *der parametrischen Distributionsfunktion* $a(y) = \{a(y, t)\}$ *sei ein kompaktes Intervall der y-Achse, ferner dann sei die partielle Ableitung* $\{a_y(y, t)\}$, *betrachtet als Funktion der Variablen* y, t, *in* $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ *im gewöhnlichen Sinne stetig. Dann ist* $a(y)$ *in* E *stark differenzierbar und es gilt*: $a'(y) = \{a_y(y, t)\}$.

Beweis. Sei $y_0 \in \mathsf{E}$, $y_0 \neq y_n \in \mathsf{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to y_0$ für $n \to +\infty$. Bei Benützung des Mittelwertsatzes folgt $(a(y_n, t) - a(y_0, t))/(y_n - y_0) = a_y(\xi_n(t), t)$; dabei liegt $\xi_n(t)$ zwischen den Punkten y_0, y_n $(n = 1, 2, \ldots; 0 \leqq t < \mathsf{T})$. Sei $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$. Laut Voraussetzung ist $\{a_y(y, t)\}$, betrachtet als Funktion der Variablen y, t, im kompakten Rechteck $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, t_1 \rangle$ $(0 \leqq t \leqq t_1)$ stetig, d.h. auch gleichmässig stetig. Daraus folgt, dass $\{a(y_n, t) - a(y_0, t))/(y_n - y_0)\} \rightrightarrows \{a_y(y_0, t)\}$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$. Damit ist bewiesen, dass $(a(y_n) - a(y_0))/(y_n - y_0) \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} a'(y_0)$, wobei $a'(y_0) = \{a_y(y_0, t)\}$.

Beispiel 5. Sei $\mathsf{E} = \langle 0, +\infty)$ der Definitionsbereich der folgenden parametrischen Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$:

$$a(y, t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{y} + \left| 1 - \dfrac{t}{y} \right| & \text{für} \quad y > 0 \quad \text{und} \quad t \geqq 0, \\ 0 & \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad t \geqq 0. \end{cases}$$

Ferner sei $0 < y_n \in \mathsf{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $y_n \to 0+$ für $n \to +\infty$. Der Differenzenquotient ist für $y = 0$ gleich $(a(y_n, t) - a(0, t))/y_n = 1/y_n - t/y_n^2 + |1/y_n - t/y_n^2|$ $(n = 1, 2, \ldots; 0 \leqq t < +\infty)$. Man überzeugt sich leicht, dass $(a(y_n) - a(0))/y_n = a(y_n)/y_n \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\infty} a$ für $n \to +\infty$, wobei $a \in \mathscr{C}_\infty$ eine beliebige starke Distribution bedeuten kann. Durch einfache Rechnung folgt, dass $u^2(a(y_n)/y_n) = \{b(y_n, t)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wobei

$$b(y_n, t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{y_n} - \dfrac{t^3}{3y_n^2} & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq y_n\,, \\ -\dfrac{y_n}{3} + t & \text{für} \quad y_n < t\,. \end{cases}$$

Nun ist weiter

$$|b(y_n, t) - t| = \begin{cases} -t + \dfrac{t^2}{y_n} - \dfrac{t^3}{3y_n^2} & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq y_n\,, \\ \dfrac{y_n}{3} & \text{für} \quad y_n < t\,, \end{cases}$$

d.h.

$$|b(y_n, t) - t| \leqq \begin{cases} y_n + y_n + \dfrac{y_n}{3} & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq y_n\,, \\ \dfrac{y_n}{3} & \text{für} \quad y_n < t \end{cases} \tag{6}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$. Aus (6) folgt, dass $|b(y_n, t) - t| \leqq 7y_n/3 = \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots; \varepsilon_n \to 0$ für $n \to +\infty)$, und zwar unabhängig von $t \in \langle 0, +\infty)$. Damit ist bewiesen, dass $\{b(y_n, t)\} \rightrightarrows \{t\} = u^2$ für $n \to +\infty$ auf jedem kompakten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1 < +\infty$, d.h. $a(y_n)/y_n \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\infty} a'(0) = 1 = \delta$ für $n \to +\infty$.

Im Zusammenhang mit der Ableitung einer Distributionsfunktion $a(y)$ sei noch folgendes bemerkt. Die Distributionsfunktion $a(y)$ sei in dem insichdichten Definitionsbereich E konstant. Dann ist die schwache Ableitung $a'(y)$ gleich Null in E. Es fragt sich, ob auch umgekehrt aus $a'(y) = 0$ in E die Konstanz der Distributionsfunktion $a(y)$ in E folgt. Sei z.B. $a(y) = \{a(y, t)\}$ die folgende, in $\mathsf{E} = \mathsf{F}_1 \cup \mathsf{F}_2$ (sieh den Beweis von Satz 2) definierte parametrische Distributionsfunktion: $\mathsf{F}_n = \langle 1/2^{2n-1}, 1/2^{2n-2} \rangle$,

$$a(y, t) = \begin{cases} t & \text{für} \quad 0 \leqq t < \dfrac{1}{2^{2n-1}}\,, \\ \dfrac{1}{2^{2n-2}} - t & \text{für} \quad \dfrac{1}{2^{2n-2}} \leqq t < \dfrac{1}{2^{2n-2}}\,, \\ 0 & \text{für} \quad \dfrac{1}{2^{2n-2}} \leqq t < \mathsf{T}\,, \end{cases}$$

$y \in \mathsf{F}_n$ $(n = 1, 2)$. Die starke (und auch die schwache) Ableitung $a'(y)$ ist gleich Null in E, obwohl $a(y)$ in E nicht konstant ist. Offenbar ist aber $a(y)$ getrennt konstant in den kompakten Intervallen F_1, F_2 der y-Achse. Man kann beweisen, dass wenn 1° E ein auf der y-Achse kompaktes Intervall ist, in dem die parametrische Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$ definiert ist, und wenn 2° die partielle Ableitung $\{a_y(y, t)\}$, aufgefasst als Funktion der Variablen y, t, in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ im gewöhnlichen Sinne stetig ist und $a(y)$ die starke Ableitung $a'(y) = 0$ in E besitzt, dass dann $a(y)$ in E konstant ist.

Wieder sei E ein kompaktes Intervall der y-Achse und $a(y)$ eine in E definierte Distributionsfunktion. Die Distributionsfunktion $a(y)$ möge in E schwach differenzierbar sein. Zu jedem $y_0 \in \mathsf{E}$ existiert dann eine bestimmte starke Distribution $g \notin \mathscr{N}_\mathsf{T}$ ($\mathscr{N}_\mathsf{T}$ bedeutet die Nullteilermenge von $\mathscr{C}_\mathsf{T}$) derart, dass folgendes gilt:

$$(y_0 \neq y_n \in \mathsf{E}\,(n = 1, 2, \ldots),\ y_n \to y_0 \text{ für } n \to +\infty) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g\,\frac{a(y_n) - a(y_0)}{y_n - y_0} \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_\mathsf{T}} g a'(y_0) \quad \text{für} \quad n \to +\infty\,.$$

Manchmal gelingt es die Distribution $g \notin \mathscr{N}_\mathsf{T}$ unabhängig von $y_0 \in \mathsf{E}$ zu wählen. Die Distributionsfunktion $ga(y)$ ist dann in E stark differenzierbar. Gilt ferner $u^m a(y) = \{b(y, t)\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ für jedes $y \in \mathsf{E}$ $(m \geqq 1$ ganzzahlig$)$, dann ist auch $u^m g a(y)$ in E stark differenzierbar, wobei $u^m g a'(y) = g\{b_y(y, t)\}$. Die Voraussetzung, dass $a'(y) = 0$ in E, hat zur Folge, dass auch $u^m g a'(y) = 0$ in E, d.h. $\{b_y(y, t)\} = \{0\}$ in E. Die Funktion $b_y(y, t)$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ ist somit unabhängig von $y \in \mathsf{E}$. Daraus folgt, dass $u^m a(y)$ in E konstant ist, d.h. $u^m a(y) = c \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$. Durch Multiplikation mit s^m (sieh S. 365) folgt dann, dass auch $a(y) = s^m c \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ in E konstant. ist.

Im Vorangehenden wurde über die „Differentialrechnung in $\mathscr{C}_\mathsf{T}$" berichtet. Nun bleibt noch die „Integralrechnung in $\mathscr{C}_\mathsf{T}$" übrig. Wir beginnen mit folgender

Definition 12. *Die parametrische Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$, deren Definitionsbereich E eine auf der y-Achse (im Sinne von* Lebesgue*) messbare Menge ist, wird als stark summierbar in E genannt, wenn folgendes gilt:* 1° *Die Funktion $\{a(y, t)\}$, betrachtet als Funktion der Variablen y, t in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$, ist für jedes $t \in \langle 0, \mathsf{T})$ messbar in E;* 2° *$|a(y, t)| \leqq b(y)\, c(t)$ in D, wobei $b(y)$ eine in E nicht negative und summierbare numerische Distributionsfunktion bedeutet, $\{c(t)\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ ebenfalls nicht negativ.*

Beispiel 6. Auf der y-Achse sei E eine beschränkte und messbare Menge, die das Intervall $(-1, 1)$ nicht enthält. In E betrachten wir die folgende parametrische Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$, $\mathsf{T} < +\infty$:

$$a(y, t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t = y\,, \\ (t - y)^2 \sin^2 \dfrac{1}{t - y} & \text{für} \quad t \neq y\,. \end{cases}$$

Für jedes $t \in \langle 0, \mathsf{T})$ ist $\{a(y, t)\}$, aufgefasst als Funktion der Variablen y, t in $\mathsf{D} =$

$= \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})\,(0 \leqq t < \mathsf{T})$, messbar in E. Ferner ist $|a(y, t)| \leqq (t - y)^2 \leqq t^2 + y^2 + 2t|y|$ in D. Offenbar existiert eine Konstante $K > 0$ derart, dass $t^2 + y^2 < K$ in D. Es wird dann in D: $|a(y, t)| \leqq K + 2t|y|$. Ferner ist $|y| \geqq 1$ für jedes $y \in \mathsf{E}$. Dies hat zur Folge, dass $|a(y, t)| \leqq K|y| + 2t|y| = |y|\,(K + 2t)$ in D. Die numerische Distributionsfunktion $b(y) = |y|$ ist in E nicht negativ und summierbar, $\{c(t)\} = \{K + 2t\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ ist ebenfalls nicht negativ. Damit ist bewiesen (sieh Definition 12), dass die Distributionsfunktion $a(y)$ in E stark summierbar ist.

Definition 13. *Die Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$ sei stark summierbar in E. Das sogenannte starke Integral von $a(y)$ in E ist dann*

$$\int_\mathsf{E} a(y)\,\mathrm{d}y = \left\{\int_\mathsf{E} a(y, t)\,\mathrm{d}y\right\},$$

wobei das Integral in der Klammer als ein gewöhnliches konvergentes LEBESGUE*sches Integral aufzufassen ist.*

Beispiel 7. Sei $\mathsf{E} = (-\infty, +\infty)$, $\{a(y, t)\} = \{t/(1 + y^2)\}$, $\mathsf{T} \leqq +\infty$. Die Distributionsfunktion $a(y) = \{a(y, t)\}$ ist offenbar stark summierbar in E und ihr starkes Integral ist gleich

$$\int_\mathsf{E} a(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} a(y)\,\mathrm{d}y = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} [t/(1 + y^2)]\,\mathrm{d}y\right\} = \{\pi t\} = \pi u^2 .$$

Die sogenannte schwache Summierbarkeit und auch das schwache Integral einer Distributionsfunktion werden nun ähnlich eingeführt, wie die Begriffe der schwachen Stetigkeit und der schwachen Differenzierbarkeit.

Definition 14. *Die Distributionsfunktion $a(y)$ wird als schwach summierbar im Definitionsbereich E genannt, wenn eine starke Distribution $g \notin \mathscr{N}_\mathsf{T}$ ($\mathscr{N}_\mathsf{T}$ bezeichnet die Nullteilermenge von $\mathscr{C}_\mathsf{T}$) derart existiert, dass $ga(y)$ in E stark summierbar ist (sieh Definition 12). Die Distribution l, die der Gleichung $gl = \int_\mathsf{E} ga(y)\,.\,\mathrm{d}y$ genügt, wird dann als schwaches Integral von $a(y)$ in E bezeichnet: $l = \int_\mathsf{E} a(y)\,\mathrm{d}y$.*

Beispiel 8. Betrachten wir die HEAVISIDEsche Distributionsfunktion $h(y) = \{h(y, t)\}$ (sieh Beispiel 3) im Intervall $\mathsf{E} = \langle 0, y_0\rangle$ der y-Achse, $0 < y_0 < +\infty$. Es wurde gezeigt, dass $uh(y) = \{h_1(y, t)\}$, wobei

$$h_1(y, t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t < y, \\ t - y & \text{für} \quad 0 \leqq y < t \end{cases}$$

$(0 \leqq t < \mathsf{T} \leqq +\infty)$. Nun ist $|h_1(y, t)| \leqq |t - y| \leqq |t| + |y| \leqq t + y_0$ in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$, d.h. die numerische Distributionsfunktion $b(y) = 1$ ist in E nicht negativ und summierbar, $\{c(t)\} = \{t + y_0\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ ist ebenfalls nicht negativ (sieh Definition 12; auch die übrigen Forderungen in der Definition 12 sind offenbar erfüllt). Daraus folgt, dass $uh(y)$ in E stark summierbar ist, d.h. $h(y)$ ist in E schwach summierbar. Durch einfache Rechnung folgt:

$\int_{\mathsf{E}} uh(y)\,\mathrm{d}y = \{b_{y_0}(t)\}$, wobei

$$b_{y_0}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & \text{für} \quad 0 \leqq t < y_0 \,, \\[2ex] \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2}(t - y_0)^2 & \text{für} \quad y_0 \leqq t \,, \end{cases}$$

d.h. $\{b_{y_0}(t)\} = u\{\tilde{b}_{y_0}(t)\}$, wobei

$$\tilde{b}_{y_0}(t) = \begin{cases} t & \text{für} \quad 0 \leqq t < y_0 \,, \\ y_0 & \text{für} \quad y_0 \leqq t \,. \end{cases} \tag{7}$$

Das schwache Integral der HEAVISIDEschen Distributionsfunktion $h(y) = \{h(y, t)\}$ in $\mathsf{E} = \langle 0, y_0 \rangle$ ist dann (sieh (7))

$$l = \int_{\mathsf{E}} h(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{y_0} h(y)\,\mathrm{d}y = \{\tilde{b}_{y_0}(t)\} \,. \tag{8}$$

Die Existenz des starken (schwachen) Integrals einer stark (schwach) summierbaren Distributionsfunktion ist also immer garantiert. Noch sei $a(y)$ eine numerische Distributionsfunktion, die im gewöhnlichen Sinne in E summierbar ist. Dann ist z.B. $u^2 a(y) = \{ta(y)\} = \{d(y, t)\}$ eine parametrische Distributionsfunktion mit $|d(y, t)| = |a(y)|\, t$ in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$. Daraus folgt, dass $u^2 a(y)$ in E stark summierbar ist, d.h. die numerische Distributionsfunktion $a(y)$ ist in E schwach summierbar. Das starke Integral von $u^2 a(y)$ in E ist gleich

$$\int_{\mathsf{E}} u^2\, a(y)\,\mathrm{d}y = \left\{\int_{\mathsf{E}} t\, a(y)\,\mathrm{d}y\right\} = \left\{t \int_{\mathsf{E}} a(y)\,\mathrm{d}y\right\} = u^2 \int_{\mathsf{E}} a(y)\,\mathrm{d}y \,. \tag{9}$$

Aus (9) ist unmittelbar abzulesen, dass das schwache Integral von $a(y)$ in E mit dem gewöhnlichen konvergenten LEBESGUEschen Integral $\int_{\mathsf{E}} a(y)\,\mathrm{d}y$ zusammenfällt.

Man kann leicht beweisen: Ist $a(y) = \{a(y, t)\}$ eine parametrische Distributionsfunktion mit dem kompakten Definitionsbereich E auf der y-Achse, die in E stark stetig ist, dann ist $a(y)$ in E stark summierbar. Es wurde bewiesen (sieh Satz 1), dass die Funktion $\{a(y, t)\}$, betrachtet als Funktion der Variablen y, t, in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ im gewöhnlichen Sinne stetig ist. Offenbar gilt $|a(y, t)| \leqq \leqq K(t) = \operatorname{Max}_{\mathsf{D}_t} |a(y, \tilde{t})|$, wobei $\mathsf{D}_t = \mathsf{E} \times \langle 0, t \rangle$ $(0 \leqq \tilde{t} \leqq t)$. Die numerische Distributionsfunktion $b(y) = 1$ ist nicht negativ und summierbar in E, ferner ist dann $\{K(t)\} \in \mathscr{C}_\mathsf{T}$ ebenfalls nicht negativ. Für jedes $t \in \langle 0, \mathsf{T})$ ist $\{a(y, t)\}$, aufgefasst als Funktion der Variablen y, t, messbar in E. Daraus folgt (sieh Definition 12), dass $a(y)$

in E stark summierbar ist. Aus der schwachen Stetigkeit der Distributionsfunktion $a(y)$ im kompakten Definitionsbereich E folgt offenbar die schwache Summierbarkeit; dabei wird nun immer die Distribution $g \notin \mathcal{N}_{\mathrm{T}}$ ($\mathcal{N}_{\mathrm{T}}$ bedeutet die Nullteilermenge von $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$), die beim Übergang zur starken Stetigkeit auftritt, als von $y_0 \in \mathrm{E}$ unabhängig vorausgesetzt.

Für das starke und schwache Integral von Distributionsfunktionen gelten ähnliche Rechenregeln wie für das gewöhnliche konvergente LEBESGUEsche Integral. Ist z.B. $a(y)$ stark (schwach) summierbar in den Mengen F und G, die als zueinander fremd vorausgesetzt werden, dann ist $a(y)$ auch in der Vereinigungsmenge $\mathrm{F} \cup \mathrm{G}$ stark (schwach) summierbar, wobei $\int_{\mathrm{F}\cup\mathrm{G}} a(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathrm{F}} a(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathrm{G}} a(y)\,\mathrm{d}y$. Sind ferner die Distributionsfunktionen $a(y)$, $b(y)$ stark (schwach) summierbar in E, dann sind auch die Summe und Differenz $a(y) \pm b(y)$ stark (schwach) summierbar in E, wobei $\int_{\mathrm{E}} [a(y) \pm b(y)]\,\mathrm{d}y = \int_{\mathrm{E}} a(y)\,\mathrm{d}y \pm \int_{\mathrm{E}} b(y)\,\mathrm{d}y$. Ist schliesslich $a(y)$ stark (schwach) summierbar in E und $c \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$, dann ist auch das Produkt $ca(y)$ in E stark (schwach) summierbar, wobei $\int_{\mathrm{E}} ca(y)\,\mathrm{d}y = c \int_{\mathrm{E}} a(y)\,\mathrm{d}y$. Selbstverständlich gilt $\int_{y_0}^{y_0} a(y)\,\mathrm{d}y = 0$ für jede in $y_0 \in (-\infty, +\infty)$ definierte Distributionsfunktion $a(y)$, und zwar unabhängig von der Art des Integrals.

Allgemein sei $a(y)$ schwach summierbar in E und $c \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$. Dann existiert eine starke Distribution $g \notin \mathcal{N}_{\mathrm{T}}$ ($\mathcal{N}_{\mathrm{T}}$ bedeutet die Nullteilermenge von $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$) derart, dass $ga(y)$ in E stark summierbar ist. Ferner sei $c_n \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine gegen c in $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ schwach konvergente Folge. Es existiert dann eine starke Distribution $h \notin \mathcal{N}_{\mathrm{T}}$ derart, dass $hc_n \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_{\mathrm{T}}} hc \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$. Die Distributionsfunktion $ghca(y)$ ist dann gleichfalls in E stark summierbar. Offenbar gilt für die starke Distribution gh, dass $gh \notin \mathcal{N}_{\mathrm{T}}$. Damit ist gezeigt, dass $ca(y)$ in E schwach summierbar ist, wobei $\int_{\mathrm{E}} ghca(y)\,\mathrm{d}y = gh \int_{\mathrm{E}} ca(y)\,\mathrm{d}y$, $\int_{\mathrm{E}} ghca(y)\,\mathrm{d}y = ghc \int_{\mathrm{E}} a(y)\,\mathrm{d}y$ (wegen $ghc \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}$), d.h. $\int_{\mathrm{E}} ca(y)\,\mathrm{d}y = c \int_{\mathrm{E}} a(y)\,\mathrm{d}y$.

Zur Berechnung der starken und schwachen Integrale von Distributionsfunktionen kann oft mit Vorteil die Integration durch Substitution angewendet werden. Sei F eine offene Menge der $\tilde{y}$-Achse, f eine Abbildung von F auf die Menge G der y-Achse. Die Abbildung f sei in F regulär und schlicht, d.h. die schwache Ableitung $f'(\tilde{y})$ der numerischen Distributionsfunktion $y = f(\tilde{y})$ sei schwach stetig und stets von Null verschieden in F. Ferner sei $a(y) = \{a(y, t)\}$ eine in $\mathrm{E} \subset \mathrm{G}$ stark summierbare parametrische Distributionsfunktion: $\int_{\mathrm{E}} a(y)\,\mathrm{d}y = \{\int_{\mathrm{E}} a(y, t)\,\mathrm{d}y\}$. Aus dem bekannten Satz über die Substitution in konvergente LEBESGUEsche Integrale folgt, dass $\int_{\mathrm{E}} a(y, t)\,\mathrm{d}y = \int_{f_{-1}(\mathrm{E})} a(f(\tilde{y}), t) f'(\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y}$ $(0 \leqq t < \mathrm{T})$, wobei f_{-1} die zu f inverse Abbildung bedeutet. Unter den angeführten Voraussetzungen gilt für das starke Integral:

$$\int_{\mathrm{E}} a(y)\,\mathrm{d}y = \int_{f_{-1}(\mathrm{E})} a(f(\tilde{y}))\, f'(\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y}\,. \tag{10}$$

Bei denselben Voraussetzungen gilt (10) auch für das schwache Integral $\int_{\mathrm{E}} a(y)\,\mathrm{d}y$.

Beispiel 9. Sei $\mathsf{E} = \langle 0, \pi/2 \rangle$. Die in E definierte parametrische Distributionsfunktion $a(y) = \{\sin(y + t)\}$ ist offenbar stark summierbar in E. Mittels der numerischen Distributionsfunktion $y = f(\tilde{y}) = \tilde{y} - t$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ wird das Intervall $\langle t, \pi/2 + t \rangle$ der $\tilde{y}$-Achse auf das Intervall E abgebildet. Die Abbildung f ist regulär und schlicht in $\langle t, \pi/2 + t \rangle$. Es wird dann (sieh (10)):

$$\int_0^{\pi/2} a(y)\,\mathrm{d}y = \left\{\int_0^{\pi/2} \sin(y + t)\,\mathrm{d}y\right\} = \left\{\int_t^{\pi/2+t} \sin y\,\mathrm{d}y\right\} = \{\cos t + \sin t\}\,.$$

In manchen Fällen kann die Methode der partiellen Integration mit Vorteil angewendet werden. Sei z.B. $\mathsf{E} = \langle \tilde{b}, c \rangle$ ein kompaktes Interval der y-Achse, $a(y) = \{a(y, t)\}$ eine in E definierte parametrische Distributionsfunktion. Ferner sei $\{a_y(y, t)\}$, aufgefasst als Funktion der Variablen y, t, in $\mathsf{D} = \mathsf{E} \times \langle 0, \mathsf{T})$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ im gewöhnlichen Sinne stetig. Dann ist $a(y)$ in E stark differenzierbar, $a'(y) = \{a_y(y, t)\}$ (sieh Satz 3). Aus der starken Differenzierbarkeit folgt die starke Stetigkeit von $a(y)$ in E, worauf dann $a(y)$ in E stark summierbar ist. Offenbar ist auch $a'(y)$ stark stetig in E, d.h. mit $a(y)$ ist auch die Ableitung $a'(y)$ stark summierbar in E. Neben $a(y)$ sei noch eine zweite in E definierte, parametrische Distributionsfunktion $b(y) = \{b(y, t)\}$ gegeben. Auch die Funktion $\{b_y(y, t)\}$, betrachtet als Funktion der Variablen y, t, sei in D im gewöhnlichen Sinne stetig. Ähnlich wie oben ist dann mit $b(y)$ auch die Ableitung $b'(y)$ stark summierbar in E.

Auch die Produkte $a'(y)\,b(y)$, $a(y)\,b'(y)$ sind stark stetig in E, d.h. stark summierbar in E. Es wird dann:

$$(11) \qquad \int_{\tilde{b}}^{c} a'(y)\,b(y)\,\mathrm{d}y = \left\{\int_{\tilde{b}}^{c}\left[\int_0^t a_y(y, t - x)\,b(y, x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\right\}.$$

Aus der Existenz des Doppelintegrals $\int_{\tilde{b}}^{c}\int_0^t a_y(y, t - x)\,b(y, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ $(0 \leqq t < \mathsf{T})$ folgt, dass in der Klammer in (11) der Satz von Fubini angewendet werden kann:

$$(12) \qquad \int_{\tilde{b}}^{c} a'(y)\,b(y)\,\mathrm{d}y = \left\{\int_0^t \mathrm{d}x\left[\int_{\tilde{b}}^{c} a_y(y, t - x)\,b(y, x)\,\mathrm{d}y\right]\right\} =$$

$$= \left\{\int_0^t \mathrm{d}x\left[a(c, t - x)\,b(c, x) - a(\tilde{b}, t - x)\,b(\tilde{b}, x) - \int_{\tilde{b}}^{c} a(y, t - x)\,b_y(y, x)\,\mathrm{d}y\right]\right\} =$$

$$= a(c)\,b(c) - a(\tilde{b})\,b(\tilde{b}) - \left\{\int_0^t \mathrm{d}x\left[\int_{\tilde{b}}^{c} a(y, t - x)\,b_y(y, x)\,\mathrm{d}y\right]\right\}.$$

Durch nochmalige Anwendung des Satzes von Fubini folgt schliesslich aus (12) die Gültigkeit der bekannten Formel:

$$(13) \qquad \int_{\tilde{b}}^{c} a'(y)\,b(y)\,\mathrm{d}y = [a(y)\,b(y)]_{\tilde{b}}^{c} - \int_{\tilde{b}}^{c} a(y)\,b'(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Es seien noch $a(y)$, $b(y)$ zwei in $\mathsf{E} = \langle \tilde{b}, c\rangle$ definierte Distributionsfunktionen, deren schwache Ableitungen $a'(y)$, $b'(y)$ in E schwach stetig sind. Für das schwache Integral $\int_{\tilde{b}}^{c} a'(y)\, b(y)\, \mathrm{d}y$ gilt dann dieselbe Formel (13).

Abschliessend sei $a(y) = \{a(y, t)\}$ eine parametrische Distributionsfunktion, die im kompakten Intervall $\mathsf{E} = \langle b, c\rangle$ der y-Achse definiert ist. Sei $a(y)$ stark stetig in E. Dann ist auch $a(\tilde{y})$ in jedem Teilintervall $b \leqq \tilde{y} \leqq y$ von E stark stetig. Für jedes $y \in \mathsf{E}$ existiert somit das starke Integral $A(y) = \int_b^y a(\tilde{y})\, \mathrm{d}\tilde{y}$.

Es seien y', $y'' \in (b, c)$, $y' \neq y''$. Offenbar ist $A(y'') - A(y') = \int_{\langle b, y''\rangle} a(y)\, \mathrm{d}y - \int_{(b,y'\rangle} a(y)\, \mathrm{d}y$. Ferner ist $-\int_{(b,y'\rangle} a(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\langle y', b)} a(y)\, \mathrm{d}y$, d.h. $A(y'') - A(y') = \int_{y'}^{y''} a(y)\, \mathrm{d}y$ (die Intervalle $\langle y', b)$, $\langle b, y''\rangle$ sind zueinander fremd). Es wird dann:

$$\frac{A(y'') - A(y')}{y'' - y'} - a(y') =$$
$$= \frac{1}{y'' - y'} \int_{y'}^{y''} [a(y) - a(y')]\, \mathrm{d}y = \frac{1}{y'' - y'} \left\{ \int_{y'}^{y''} [a(y, t) - a(y', t)]\, \mathrm{d}y \right\}.$$

Sei nun $0 \leqq t \leqq t_1 < \mathsf{T}$. Die Funktion $\{a(y, t)\}$, aufgefasst als Funktion der Variablen y, t, ist in dem kompakten Rechteck $\mathsf{D}_{t_1} = \mathsf{E} \times \langle 0, t_1\rangle$ im gewöhnlichen Sinne stetig, d.h. auch gleichmässig stetig. Es gilt dann $|a(y, t) - a(y', t)| \leqq \varepsilon$ in D_{t_1} immer dann, wenn $|y - y'| < \delta = \delta(\varepsilon)$. Für $|y'' - y'| < \delta$ und $0 \leqq t \leqq t_1$ gilt dann folgendes:

$$\left| \frac{1}{y'' - y'} \int_{y'}^{y''} [a(y, t) - a(y', t)]\, \mathrm{d}y \right| \leqq \tag{14}$$
$$\leqq \frac{1}{|y'' - y'|} \left| \int_{y'}^{y''} |a(y, t) - a(y', t)|\, \mathrm{d}y \right| \leqq \frac{1}{|y'' - y'|} \left| \varepsilon \int_{y'}^{y''} \mathrm{d}y \right| = \varepsilon .$$

Aus (14) folgt, dass $(A(y'') - A(y'))/(y'' - y') \xrightarrow[\text{stark}]{\mathscr{C}_{\mathsf{T}}} a(y')$ für $y'' \to y'$. D.h., dass die Distributionsfunktion $A(y)$ in (b, c) stark differenzierbar ist, wobei $A'(y) = a(y)$. Ähnlich wird festgestellt: Ist $a(y)$ eine in $\mathsf{E} = \langle b, c\rangle$ schwach stetige Distributionsfunktion, dann ist die Distributionsfunktion $A(y) = \int_b^y a(\tilde{y})\, \mathrm{d}\tilde{y}$ im Intervall (b, c) schwach differenzierbar, wobei $A'(y) = a(y)$. Dasselbe gilt im Intervall $\mathsf{E} = \langle b, c\rangle$; in den Randpunkten ist dabei $A'_+(b) = a(b)$, $A'_-(c) = a(c)$.

3. Im Vorangehenden wurden die wichtigsten Begriffe aus der „Analysis der Distributionen“ behandelt. In diesem Abschnitt wird die Theorie von den Distributionen auf eine bestimmte Problematik angewandt (in diesem Zusammenhang sieh [5], [6], [7], [8]). Zu diesem Zweck wird zuerst eine unwesentliche Erweiterung der Funktionen aus $\mathscr{C}_\infty$ vorgenommen: Eine jede Funktion $\{a(t)\}$ aus $\mathscr{C}_\infty$ (wir behalten diese Bezeichnung) soll links vom Ursprung $t = 0$ identisch verschwinden. Das Produkt zweier Funktionen $a = \{a(t)\}$, $b = \{b(t)\}$ aus $\mathscr{C}_\infty$ kann dann in der Form

$$ab = \{a(t)\}\, \{b(t)\} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} a(t - x)\, b(x)\, \mathrm{d}x \right\} \tag{15}$$

geschrieben werden. Ähnlich soll eine jede Funktion $\{a(t)\}$ aus $\mathscr{S}_\infty$ links vom Ursprung fast überall verschwinden. Das Produkt zweier Funktionen aus $\mathscr{S}_\infty$ ist dann ebenfalls durch die Formel (15) ausgedrückt.

Die Funktion $g = \{g(t)\} \in \mathscr{C}_\infty$ besitze folgende Eigenschaften: 1° $g' = \{g'(t)\} \in \mathscr{C}_\infty$; 2° $g(0) = 0$; 3° $\left|\int_c^d g(x)\,dx\right| \leqq S$ für jedes kompakte Intervall $J = \langle c, d\rangle$, wobei $S > 0$ eine von J unabhängige endliche Zahl bedeutet.

Es folgt $\lim\limits_{t\to 0+} [g(t)/t] = \lim\limits_{t\to 0+} g'(t) = g'(0)$. Der Ursprung $t = 0$ ist somit kein „unangenehmer" Punkt der Funktion $\{g(t)/t\} \in \mathscr{C}_\infty$. Man kann leicht beweisen, dass aus 3° die Konvergenz des verallgemeinerten Integrals $\int_0^{+\infty} [g(x)/x]\,dx$ folgt; $H \neq 0$ bedeute den Wert dieses Integrals.

Sei $f = \{f(t)\} \in \mathscr{S}_\infty$. Mit E bezeichnen wir das Intervall $\langle 0, +\infty)$ auf der y-Achse. In E betrachten wir die folgende parametrische Distributionsfunktion $b(y) = \{b(y, t)\}$:

$$b(y) = \{f(t)\}\,\{g'(yt)\} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g'[y(t - x)]\,dx\right\}. \tag{16}$$

Mit A bezeichnen wir eine stetige Variable, deren Werte stets endlich und positiv sind. Offenbar ist $b(y)$ im Intervall $\langle 0, A\rangle$ stark summierbar, worauf (sieh (16) und die Eigenschaft 2° der Funktion g)

$$\int_0^A b(y)\,dy = \{f(t)\}\left\{\int_0^A g'(yt)\,dy\right\} = \{f(t)\}\left\{\left[\frac{g(yt)}{t}\right]_{y=0}^{y=A}\right\} = \{f(t)\}\left\{\frac{g(At)}{t}\right\}. \tag{17}$$

Wird nun die Formel (3) aus Beispiel 2 für den Fall $\{a(t)\} = \{g(t)/t\}$ angewendet (offenbar kann dort die diskrete Variable n durch die stetige Variable A ersetzt werden), dann folgt aus (17), dass

$$\frac{1}{H}\int_0^A b(y)\,dy = \{f(t)\}\left\{\frac{\dfrac{g(At)}{t}}{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}\,dx}\right\} \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\infty} \{f(t)\}\,.\,\delta = \{f(t)\} \tag{18}$$

für $A \to +\infty$. Damit ist bewiesen:

Satz 4. *Die Funktion $g = \{g(t)\} \in \mathscr{C}_\infty$ erfülle die obigen Voraussetzungen* 1°, 2° *und* 3° (*mit $H \neq 0$*). *Für jede Funktion $f = \{f(t)\} \in \mathscr{S}_\infty$ gilt dann* (*sieh* (16), (18)):

$$\frac{1}{H}\int_0^A \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g'[y(t - x)]\,dx\right\} dy \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_\infty} \{f(t)\} \tag{19}$$

für $A \to +\infty$.

Wird speziell $\{g(t)\} = \{\sin t\}$ gewählt, $H = \int_0^{+\infty} [\sin x/x]\,dx = \pi/2$, dann folgt aus (19) (sieh (4)) die „Darstellung der Funktion $f \in \mathscr{S}_{\infty}$ durch das FOURIERsche Integral":

$$\frac{2}{\pi} \int_0^A \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos y(t - x) \, \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y \xrightarrow[\text{schwach}]{\mathscr{C}_{\infty}} \{f(t)\}$$

für $A \rightarrow +\infty$. Die Formel (19) zeigt auf die „Darstellung der Funktion $f \in \mathscr{S}_{\infty}$ durch das sogenannte modifizierte FOURIERsche Integral".

Abschliessend will ich an dieser Stelle Herrn C.Sc. J. JELÍNEK (Mathematisch-physikalische Fakultät der Karls-Universität in Prag) für alle seine wertvollen Ratschläge herzlichen Dank aussprechen.

Literaturverzeichnis:

[1] *P. S. Urysohn:* Sur les classes (L) de M. Fréchet. L'Enseignement mathématique 25 (1926).
[2] *K. Kuratowski:* Topologie, I. Warszawa—Wroclaw 1949 (zweite Herausgabe), S. 83 und 20.
[3] *J. G. Mikusiński:* Une nouvelle justifikation du calcul de Heaviside. Atti della Academia Nazionale dei Lincei 5 (1950).
[4] *E. Titchmarsh:* The zeros of certain integral functions. Proceedings of the London Math. Soc. 25 (1926).
[5] *J. Matušů:* O jednom typu integrálu, u něhož se projevuje tzv. „Gibbsův zjev" (1). Aplikace matematiky 6 (1961), 4.
[6] *J. Matušů:* O jednom typu integrálu, u něhož se projevuje tzv. „Gibbsův zjev" (2). Aplikace matematiky 9 (1964), 4.
[7] *J. Matušů:* Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des Fourierschen Integrals. Publicationes Mathematicae X (1963), Debrecen.
[8] *J. Matušů:* Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des modifizierten Fourierschen Integrals. Publicationes Mathematicae XIII (1966), Debrecen.

Souhrn

FOURIERŮV INTEGRÁL A DISTRIBUCE J. G. MIKUSIŃSKIHO

JOSEF MATUŠŮ

V článku jsou vyloženy a na příkladech ilustrovány základní pojmy z algebry a analýzy distribucí J. G. Mikusińskiho. V rámci této teorie distribucí je odvozen tzv. modifikovaný Fourierův integrál pro jistou třídu distribucí, jehož speciálním případem je klasický Fourierův integrál.

Резюме

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Я. Г. МИКУСИНСКОГО

ЙОСЕФ МАТУШУ (Josef Matušů)

В статье изложены и на примерах иллюстрированы фундаментальные понятия из алгебры и анализа распределений Я. Г. Микусинского. В рамках этой теории распределений выведен так наз. модифицированный интеграл Фурье для определенного класса распределений; частным случаем этого интеграла является классический интеграл Фурье.

Adresse des Autors: Doc. Dr. *Josef Matušů* C.Sc., ČVUT, Karlovo nám. 13, Praha 2.