Aplikace matematiky

František Brandler

Numericke řešení soustavy dvou kvadratických rovnic metodou vyrovnávacích rovin

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 5, 352–361

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103042

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY DVOU KVADRATICKÝCH ROVNIC METODOU VYROVNÁVACÍCH ROVIN

FRANTIŠEK BRANDLER

(Došlo dne 30. října 1964.)

1. ODVOZENÍ METODY

Předmětem tohoto pojednání je řešení soustavy dvou kvadratických rovnic obecného tvaru

(1.1) $$F(x, y) = a_2x^2 + a_1x + b_2y^2 + b_1y + k_1 = 0\,,$$

(2.1) $$G(x, y) = c_2x^2 + c_1x + d_2y^2 + d_1y + k_2 = 0\,,$$

kde k_1 a k_2 jsou absolutní členy.
Značíme-li $f_1(x) = a_2x^2 + a_1x$, $f_2(y) = b_2y^2 + b_1y$, $g_1(x) = c_2x^2 + c_1x$; $g_2(y) = d_2y^2 + d_1y$, plyne

(1.2) $$F(x, y) = f_1(x) + f_2(y) + k_1 = 0\,,$$

(2.2) $$G(x, y) = g_1(x) + g_2(y) + k_2 = 0\,.$$

Buďtež x_k, y_k hodnoty hledané dvojice kořenů daných rovnic, dále x_0, y_0 jejich přibližné hodnoty, zjištěné např. graficky z průsečíku zběžně načrtnutých křivek $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$. Z geometrického hlediska operuje pak, jak známo, Newtonova metoda tečnými rovinami k plochám $F(x, y)$ a $G(x, y)$ v bodech odpovídajících na těchto plochách zvolené aproximaci.

Metoda, která zde bude odvozena, nepoužívá těchto tečných rovin, nýbrž provádí řešení pomocí dvou „vyrovnávacích rovin" [1] ϱ_1 a ϱ_2, tj. rovin, z nichž v určité oblasti – a to pro x v intervalu od $x_0 - \frac{1}{2}\xi$ do $x_0 + \frac{1}{2}\xi$ a pro y v intervalu od $y_0 - \frac{1}{2}\eta$ do $y_0 + \frac{1}{2}\eta$ – rovina ϱ_1 o rovnici

(1.3) $$\Phi(x, y) = \alpha_1x + \beta_1y + k'_1 = 0$$

přiléhá ve smyslu metody nejmenších čtverců co nejtěsněji k ploše zobrazující funkci $F(x, y)$, druhá rovina ϱ_2 pak o rovnici

(2.3) $$\Psi(x, y) = \gamma_1x + \delta_1y + k'_2 = 0$$

týmž způsobem k ploše zobrazující funkci $G(x, y)$. Je to analogie k „vyrovnávací přímce" $\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$, jejíž odchylky od dané rovinné křivky $f(x)$ v určitém intervalu ξ rovněž splňují podmínku plynoucí z metody nejmenších čtverců, tj.

$$\int_{x_0 - \frac{1}{2}\xi}^{x_0 + \frac{1}{2}\xi} [\varphi(x) - f(x)]^2 \, dx = \min .$$

Je dáno povahou věci, že metoda vyrovnávacích rovin vyžaduje o několik početních úkonů více než metoda Newtonova, v níž přechází pro $\lim \xi = 0$, $\lim \eta = 0$. Přes to bude mnohdy výhodné, aplikovat metodu vyrovnávacích rovin na řešení rovnic shora uvedeného typu. Dává totiž přesnější výsledky, takže v praxi často vystačíme již s výsledkem odvozeným touto metodou na základě počáteční aproximace x_0, y_0 aniž by bylo potřebí dalšího postupného aproximování. Mimo to může mít však metoda vyrovnávacích rovin též praktický význam pro řešení těch speciálních případů, kde metoda Newtonova selhává (viz příklad 3 v odstavci 2 „Několik příkladů aplikace").

Z podmínky vztahující se k rovině ϱ_1

$$\int_{x_0 - \frac{1}{2}\xi}^{x_0 + \frac{1}{2}\xi} \int_{y_0 - \frac{1}{2}\eta}^{y_0 + \frac{1}{2}\eta} [\Phi(x, y) - F(x, y)]^2 \, dx \, dy = \min . \tag{1.4}$$

vyplývá soustava tří rovnic

$$\int_{x_0 - \frac{1}{2}\xi}^{x_0 + \frac{1}{2}\xi} \int_{y_0 - \frac{1}{2}\eta}^{y_0 + \frac{1}{2}\eta} [\Phi(x, y) - F(x, y)] \, dx \, dy = 0 ,$$

$$\int_{x_0 - \frac{1}{2}\xi}^{x_0 + \frac{1}{2}\xi} \int_{y_0 - \frac{1}{2}\eta}^{y_0 + \frac{1}{2}\eta} [\Phi(x, y) - F(x, y)] \, x \, dx \, dy = 0 ,$$

$$\int_{x_0 - \frac{1}{2}\xi}^{x_0 + \frac{1}{2}\xi} \int_{y_0 - \frac{1}{2}\eta}^{y_0 + \frac{1}{2}\eta} [\Phi(x, y) - F(x, y)] \, y \, dx \, dy = 0 .$$

Po provedení integrací a příslušném uspořádání dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 + 2a_2 x_0 , \quad \beta_1 = b_1 + 2b_2 y_0 , \\ k_1' &= k_1 - a_2(x_0^2 - u_x^2) - b_2(y_0^2 - u_y^2) , \end{aligned} \tag{1.5}$$

při čemž

$$u_x = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \xi , \quad u_y = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \eta . \tag{1.5'}$$

Obdobně dostaneme z podmínky, vztahující se k rovině ϱ_2,

(2.4) $$\int_{x_0-\frac{1}{2}\xi}^{x_0+\frac{1}{2}\xi}\int_{y_0-\frac{1}{2}\eta}^{y_0+\frac{1}{2}\eta}[\Psi(x, y) - G(x, y)]^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \min\,,$$

(2.5) $$\gamma_1 = c_1 + 2c_2x_0\,, \quad \delta_1 = d_1 + 2d_2y_0\,,$$
$$k_2' = k_2 - c_2(x_0^2 - u_x^2) - d_2(y_0^2 - u_y^2)\,.$$

Přímky

$$\varphi_1(x) = (a_1 + 2a_2x_0)\,x - a_2(x_0^2 - u_x^2)\,, \quad \varphi_2(y) = (b_1 + 2b_2y_0)\,y - b_2(y_0^2 - u_y^2)\,,$$
$$\psi_1(x) = (c_1 + 2c_2x_0)\,x - c_2(x_0^2 - u_x^2)\,, \quad \psi_2(y) = (d_1 + 2d_2y_0)\,y - d_2(y_0^2 - u_y^2)$$

jsou vyrovnávacími přímkami parabol $f_1(x)$, $f_2(y)$, $g_1(x)$ a $g_2(y)$ [1].

Geometrická podstata metody je zřejmá z obr. 1a, b, c. Protněme plochy $F(x, y)$ a $G(x, y)$ rovinou ϱ_y kolmou k ose Y ve vzdálenosti $y = y_k$ od roviny os ZX a rovinou ϱ_x kolmou k ose X ve vzdálenosti $x = x_k$ od roviny os ZY. Rovnice vzniklých průsečných křivek $f_1'(x)$, $g_1'(x)$, $f_2'(y)$ a $g_2'(y)$ liší se od rovnic parabol $f_1(x)$, $g_1(x)$, $f_2(y)$ a $g_2(y)$ pouze tím, že mají navíc určité konstanty. Vzhledem k předpokládané poloze rovin ϱ_x a ϱ_y, odpovídající hodnotám kořenů, protínají tyto průsečné křivky rovinu os XY v bodě N, jehož souřadnice jsou $x_0 + u_x = x_k$, $y_0 + u_y = y_k$. Průsečnice $\varphi_1'(x)$ a $\psi_1'(x)$ roviny ϱ_y s rovinou ϱ_1 resp. ϱ_2 a průsečnice $\varphi_2'(y)$ a $\psi_2'(y)$ roviny ϱ_x taktéž s rovinami ϱ_1 resp. ϱ_2 jsou vyrovnávacími přímkami parabol $f_1'(x)$, $g_1'(x)$, $f_2'(y)$ a $g_2'(y)$ v intervalu ξ resp. η. Tyto přímky procházejí rovněž bodem N což plyne také již ze vztahu, že vyrovnávací přímka paraboly obecného typu $f(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i$ protíná při daném intervalu ξ tuto parabolu ve dvou bodech, jejichž průměty na na osu úseček mají od středu intervalu vzdálenosti $\pm u_x$ které jsou pouze funkcí intervalu a tedy zcela nezávislé na koeficientech a_0, a_1, a_2 (obr. 1a, b).

Přímky $\varphi_1'(x)$ a $\varphi_2'(y)$ určují rovinu ϱ_1, přímky $\psi_1'(x)$ a $\psi_2'(y)$ rovinu ϱ_2. Stopy λ_1 a λ_2 těchto rovin v rovině os XY se protínají v uvedeném bodě N (obr. 1c).

Hledané korekční členy u_x a u_y jimiž se zlepšují počáteční aproximace x_0 a y_0 určíme pak z relace

(3.1) $$x_0 + u_x = \frac{\beta_1 k_2' - \delta_1 k_1'}{p}\,,$$

(3.2) $$y_0 + u_y = \frac{\gamma_1 k_1' - \alpha_1 k_2'}{p}\,,$$

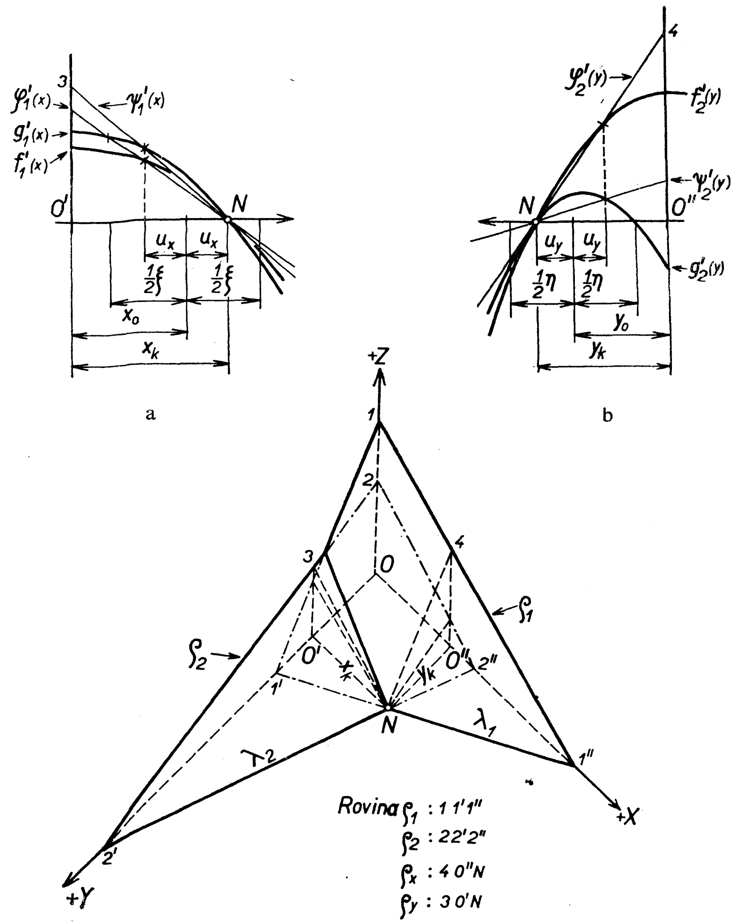
kde výrazy na pravé straně těchto rovnic značí souřadnice průsečíku stop obou rovin (1.3) a (2.3) v rovině os XY při čemž

(3.3) $$p = \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1\,.$$

Dosadíme-li za k_1' a k_2' hodnoty z rovnic (1.5) a (2.5), dostaneme

$$(3.4) \qquad x_0 + u_x = \frac{\begin{gathered}\beta_1(k_2 - c_2x_0^2 - d_2y_0^2) - \delta_1(k_1 - a_2x_0^2 - b_2y_0^2) + \\ + \beta_1(c_2u_x^2 + d_2u_y^2) - \delta_1(a_2u_x^2 + b_2u_y^2)\end{gathered}}{p},$$

$$(3.5) \qquad y_0 + u_y = \frac{\begin{gathered}\gamma_1(k_1 - a_2x_0^2 - b_2y_0^2) - \alpha_1(k_2 - c_2x_0^2 - d_2y_0^2) + \\ + \gamma_1(a_2u_x^2 + b_2u_y^2) - \alpha_1(c_2u_x^2 + d_2u_y^2)\end{gathered}}{p}.$$



c

Obr. 1.

V mezním případě $\lim \xi = 0$, $\lim \eta = 0$, tj. u metody Newtonovy, je podle (1.5') též $u_x = 0$, $u_y = 0$. Korekční členy u této metody, které značíme Δx a Δy, jsou tudíž

$$(3.6) \qquad \Delta x = \frac{\beta_1(k_2 - c_2x_0^2 - d_2y_0^2) - \delta_1(k_1 - a_2x_0^2 - b_2y_0^2)}{p} - x_0 ,$$

$$(3.7) \qquad \Delta y = \frac{\gamma_1(k_1 - a_2x_0^2 - b_2y_0^2) - \alpha_1(k_2 - c_2x_0^2 - d_2y_0^2)}{p} - y_0 .$$

Z rozdílů $(u_x - \Delta x)$ a $(u_y - \Delta y)$ plynou rovnice

$$(3.8) \qquad a_2u_x^2 + b_2u_y^2 + \alpha_1u_x + \beta_1u_y - \alpha_1\,\Delta x - \beta_1\,\Delta y = 0 ,$$

$$(3.9) \qquad c_2u_x^2 + d_2u_y^2 + \gamma_1u_x + \delta_1u_y - \gamma_1\,\Delta x - \delta_1\,\Delta y = 0 ,$$

z nichž dostáváme

$$(3.10) \qquad u_y = -\frac{1}{r}\left(u_x^2t + u_xs - v\right) .$$

Přitom značí

$$(3.11) \qquad \begin{aligned} r &= d_1b_2 - d_2b_1 , \\ t &= b_2c_2 - a_2d_2 , \\ s &= c_1b_2 - a_1d_2 + 2tx_0 , \\ v &= s\,\Delta x + r\,\Delta y . \end{aligned}$$

Veškeré prvky vyskytující se ve výrazech (3.11) známe již z předchozích odstavců.

Podle rovnice (3.10) je

$$(3.12) \qquad u_y^2 = \frac{1}{r^2}\left[u_x^4t^2 + 2u_x^3st + u_x^2(s^2 - 2vt) - 2u_xsv + v^2\right] .$$

V dalším výpočtu zanedbáme členy obsahující čtvrtou a třetí mocninu veličiny u_x, neboť jejich hodnota bude při vhodně zvolené aproximaci x_0, y_0 zřejmě velmi malá. Počítáme tedy s přibližnou hodnotou

$$(3.13) \qquad u_y^2 \doteq \frac{1}{r^2}\left[u_x^2(s^2 - 2vt) - 2u_xsv + v^2\right] .$$

Dosazením hodnot u_y a u_y^2 do rovnice (3.9) dospějeme po příslušné úpravě ke kvadratické rovnici

$$(3.14) \qquad Au_x^2 + Bu_x + C = 0 ,$$

kde

$$A = r(c_2 r - \delta_1 t) - d_2(2vt - s^2)\,, \tag{3.15}$$
$$B = \gamma_1 r^2 - s(2d_2 v + \delta_1 r)\,,$$
$$C = v(d_2 v + \delta_1 r) - (\gamma_1\,\Delta x + \delta_1\,\Delta y)\,r^2\,,$$

takže

$$u_x = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}\,, \tag{3.16}$$

při čemž z konkrétního případu je ovšem vždy jednoznačně zřejmé, které z obou znamének $\pm$ v čitateli přichází v úvahu. Po určení hodnoty u_x vypočteme pak u_y z rovnice (3.10).

Nakonec zabývejme se ještě stručně aplikací této metody na soustavu dvou kvadratických rovnic, které obsahují též součiny obou neznámých

$$F_1(x, y) = a_2x^2 + a_1x + b_2y^2 + b_1y + mxy + k_1 = 0\,, \tag{1.6}$$

$$G_1(x, y) = c_2x^2 + c_1x + d_2y^2 + d_1y + nxy + k_2 = 0\,. \tag{2.6}$$

Při řešení vycházíme opět z podmínek

$$\int_{x_0-\frac{1}{2}\xi}^{x_0+\frac{1}{2}\xi}\int_{y_0-\frac{1}{2}\eta}^{y_0+\frac{1}{2}\eta}[\Phi_1(x, y) - F_1(x, y)]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \min\,,$$

$$\int_{x_0-\frac{1}{2}\xi}^{x_0+\frac{1}{2}\xi}\int_{y_0-\frac{1}{2}\eta}^{y_0+\frac{1}{2}\eta}[\Psi_1(x, y) - G_1(x, y)]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \min\,,$$

kde $\Phi_1(x, y)$ a $\Psi_1(x, y)$ značí nyní rovnice vyrovnávacích rovin ploch zobrazujících funkce $F_1(x, y)$ a $G_1(x, y)$.

Jelikož i další postup je zcela analogický k postupu sledovanému v předchozích odstavcích, omezím se zde na uvedení konečných výsledků. Hledanou hodnotu u_x určíme opět z kvadratické rovnice

$$A_1u_x^2 + B_1u_x + C_1 = 0\,,$$

kde

$$A_1 = r_1(\mu r_1 + 2v_1t - s_1^2)\,, \quad B_1 = -r_1(p_1r_1 - 2s_1v_1)\,,$$
$$C_1 = r_1(p_1r_1\,\Delta x_1 - v_1^2)\,.$$

Při tom značí

$$r_1 = r + x_0(b_2n - d_2m)\,, \quad \mu = \beta_1c_2 - \delta_1a_2 + x_0(c_2m - a_2n)\,,$$

t (jako dříve) $= b_2c_2 - a_2d_2$, $s_1 = s + y_0(b_2n - d_2m)$,

$$v_1 = s_1\,\Delta x_1 + r_1\,\Delta y_1\,, \quad p_1 = p - m(\gamma_1 x_0 - \delta_1 y_0) + n(\alpha_1 x_0 - \beta_1 y_0)\,,$$

$$\Delta x_1 = \frac{\begin{array}{l}(k_2 - c_2x_0^2 - d_2y_0^2 - nx_0y_0)(\beta_1 + mx_0) - \\ - (k_1 - a_2x_0^2 - b_2y_0^2 - mx_0y_0)(\delta_1 + nx_0)\end{array}}{p_1} - x_0\,,$$

$$\Delta y_1 = \frac{\begin{array}{l}(k_1 - a_2x_0^2 - b_2y_0^2 - mx_0y_0)(\gamma_1 + ny_0) - \\ - (k_2 - c_2x_0^2 - d_2y_0^2 - nx_0y_0)(\alpha_1 + my_0)\end{array}}{p_1} - y_0\,.$$

Hodnoty α_1, β_1, γ_1, δ_1 jsou dány rovnicemi (1.5) a (2.5).
Hodnotu u_y určíme z relace

$$u_y = -\frac{1}{r_1}\left(u_x^2 t + u_x s_1 - v_1\right).$$

2. NĚKOLIK PŘÍKLADŮ APLIKACE

1. RUNGE [2] řeší soustavu rovnic

$$F(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0\,,$$
$$G(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - y + 0{,}25 = 0$$

metodou Newtonovou. Aplikujeme-li na tuto soustavu metodu vyrovnávacích rovin a vycházíme-li, jako Runge, z počáteční aproximace $x_0 = 0{,}33$ a $y_0 = -0{,}25$ dostaneme zlepšené aproximace

$$x_0 + u_x = 0{,}335\,408\,741\,4\ldots\,, \quad y_0 + u_y = -0{,}247\,206\,914\,1\ldots\,,$$

takže

$$F(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = -0{,}000\,002\,579\,4\ldots\,,$$
$$G(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = -0{,}000\,000\,286\,5\ldots\,.$$

Naproti tomu metoda Newtonova dává v tomto případě

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0{,}000\,185\,970\,6\ldots\,,$$
$$G(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0{,}000\,036\,986\,2\ldots\,.$$

Kdybychom vycházeli od přesnější počáteční aproximace $x_0 = 0{,}335$ a $y_0 = -0{,}247$, dospějeme k hodnotám

$$x_0 + u_x = 0{,}335\,409\,001\,225\ldots\,, \quad y_0 + u_y = -0{,}247\,207\,336\,837\ldots\,,$$

takže

$$F(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = -0{,}000\,000\,001\,114\ldots,$$
$$G(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = -0{,}000\,000\,000\,124\ldots,$$

kdežto užitím metody Newtonovy bychom dostali

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0{,}000\,001\,056\,988\ldots,$$
$$G(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0{,}000\,000\,210\,405\ldots.$$

2. Mezi aproximací získanou metodou vyrovnávacích rovin a aproximací určenou na základě týchž počátečních hodnot x_0, y_0 metodou Newtonovou může vzniknout v některých případech velmi pronikavý rozdíl. Bude to zejména v těch případech, kde v důsledku numericky malých (např. pouze setinových) hodnot t a s, při rovněž malých hodnotách u_x a u_y, zanedbáním součinů $u_x^4t^2$ a $2u_x^3st$ v rovnici (3.12) dojde jen ke zcela nepatrnému skreslení exaktních hodnot kořenů. Je tomu tak např. u soustavy rovnic

$$F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 0{,}4 = 0\,,$$
$$G(x, y) = 0{,}78x^2 - 0{,}01x + 3y^2 - 5y + 1{,}2008 = 0\,.$$

Volíme-li počáteční aproximace $x_0 = 0{,}198$ a $y_0 = 0{,}297$ dospějeme metodou vyrovnávacích rovin k hodnotám

$$x_0 + u_x = 0{,}200\,000\,000\,000\,365\,8\ldots,$$
$$y_0 + u_y = 0{,}300\,000\,000\,000\,000\,1\ldots$$

a metodou Newtonovou k hodnotám

$$x_0 + \Delta x = 0{,}200\,100\,926\,411\ldots,$$
$$y_0 + \Delta y = 0{,}300\,000\,013\,948\ldots.$$

Přesné hodnoty kořenů této soustavy jsou $x_k = 0{,}2$, $y_k = 0{,}3$.

V této souvislosti ještě připomínám, že v těch speciálních případech, kde koeficienty členů x^2 a y^2 splňují podmínku $b_2 \,.\, c_2 = a_2 \,.\, d_2$ takže $t = 0$, dává nám metoda vyrovnávacích rovin exaktní hodnotu kořenů.

3. Dána je soustava rovnic

$$F(x, y) = 3x^2 + 2x + y^2 + 3y - 15 = 0\,,$$
$$G(x, y) = 8{,}2x^2 + 7x + 4y^2 + 5y - 41{,}2 = 0\,.$$

Při aproximaci její dvojice kořenů $x_k = 1$ a $y_k = 2$ budeme zde záměrně vycházet z relativně velmi hrubé počáteční aproximace, totiž z hodnot $x_0 = 0{,}9$ a $y_0 = 1{,}8$

a zjistíme jakými číselnými výsledky reaguje na tuto nepříznivou okolnost jednak metoda vyrovnávacích rovin, jednak metoda Newtonova.

Metoda vyrovnávacích rovin nám dává

$$x_0 + u_x = 0{,}998\,048\ldots \quad \text{a} \quad y_0 + u_y = 2{,}002\,396\ldots,$$

takže

$$F(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = 0{,}001\,173\ldots, \quad G(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = 0{,}004\,693\ldots.$$

Naproti tomu při řešení metodou Newtonovou dostáváme

$$x_0 + \Delta x = 5{,}271\ldots, \quad y_0 + \Delta y = -2{,}778\ldots.$$

Měla-li by tedy Newtonova metoda při této soustavě rovnic prakticky vést k cíli, musili bychom vycházet z podstatně přesnějších aproximačních hodnot x_0 a y_0.

4. Dána je soustava rovnic

$$F_1(x, y) = x^2 + 0{,}13x + 2y^2 - 0{,}68xy - 30{,}41 = 0\,,$$
$$G_1(x, y) = 3x^2 + 5{,}9y^2 + 2y - 2xy - 97{,}4 = 0\,.$$

Při aproximaci dvojice kořenů této soustavy $x_k = 1$ a $y_k = 4$ počátečními hodnotami $x_0 = 0{,}995$ a $y_0 = 3{,}995$ dostáváme

$$x_0 + u_x = 0{,}999\,987\,001\,2\ldots,$$
$$y_0 + u_y = 3{,}999\,998\,392\,1\ldots,$$

takže

$$F_1(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = -0{,}000\,016\,963\,884\ldots,$$
$$G_1(x_0 + u_x, y_0 + u_y) = -0{,}000\,049\,895\,747\ldots.$$

Newtonova metoda nám na základě uvedené počáteční aproximace dává

$$F_1(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y_1) = 0{,}000\,058\,297\,508\ldots,$$
$$G_1(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y_1) = 0{,}000\,173\,394\,097\ldots$$

Literatura

[1] *Brandler F.:* Lineární aproximace a jejich praktické použití. Technický obzor 58 (1950), čís. 2.

[2] *Runge C.:* Praxis der Gleichungen. Leipzig 1900, str. 73.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ВЫРАВНИВАЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

ФРАНТИШЕК БРАНДЛЕР (FRANTIŠEK BRANDLER)

В статье приведено решение системы двух квадратных уравнений $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$ методом, при котором поверхности, отображающие эти функции, заменяются в области искомой пары корней плоскостями, которые в смысле метода наименьших квадратов к этим поверхностям как можно наиболее тесно примыкают. Изображена также геометрическая основа этого метода и его связь с методом Ньютона. Несколько численных примеров позволяет сравнить результаты, полученные обоими методами.

Zusammenfassung

NUMERISCHE LÖSUNG EINES SYSTEMS VON ZWEI QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN MIT HILFE DER METHODE DER AUSGLEICHSEBENEN

FRANTIŠEK BRANDLER

In dem vorliegenden Artikel erfolgt die Lösung eines quadratischen Gleichungssystems $F(x, y) = 0$ und $G(x, y) = 0$ mit Hilfe der Methode, welche die von diesen Funktionen gebildeten Flächen im Gebiet des gesuchten Wurzelpaares durch Ebenen ersetzt, welche die Flächen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate am genauesten wiedergeben. Es wird auch die geometrische Begründung dieser Methode gezeigt und der Zusammenhang mit der Newtonschen Methode behandelt. Einige numerische Beispiele ermöglichen den Vergleich beider Methoden.

Adresa autora: Inž. Dr. *František Brandler*, Bražkovská 13, Praha 6 - Dolní Liboc.