Aplikace matematiky

Ivo Babuška

Об оптимальной регуляризации метод суммирования ряда Фурье

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 5, 333–340

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103040`

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ РЯДА ФУРЬЕ

ИВО БАБУШКА (IVO BABUŠKA)

(Поступило в редакцию 16/4 1965 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] занимается Н. А. Тихонов проблемами регуляризации метод суммирования ряда Фурье. Главная идея заключается здесь, в основном, в т. наз. регуляризации некорректно поставленных задач. Ср. также [2] и [3]. В настоящей работе мы на одном специальном примере суммирования рядов Фурье выскажем некоторые общие идеи оптимализации регуляризации. Эти результаты являются развитием идей, приведенных в [4].

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы пространства Банаха B и B_0 и пусть $B \subset B_0$ (включение следует понимать в множественном смысле, вложение B в B_0 полагается непрерывным). Пусть, далее, задана последовательность конусов $K_n \subset B_0^*$ (звездочкой обозначено сопряженное пространство функционалов). Норму в B и в B_0 будем соответственно обозначать символами $\| \ \|$ и $\langle\!\langle \ \rangle\!\rangle$. Аналогично норму в B^* или в B_0^* будем обозначать $\| \ \|^*$ или же $\langle\!\langle \ \rangle\!\rangle^*$.

Пусть $F \in B^*$ (может быть $F \notin B_0^*$) и пусть $\hat{K}_n$ – линейная оболочка конуса K_n. Обозначим

$$\Phi(n, \vartheta) = \Big[\inf_{f \in K_n} [(\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2]\Big]^{\frac{1}{2}} . \tag{1}$$

К только что введенному понятию приведем несколько замечаний.

На практике часто встречается задача вычислить определенный функционал – в нашем случае F. Но численно осуществимы только функционалы определенного вида. Это функционалы из конуса K_n. Индекс n выражает, насколько трудным и сложным будет вычисление, когда функционал F заменим каким-нибудь функционалом из $\hat{K}_n$ (т. е. линейной комбинацией функционалов из K_n). На практике полагаем

$$F(\varphi) \approx f(\varphi), \quad f \in \hat{K}_n .$$

Функция $\Phi(n, 0)$ выражает, очевидно, минимальную погрешность (т. е. максимальную точность), достижимую в случае замены функционала F функционалом $f \in \hat{K}_n$ (т. е. когда произведем вычисление в рамках сложности, характеризованной индексом n).

Несмотря на то, что хотим вычислить функционал $F(\varphi)$, на практике часто случается, что умеем вычислить только функционалы $f(\varphi + \psi)$, где ψ – какой-то элемент возмущения, для которого характерно только то, что он в определенном смысле является малым. Например, при численной квадратуре часто $B \subset C(0, 1)$, $f(\varphi) = \sum a_i \varphi(x_i)$. Но ввиду погрешностей закругления не умеем точно вычислить $\varphi(x_i)$, но только $\tilde{\varphi}(x_i) = \varphi(x_i) + \varepsilon_i$. Теперь можем считать ε_i значением функции возмущений ψ в точке x_i. Часто однако случается, что ψ происходит из пространства B_0, которое богаче B. Например, B может быть пространством гладких функций, в то время как $B_0 = C(0, 1)$. Функционал F вообще не должен быть непрерывным на пространстве возмущений. Функционалы f, конечно, считаем непрерывным на пространстве возмущений. Нашей целью является выбрать $f \in K_n$ так, чтобы погрешность

$$\varrho = \sup_{\|\varphi\| \leqq 1, \langle\!\langle\psi\rangle\!\rangle \leqq \vartheta} \left|F(\varphi) - f(\varphi + \psi)\right|$$

была минимальной. Выражением (1) заменяем условие минимализации величины ϱ. Хотя условия минимализации ϱ и выражения $\xi = [(\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f\rangle\!\rangle^*)^2]^{\frac{1}{2}}$ не равносильны, они настолько близки, что с точки зрения численной практики можем вместо ϱ минимализировать величину ξ. Значит, в этом смысле функция $\Phi(n, \vartheta)$ характеризует минимальную возможную погрешность при условии существования возмущений.

Если последовательность конусов K_n обладает тем свойством, что $\Phi(n, 0) \to 0$ для $n \to \infty$, скажем, что последовательность конусов сходящаяся. Если последовательность конусов K_n обладает тем свойством, что к любому $\varepsilon > 0$ существует $\vartheta > 0$ так, что

$$\limsup_{n \to \infty} \Phi(n, \vartheta) < \varepsilon$$

скажем, что это устойчивая последовательность конусов.

Пусть задана последовательность $f_n \in \hat{K}_n$; пусть K_n – сходящаяся и устойчивая последовательность конусов. Скажем, что эта последовательность функционалов является сходящейся, или же оптимально сходящейся, если

$$\|F - f_n\|^* \to 0, \quad \text{или же} \quad \|F - f_n\|^* = \Phi(n, 0).$$

Далее мы скажем, что эта последовательность является устойчиво сходящейся, или же оптимально устойчиво сходящейся, если к любому $\varepsilon > 0$ существует ϑ так, что

$$\limsup_{n\to\infty} [(\|F - f_n\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f_n \rangle\!\rangle^*)^2]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\,,$$

или же

$$[(\|F - f_n\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f_n \rangle\!\rangle^*)^2]^{\frac{1}{2}} = \Phi(n, \vartheta)\,.$$

Проблемы, которых мы теперь коснулись, можно легко формально свести к проблематике в случае $\vartheta = 0$, которая гораздо подробнее исследована (ср., например, [4] и др.). Обозначим $\boldsymbol{H}_\vartheta = B \times B_0$ и $\|(\varphi, \psi)\|_\vartheta^2 = (\|\varphi\|^2 + \vartheta^{-2}\langle\!\langle \psi \rangle\!\rangle^2)$. Норму в $\boldsymbol{H}_\vartheta^*$ обозначим символом $\| \ \|_\vartheta^*$. Функционалу $F \in B^*$, или же $f \in B_0^*$, поставим в соответствие функционал $\bar{F} \in \boldsymbol{H}_\vartheta^*$ или же $\tilde{f} \in \boldsymbol{H}_\vartheta^*$, определенный соотношением

$$\bar{F}(\varphi, \psi) = F(\varphi)\,, \tag{2}$$

или же

$$\tilde{f}(\varphi, \psi) = f(\varphi) + f(\psi)\,. \tag{3}$$

Ввиду того, что предполагаем, что B вложен в множественном и топологическом смысле в B_0, имеет (3) смысл. Последовательности конусов $K_n \subset B_0^*$ поставим в соответствие последовательность $\tilde{K}_n = E[\tilde{f}_i; \tilde{f} \in H_\vartheta^*, f \in K_n]$. Пусть подобно тому, как раньше, $\hat{\tilde{K}}_n$ означает линейную оболочку конуса $\tilde{K}$. Положим

$$\Psi(n, \vartheta) = \inf_{\tilde{f} \in \hat{\tilde{K}}_n} \|\bar{F} - \tilde{f}\|_\vartheta^*\,. \tag{4}$$

Далее мы имеем

$$(\|\bar{F} - \tilde{f}\|_\vartheta^*)^2 = (\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2\,. \tag{5}$$

Действительно, для $\varepsilon > 0$ существует, $\varphi \in B$, $\psi \in B_0$ так, что

$$\|\bar{F} - \tilde{f}\|_\vartheta^* \leqq (1 + \varepsilon)\frac{(F - f)(\varphi) + f(\psi)}{[\|\varphi\|^2 + \vartheta^{-2}\langle\!\langle \psi \rangle\!\rangle^2]^{\frac{1}{2}}} \leqq (1 + \varepsilon)\frac{\|F - f\|^*\|\varphi\| + \langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*\langle\!\langle \psi \rangle\!\rangle}{[\|\varphi\|^2 + \vartheta^{-2}\langle\!\langle \psi \rangle\!\rangle^2]^{\frac{1}{2}}} \leqq$$
$$\leqq (1 + \varepsilon)[(\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Следовательно,

$$(\|\bar{F} - \tilde{f}\|_\vartheta^*)^2 \leqq (\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2\,. \tag{6}$$

С другой стороны, существует $\varphi_1 \in B$, $\psi_1 \in B_0$, $\|\varphi_1\| = 1$, $\langle\!\langle \psi_1 \rangle\!\rangle = 1$ так, что

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon)\|F - f\|^* &\leqq (F - f)(\varphi_1)\,,\\ (1 - \varepsilon)\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^* &\leqq f(\psi_1)\,.\end{aligned}$$

Теперь положим

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 \|F - f\|^*}{[(\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_1 \langle\!\langle f \rangle\!\rangle^* \vartheta^2}{[(\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

и получим

$$\|\bar{F} - \tilde{f}\|_\vartheta^* \geqq \frac{(F - f)(\varphi_2) + f(\psi_2)}{[\|\varphi_2\|^2 + \vartheta^{-2}\langle\!\langle \psi_2 \rangle\!\rangle^2]^{\frac{1}{2}}} \geqq (1 - \varepsilon)[(\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2]^{\frac{1}{2}},$$

так что

$$(\|F - \tilde{f}\|_\vartheta^*)^2 \geqq (\|F - f\|^*)^2 + \vartheta^2(\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^*)^2. \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает (5).

Итак, получаем

$$\Psi(n, \vartheta) = \Phi(n, \vartheta).$$

Но таким образом мы, по существу, свели нашу проблему к проблеме аппроксимации функционала.

3. О ПРОБЛЕМЕ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

В этом отделе набросим в нескольких чертах конкретный пример на понятия, приведенные в отделе 2. Во многих случаях можно поступать совсем аналогично.

Пусть задано пространство $\mathscr{K}$ всех действительных четных 2π-периодических обобщенных функций $\varphi(x)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.\text{[1]} \tag{8}$$

Пусть, далее, даны целые числа $l > 0$, $k > 0$, $q \geqq 0$ и пусть $k < l$, пусть H – подпространство $\mathscr{K}$ (в множественном смысле) всех обобщенных функций, производные $2l$-ого порядка которых интегрируемы с квадратом. В H введем операцию скалярного произведения следующим образом: Если $\varphi_1 \in H$, $\varphi_2 \in H$, то положим

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi_1^{[2l]}(x)\,\varphi_2^{[2l]}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

и обозначим далее

$$[\varphi, \varphi] = \|\varphi\|^2. \tag{10}$$

---

[1]) Обощенную функцию записываем как функцию. Эту запись надо, конечно, понимать в соответствии с теорией обобщенных функций.

Легко можем проверить, что при наших предположениях выполнены все аксимы и что H представляет собой пространство Гильберта.

Пусть, далее, H_0 – подпространство (в множественном смысле) всех обобщенных функций $\varphi \in \mathscr{K}$ таких, что их производные $-2q$-ого порядка интегрируемы с квадратом (т. е. $2q$-е периодически примитивные функции, удовлетворяющие (8)).

В H_0 введем операцию скалярного произведения следующим образом: Если $\psi_1 \in H_0$, $\psi_2 \in H_0$, то положим

$$(11) \qquad \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_1^{[-2q]}(x)\, \psi_2^{[-2q]}(x)\, \mathrm{d}x$$

и обозначим

$$(12) \qquad \langle \psi, \psi \rangle = \langle\!\langle \psi \rangle\!\rangle^2 .$$

Легко видно, что выполнены все необходимые аксиомы и что H_0 есть пространство Гильберта.

Пусть, далее,

$$(13) \qquad F \in H^* , \quad F(\varphi) = \varphi^{[2k]}(0)$$

и последовательногть конусов $K_n \subset H_0^*$, образованных всеми функционалами вида

$$(14) \qquad f_k(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx \, \mathrm{d}x \,,^1) \quad k = 1, \ldots, n .$$

Теперь займемся проблематикой, которой мы коснулись в отд. 2, т. е. аппроксимацией функционала F посредством элементов из $\hat{K}_n$.

Введем пространство $\boldsymbol{H}_\vartheta = H \times H_0$ со скалярным произведением ($\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$)

$$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} = [u_1, v_1] + \vartheta^{-2} \langle u_2, v_2 \rangle .$$

Далее

$$\bar{F} \in \boldsymbol{H}_\vartheta^* , \quad \bar{F}(\boldsymbol{u}) = F(u_1) .$$

Будет, как нетрудно проверить,

$$\bar{F}(u) = \{\bar{\boldsymbol{F}}^*, \boldsymbol{u}\} , \quad \bar{\boldsymbol{F}}^* = = (\bar{F}_1^*, \bar{F}_2^*) ,$$

где

$$(15) \qquad \bar{F}_1^* = (-1)^k \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-4l} \cos nx , \quad \bar{F}_2^* = 0 .$$

Далее, пусть

$$(16) \qquad \tilde{f}_s \in \boldsymbol{H}_\vartheta^* , \quad \tilde{f}_s(\boldsymbol{u}) = f_s(u_1) + f_s(u_2) , \quad s = 1, \ldots, n .$$

Имеем

$$\tilde{f}_s(\boldsymbol{u}) = \{\tilde{f}_s^*, \boldsymbol{u}\}, \quad \tilde{f}_s^* = (\tilde{f}_{s,1}^*, \tilde{f}_{s,2}^*),$$

где

$$\tilde{f}_{s,1}^* = \frac{1}{\pi}\frac{1}{s^{4l}}\cos sx, \quad \tilde{f}_{s,2}^* = \frac{\vartheta^2}{\pi} s^{4q}\cos sx. \tag{17}$$

Теперь очевидно, что $\hat{\tilde{K}}_n$ – все функционалы вида

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \tilde{f}_s. \tag{18}$$

Пусть задан $f \in \hat{K}_n$, т. е. $f \in \sum_{s=1}^{n} \alpha_s f_s$. Тогда получаем

$$\|\bar{F} - \tilde{f}\|_\vartheta^2 = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n} ((-1)^k m^{2k-2l} - \alpha_m m^{-2l})^2 + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{m=n+1}^{\infty} ((-1)^k m^{2k-2l})^2 + \vartheta^2 \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n} (\alpha_m m^{2q})^2. \tag{19}$$

Если минимализировать это выражение с учетом коэффициентов α_m, $m = 1, . ., n$, получим

$$\alpha_m = \frac{m^{2k}(-1)^k}{1 + \vartheta^2 m^{4q+4l}}. \tag{20}$$

В итоге получаем

$$\pi\Phi^2(n, \vartheta) = \sum_{m=n+1}^{\infty} m^{4k-4l} + \vartheta^2 \sum_{m=1}^{n} \frac{m^{4k+4q}}{(1 + \vartheta^2 m^{4q+4l})^2} + \\ + \vartheta^4 \sum_{m=1}^{n} \frac{m^{4k+8q+4l}}{(1 + \vartheta^2 m^{4q+4l})^2}. \tag{21}$$

Итак, мы доказали следующее утверждение:

Теорема. *Пусть H и H_0 будут соответственно пространства Гильберта всех действительных четных 2π-периодических (обобщенных) функций, удовлетворяющих* (8) *со скалярными произведениями* (9) *или же* (11). *Пусть K_n—конус всех функционалов вида* (14) *и пусть на H определен функционал F выражением* (13). *Тогда последовательность функционалов*

$$^{[n]}f = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m f_m, \tag{22}$$

где коэфициенты α_m даны соотношением (20), *является последовательностью* *оптимально устойчиво сходящейся. Функция* $\Phi(n, \vartheta)$ *при этом определена выражением* (21).

Легко можно обнаружить, что оптимально сходящаяся последовательность функционалов есть последовательность

$$^{[n]}f = \sum_{m=1}^{n} \beta_m f_m \,, \tag{23}$$

где

$$\beta_m = (-1)^k \, m^{2k} \,,$$

и что эта последовательность не является устойчиво сходящейся. Если положить $K = K_\infty$, то в (22) и (23) получим бесконечный ряд. Формула (22) показывает, каким образом следует в таком случае произвести суммирование (осуществить регуляризацию) ряда Фурье (23), чтобы получить устойчивый способ суммирования. Аналогичные результаты, но другим путем, были выведены в [1].

Литература

[1] *Тихонов, А. Н.:* Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье; ДАН СССР, 164, 1964, 268—271.

[2] *Babuška, I.:* Über einige Optimierungsfragen numerischer Methoden der mathematischen Analysis; III. Int. Kolloq. über Anw. d. Math. 27. 6. 1965—4. 7. 1965, Weimar. Wiss. Zeitschrift d. Hochschule f. Arch. ui Bauwesen, Weimar, 12, 1965, 4, 494—499.

[3] *Бабушка, И.:* О некоторых вопросах оптимизации численных методов математического анализа; Новосибирск 1966.

[4] *Бабушка, И., С. Л. Соболев:* Оптимизация численные методов; Apl. Mat. 10, 1965, 96—129.

Souhrn

O OPTIMÁLNÍ REGULARIZACI SČÍTÁNÍ FOURIEROVY ŘADY

IVO BABUŠKA

V práci se studuje problematika optimálního způsobu sčítání Fourierovy řady za předpokladu, že její koeficienty nejsou určeny přesně. Ukazuje se, že tuto problematiku, která obecně spadá do problematiky regularizace nekorektně formulovaných úloh je možno převésti na problematiku optimální aproximace funkcionálů.

Zusammenfassung

ÜBER DIE OPTIMALE REGULARISIERUNG DER SUMMATION EINER FOURIERREIHE

IVO BABUŠKA

In der vorgelegten Arbeit wird die Problematik der optimalen Summation einer Fourierreihe unter der Voraussetzung behandelt, dass die Koeffizienten nicht genau bestimmt sind. Es zeigt sich, dass man diese Problematik, die allgemein in die Problematik der Regularisierung nicht korrekt aufgestellten Aufgaben fällt, auf die Problematik der optimalen Approximation von Funktionalen überführen kann.

Адрес автора: Ing. dr. *Ivo Babuška* Dr. Sc., Matematický ústav ČSAV, Opletalova 45, Praha 1.