Aplikace matematiky

Ivo Babuška

Über optimale Quadraturformeln im Raume periodischer Funktionen

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 4, 259–265

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103027

ÜBER OPTIMALE QUADRATURFORMELN IM RAUME PERIODISCHER FUNKTIONEN

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 16. April 1965.)

1. EINLEITUNG

In Arbeit [1] haben wir uns mit der Problematik der numerischen Berechnung des Integrals

$$J_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ipx}\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

beschäftigt, wenn f eine 2π-periodische komplexe Funktion ist. In dieser Arbeit wollen wir uns mit der Berechnung des Funktionals

$$J_g(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x \tag{2}$$

beschäftigen, wenn f und g 2π-periodische komplexe Funktionen sind und $g \in L_2$. (Siehe auch [2], [3].)

Die Quadraturformel wollen wir in folgender Form betrachten

$$I(j, a_0^{(j)}, \ldots, a_{2[j/2]}^{(j)})(f) = \frac{2\pi}{j} \sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) \sum_{k=-[j/2]}^{[j/2]} \overline{a_{[j/2]+k}^{(j)}}\, e^{-ik[2\pi l/j]}\,. \tag{3}$$

2. PROBLEMSTELLUNG

Es sei ein Banachraum B der 2π-periodischen komplexen Funktionen derart gegeben, dass J_g und I auf B stetige lineare Funktionale sind. Das Funktional $I(j, {}^g a_0^{(j)}, \ldots$ $\ldots, {}^g a_{2[j/2]}^{(j)})$ nennen wir eine optimale Approximation von J_g, wenn für jedes $a_0, \ldots$ $\ldots, a_{2[j/2]}$ gilt

$$\left\| J_g - I(j, {}^g a_0^{(j)}, \ldots, {}^g a_{2[j/2]}^{(j)}) \right\|_{B^*} \leqq \left\| J_g - I(j, a_0, \ldots, a_{2[j/2]}) \right\|_{B^*}\,. \tag{4}$$

(Die Norm ist als Norm der Funktionale zu verstehen.)

Wir bezeichnen noch

(5) $$\chi^B(g,j) = \inf_{a_i, i=0,\dots,j} \|J_g - I(j, a_0, \dots, a_{2[k/2]})\|_{B^*}.$$

Es sei eine Zahlenfolge $a_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \dots, 2[j/2]$, $j = 1, 2, \dots$, gegeben. Die Formel $I(j, a_0^{(j)}, \dots, a_{2[2/j]}^{(j)})$ nennen wir *grössenordnungsmässig optimal* in Bezug auf g und B, wenn ein $C > 0$ (unabhängig von j) derart existiert, dass für alle j gilt

(6) $$\|J_g - I(j, a_0^{(j)}, \dots, a_{2[j/2]}^{(j)})\|_{B^*} \leqq C\chi^B(g, j).$$

Die Formel $I(j, a_0^{(j)}, \dots, a_{2[2/j]}^{(j)})$ nennen wir *fast grössenordnungsmässig optimal*, wenn zwei Konstanten $C_1 > 0$ und $\beta > 0$ (unabhängig von j) derart existieren, dass ist

(7) $$\|J_g - I(j, a_0^{(j)}, \dots, a_{2[j/2]}^{(j)})\|_{B^*} \leqq C_1\chi^B(g, [\beta j]).$$

Ähnlich wie in [1] suchen wir eine solche Formel, die für eine womöglich grosse Raumklasse grössenordnungsmässig optimal ist. Wir bezeichnen $\mathscr{H}$ den Raum aller reeller Folgen $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\gamma_j \geqq 0$, $\gamma_0 > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$
2. Es existiert $s \geqq 1$ derart, dass $\gamma_s > 0$ ist. (s hängt von γ ab.)
3. $\lim_{j \to \infty} \gamma_j^{1/j} = 0$.

Jeder Folge γ entspricht eine ganze Funktion

(8) $$\psi_\gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j z^j.$$

Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen über $\mathscr{H}$ ist offensichtlich, dass

1. $\psi_\gamma(x)$ für $x \geqq 0$ eine positive wachsende Funktion ist;
2. ein $D > 0$ derart existiert, dass für $x \geqq 0$ ist

(9) $$\psi_\gamma(x) \geqq (1 + x) D.$$

Es sei nun $\gamma \in \mathscr{H}$. Wir bezeichnen H_γ den Hilbertschen Raum aller stetigen komplexen 2π-periodischen Funktionen $h(x)$ mit dem Skalarprodukt

(10) $$(k, h)_\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \int_0^{2\pi} k^{(j)}(x)\, \overline{h^{(j)}(x)}\, dx.$$

Wir können voraussetzen (mit Rücksicht auf die Voraussetzungen über $\mathscr{H}$), dass alle Funktionen $h \in H_\gamma$ total stetig sind.

3. ÜBER DIE UNIVERSAL FAST GRÖSSENORDNUNGSMÄSSIG OPTIMALE FORMEL

Weil die Funktion $g(x) \in L_2$ ist, können wir schreiben

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty .$$

Es sei s ein Index mit dem kleinsten Absolutwert, dass $c_s \neq 0$. Es sei $j > 0$. Wir bezeichnen $\omega_{j,s}(x) = (1 - \cos jx)\, e^{isx}$. Die Funktion $\omega_{j,s}(x)$ wird offensichtlich gleich Null in den Punkten $x_l = (2\pi/j)\, l$, $l = 0, 1, \ldots, j$. Darum ist auch $I(j, a_0, \ldots, a_{2[j/2]})$ . . $(\omega_{j,s}(x)) = 0$ für jedes a_i, $i = 0, 1, \ldots, a_{2[j/2]}$.

Anderseits haben wir

$$J_g(\omega_{j,s}(x)) = \int_0^{2\pi} e^{isx}(1 - \cos jx) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{c}_k e^{-ikx}\, \mathrm{d}x = 2\pi(\bar{c}_s - \bar{c}_{s-j}/2 - \bar{c}_{s+j}/2) .$$

Mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung, dass $g \in L_2$ ist, gilt $\lim\limits_{|k| \to \infty} c_k = 0.$ und wir erhalten für genügend grosse j

$$|J_g(\omega_{j,s}(x))| \geqq |c_s| .$$

Weiter gilt offensichtlich für genügend grosse j

$$\|\omega_{j,s}(x)\|_\gamma^2 = 2\pi[\psi_\gamma(s^2) + \tfrac{1}{4}\psi_\gamma((s+j)^2) + \tfrac{1}{4}\psi_\gamma((s-j)^2)] \geqq C_2 \psi_\gamma(j^2) .$$

Wir haben also Satz 1 bewiesen:

Satz 1. *Es existiert ein C_3 (unabhängig von j) sodass ist*

$$\chi^{H_\gamma}(g, j) \geqq C_3(\psi_\gamma(j^2))^{-\frac{1}{2}} .$$

Wir wählen nun eine spezielle Quadraturformel — diese nenen wir universal — und wir beweisen, dass sie grössenordnungsmässig fast optimal ist für jedes H_γ, $\gamma \in \mathscr{H}$. Die Universalformel I_g sei durch die Folge $a^{(j)}_{k+[j/2]} = c_k$, $|k| \leqq [j/2]$ beschrieben. Wir wollen das Fehlerfunktional betrachten

$$J_g - I_g .$$

Dieses Funktional ist auf H_γ stetig und wir können schreiben

$$(J_g - I_g)(f) = (f, \varrho)_\gamma ,$$

wobei

$$\varrho(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{\psi_\gamma(k^2)} e^{ikx} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-[j/2]}^{[j/2]} \frac{c_s}{\psi_\gamma((s+kj)^2)} e^{i(s+kj)x} .$$

Tatsächlich wenn wir für $f(x)$ die Reihe $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ikx}$ setzen, erhalten wir

$$(f, \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx})_\gamma = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \bar{c}_k = J_g(f) .$$

Ähnlich erhalten wir auch

$$\left(f, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-[j/2]}^{[j/2]} \frac{c_s}{\psi_\gamma((s+kj)^2)} e^{i(s+kj)x}\right)_\gamma = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-[j/2]} d_{s+kj} \bar{c}_s = I_g(f) .$$

Wir erhalten also

$$\varrho(x) = \sum_{|k|>[j/2]} \frac{c_k}{\psi_\gamma(k^2)} e^{ikx} - \sum_{k=-[j/2]}^{[j/2]} c_k \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ik(+nj)x}}{\psi_\gamma((k+nj)^2)} .$$

Darum ist

$$\|J_g - I_g\|_\gamma^2 = \|\varrho\|_\gamma^2 \leqq 8\pi \left[\sum_{|k|>[j/2]} \frac{|c_k|^2}{\psi_\gamma(k^2)} + \sum_{k=-[j/2]}^{[j/2]} |c_k|^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\psi_\gamma((k+nj)^2)} \right] .$$

Weil $\psi_\gamma(k^2)$ eine wachsende Funktion ist, erhalten wir

$$\|\varrho\|_\gamma^2 \leqq 8\pi \left[\frac{1}{\psi_\gamma(j/2)^2)} \sum_{|k|>[j/2]} |c_k|^2 + 2 \sum_{k=-[j/2]}^{[j/2]} \frac{|c_k|^2}{\psi_\gamma((j/2)^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_\gamma((j/2)^2)}{\psi_\gamma(1+2n)^2 j^2/4)} \right] \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{C_4}{\psi_\gamma((j/2)^2)} + \frac{C_5}{\psi_\gamma((j/2)^2)} R \right]$$

und

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_\gamma((j/2)^2)}{\psi_\gamma((1+2n)^2 j^2/4)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \psi'_\gamma((j/2)^2 + \Theta(n + n^2 j^2))(1+n) nj^2/\psi_\gamma((j/2)^2)} \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\psi'_\gamma((j/2)^2)(j/2)^2 (1+n) n/\psi_\gamma((j/2)^2)} .$$

Weil gilt

$$\psi'_\gamma((j/2)^2) = \sum_{s=1}^{\infty} s\gamma_s((j/2)^2)^{s-1} ,$$

bekommen wir

$$\psi'_\gamma((j/2)^2)(j/2)^2 \geqq \psi_\gamma((j/2)^2) - \gamma_0 ,$$

sodass für genügend grosse j gilt $R < \infty$.

Wir bekommen endlich

$$\|J_g - I_g\|_\gamma \leqq C_6(\psi_\gamma((j/2)^2))^{-\frac{1}{2}} \leqq C_7 \chi^{H\gamma}(g, j/2)$$

und haben folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. *Die Universalformel ist fast grössenordnungsmässig optimal in jedem* H_γ, $\gamma \in \mathscr{H}$.

4. ÜBER EINIGE KONKRETE FORMELN

Wir wollen uns mit einem konkreten Beispiel beschäftigen. Wir wollen das Funktional

$$J(f) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ausrechnen.

Auf Grund des im vorherigen Absatz gesagten, konstruieren wir ein Universalformel. Wir können schreiben

$$g(x) = 1/2 + (2/\pi)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cos(2k-1)\,x/(2k-1)$$

und

$$g(x) = 1 \quad \text{für} \quad 2k\pi - \pi/2 \leqq x < 2k\pi + \pi/2\,,$$
$$g(x) = 0 \quad \text{für} \quad 2k\pi + \pi/2 < x \leqq 2(k+1)\,\pi - \pi/2\,.$$

Die Universalformel ist dann von der Form

$$J(f) \approx (2\pi/j)\sum_{l=1}^{j} f(2\pi l/j)\,S_j(2\pi l/j)\,,$$

$$S_j(x) = 1/2 + (2/\pi)\sum_{k=1}^{[(j+2)/4]}(-1)\cos(2k-1)\,x/(2k-1)\,.$$

Wir bemerken noch, dass auf diese Weise das Problem der Integration in Raum der nichtperiodischen Funktionen auf dem Intervall $\langle -1, 1\rangle$ durch die Substitution $x = \sin\varphi$ gelöst werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] *I. Babuška:* Über die optimale Berechnung der Fourier'schen Koeffizienten. Aplikace matematiky 11, 1966, 113—123.

[2] *И. Бабушка, С. Л. Соболев:* Оптимизация численных методов. Aplikace matematiky, 10, 1965, 96—128.

[3] *I. Babuška:* Über optimale Formeln zur numerischen Beerchnung linearer Funktionale. Aplikace matematiky 10, 1965, 441—443.

Souhrn

O OPTIMÁLNÍCH KVADRATURNÍCH FORMULÍCH V PROSTORECH PERIODICKÝCH FUNKCÍ

IVO BABUŠKA

V práci se studují vlastnosti formule $I(f)$ numerického výpočtu integrálu

$$J_g(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,, \quad g \in L_2 \tag{1}$$

ve tvaru

$$I(f) = \frac{2\pi}{j}\sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\,l\right) \sum_{k=-[j/2]}^{[j/2]} \overline{a^{(j)}_{[j/2]+k}}\,e^{-ik2\pi l/j}\,. \tag{2}$$

V práci se ukazuje, že je-li

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

a položíme-li $a_k^{(j)} = c_{k-[j/2]}$, pak formule (2) má tu vlastnost, že výraz

$$\sup_{j=1,2,\ldots} \frac{\sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_g(f) - \frac{2\pi}{j}\sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\,l\right) \sum\limits_{k=-[j/2]}^{[j/2]} \bar{c}_k e^{-ik2\pi l/j} \right|}{\inf\limits_{a_l^{([j/2])}} \sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_g(f) - \frac{2\pi}{j}\sum\limits_{k=1}^{[j/2]} f\left(\frac{2\pi}{j}\,l\right) \sum\limits_{k=-[j/4]}^{[j/4]} a^{([j/2])}_{[j/2]+k}\,e^{ik2\pi l/[j/2]} \right|}$$

je omezený pro širokou třídu Hilbertových prostorů H.

Резюме

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ИВО БАБУШКА (IVO BABUŠKA)

В работе исследуются свойства формулы $I(f)$ для вычисления интеграла

$$J_g(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,, \quad g \in L_2 \tag{1}$$

в виде

$$I(f) = \frac{2\pi}{j}\sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\,l\right) \sum_{k=-[j/2]}^{[j/2]} \overline{a^{(j)}_{[j/2]+k}}\,e^{-ik2\pi l/j}\,. \tag{2}$$

В работе показано, что если

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

и если положим $\omega_k^{(j)} = c_{k-[j/2]}$, то формула (2) обладает тем свойством, что выражение

$$\sup_{j=1,2,\ldots} \frac{\sup\limits_{\|f\|_H \leq 1} \left| J_g(f) - \frac{2\pi}{j} \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) \sum\limits_{k=-[j/2]}^{[j/2]} \bar{c}_k e^{-ik2\pi l/j} \right|}{\inf\limits_{a_l^{([j/2])}} \sup\limits_{\|f\|_H \leq 1} \left| J_g(f) - \frac{2\pi}{j} \sum\limits_{l=1}^{[j/2]} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) \sum\limits_{k=-[j/4]}^{[j/4]} a_{[j/2]+k}^{([j/2])} e^{ik2\pi l/[j/2]} \right|}$$

ограничено для широкого класса пространств Гильберта H.

Anschrift des Autors: Ing. dr. *Ivo Babuška* Dr. Sc., Matematický ústav ČSAV, Opletalova 45, Praha 1.