Vladimír Klega

O jednom stochastickém modelu spolehlivosti

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 3, 224–231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103019

O JEDNOM STOCHASTICKÉM MODELU SPOLEHLIVOSTI

VLADIMÍR KLEGA

(Došlo dne 9. prosince 1964.)

1. ÚVOD

Jedním z nejčastějších kriterií spolehlivosti zařízení je pravděpodobnost jeho bezporuchové činnosti. Jestliže však do modelu spolehlivosti zahrneme dobu opravy prvků resp. bloků zařízení, ukáže se jako vhodnější zvolit za kritérium spolehlivosti zařízení pravděpodobnost, že je zařízení v provozu v uvažované provozní době.

Tohoto kritéria je v článku použito v případě modelu spolehlivosti zařízení, jehož struktura je charakterizována sériovým zapojením bloků, z nichž každý má určitý počet studených rezerv. Model je sestrojen pomocí teorie struktury, podané BIRNBAUMEM [1], a procesu rození a úmrtí. Vzorec pro spolehlivost zařízení je pak odvozen pro případ rovnovážného stavu (provozní doba zařízení $t \to \infty$), a užit pro stanovení spolehlivosti samočinného počítače.

2. STRUKTURA

Určité uspořádání prvků nějakého zařízení tvoří *strukturu*. Zařazený prvek do struktury buď funkčně vyhovuje nebo nevyhovuje. V dalším budeme uvažovat strukturu, která má prvky n druhů a prvků i-tého druhu je m_i. Pak stav všech prvků struktury můžeme popsat vektorem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

kde $x_i = 0, 1, 2, \ldots, m_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ udává počet vyhovujících prvků i-tého druhu.

Při některých stavech vektoru $\mathbf{x}$ struktura vyhovuje, při některých nevyhovuje. Stav struktury je tedy funkcí vektoru $\mathbf{x}$; označme ji $\Phi(\mathbf{x})$ a nazveme ji *strukturní funkcí.* Jestliže struktura vyhovuje, položíme $\Phi(\mathbf{x}) = 1$, v opačném případě $\Phi(\mathbf{x}) = 0$. Je-li dán stav všech prvků struktury, pak počet vyhovujících prvků je dán funkcí

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

kterou nazveme *rozsahem* vektoru $\mathbf{x}$.

Pro dva stavy všech prvků struktury $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ zavedeme tyto vztahy:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}, \text{ když } x_i \geqq y_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\mathbf{x} > \mathbf{y}, \text{ když } \mathbf{x} \geqq \mathbf{y} \text{ a } x_j > y_j \text{ aspoň pro jedno } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Z možných struktur budeme uvažovat pouze strukturu *koherentní*, pro jejíž strukturní funkci platí, že

$$\Phi(\mathbf{y}) \geqq \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna} \quad \mathbf{y} > \mathbf{x}\,,$$

a $\Phi(\mathbf{o}) = 0$, $\Phi(\mathbf{m}) = 1$.

Vektor $\mathbf{z}$ nazveme *minimálním průchodem*, když $\Phi(\mathbf{z}) = 1$, ale pro každé $\mathbf{x} < \mathbf{z}$ je $\Phi(\mathbf{x}) = 0$. Vektor $\mathbf{y}$ nazveme *minimálním závěrem*, když $\Phi(\mathbf{y}) = 0$, ale pro každé $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ je $\Phi(\mathbf{x}) = 1$.

Označme prostor všech stavů $\mathscr{X}$, množinu všech minimálních průchodů v $\mathscr{X}$ třeba $\mathscr{Z} = \{\mathbf{z}^{(j)}\}$ a množinu všech minimálních závěrů v $\mathscr{X}$ třeby $\mathscr{Y} = \{\mathbf{y}^{(j)}\}$. Dále označme množinu všech průchodů $\mathscr{N} = \{\mathbf{x} \in \mathscr{X} : \Phi(\mathbf{x}) = 1\}$ a množinu všech závěrů $\overline{\mathscr{N}} = \mathscr{X} - \mathscr{N} = \{\mathbf{x} \in \mathscr{X} : \Phi(\mathbf{x}) = 0\}$.

Zjištění všech prvků množiny $\mathscr{N}$ resp. $\overline{\mathscr{N}}$ pro zařízení s danou strukturou nám usnadní toto zřejmé tvrzení:

Strukturní funkce $\Phi(\mathbf{x}) = 1$ tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{x} \geqq \mathbf{z}^{(j)}$ pro některé j. Jestliže $\mathscr{N}_j = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geqq \mathbf{z}^{(j)}\}$, pak $\mathscr{N} = \bigcup\limits_j \mathscr{N}_j$. Obdobně strukturní funkce $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{x} \leqq \mathbf{y}^{(j)}$ pro některé j. Jestliže $\mathscr{M}_j = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \leqq \mathbf{y}^{(j)}\}$, pak $\overline{\mathscr{N}} = \bigcup\limits_j \mathscr{M}_j$.

Zaveďme ještě tyto množiny. Množinu

$$\mathscr{S}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} > \mathbf{x},\ s(\mathbf{y}) = s(\mathbf{x}) + 1,\ \mathbf{y} \in \mathscr{N}\}\,,$$

množinu

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \overline{\mathscr{N}},\ \mathscr{S}_{\mathbf{x}} \neq 0\}\,,$$

kterou nazveme *poruchovou bariérou*, a množinu

$$\mathscr{T}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} < \mathbf{x},\ s(\mathbf{y}) = s(\mathbf{x}) - 1,\ \mathbf{y} \in \mathscr{N} \cup \mathscr{B}\}\,.$$

Přechod prvku ze stavu, kdy vyhovuje, do opačného stavu nazveme jeho *poruchou*. Přechod prvku ze stavu, kdy nevyhovuje, do opačného stavu, nazveme jeho *opravou*. Jakmile systém (zařízení) v důsledku poruch jednotlivých prvků a neprovedení jejich oprav přejde do poruchové bariéry, tj. do stavu $\mathbf{x} \in \mathscr{B}$, nastane *porucha systému*, čili zařízení je vyřazeno z provozu.

Uvažujme náhodný vektor s prostorem stavů $\mathscr{X}$ a nechť provozní doba zařízení

$t \to \infty$. Potom pravděpodobnost, že systém bude ve stavu $\mathbf{x}$, označíme $\pi_{\mathbf{x}}$ a pravděpodobnost

$$S = \sum_{\mathbf{x} \in \mathscr{B}} \pi_{\mathbf{x}} \tag{2.1}$$

nazveme *poruchovostí* systému, a pravděpodobnost

$$R = \sum_{\mathbf{x} \in \mathscr{N}} \pi_{\mathbf{x}} \tag{2.2}$$

spolehlivostí systému. Z formulace poruchy systému plyne, že $\pi_{\mathbf{x}} = 0$ pro $\mathbf{x} \in \bar{\mathscr{N}} - \mathscr{B}$, a tedy mezi R a S platí vztah

$$R = 1 - S .$$

3. MODEL SPOLEHLIVOSTI ZAŘÍZENÍ SE STUDENOU REZERVOU

Uvažujme zařízení o konečném počtu n $(n \geqq 1)$ bloků, které jsou zapojeny v sérii, a nechť r-tý blok $(r = 1, 2, \ldots, n)$ čili blok r-tého druhu má $m_r - 1$ studených rezerv $(m_r \geqq 1)$. Blok, který je zamontován v zařízení a vyhovuje, nazveme *základní*. Blok téhož provedení, který není současně zapojen se základním blokem, ale jímž lze v případě, že vyhovuje (tj. není v opravě), základní blok po jeho selhání ihned nahradit, nazveme *studenou rezervou*. Zařízení opravuje n opravářů, z nichž r-tý provádí opravu všech bloků r-tého druhu.

Po selhání zařízení provádí opravu pouze opravář bloku, jehož selháním došlo k selhání zařízení. Ostatní opraváři provádí v té době mimořádnou údržbu zařízení a započnou opět s opravou bloků až po uvedení zařízení v činnost.

Tedy prostor stavů $\mathscr{X}$ tvoří všechny n-tice $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, kde $k_r = 0, 1, 2, \ldots \ldots, m_r$ udává počet zapojení schopných studených rezerv r-tého druhu včetně zapojeného základního bloku, tj. $m_r - k_r$ bloků r-tého druhu je v opravě.

V prostoru $\mathscr{X}$ je jediným minimálním průchodem vektor $(1, 1, \ldots, 1)$ a množinu minimálních závěrů tvoří vektory $\{\mathbf{y}^{(r)}\}_{r=1}^{n}$, kde $\mathbf{y}^{(r)} = m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}, 0, m_{r+1}, \ldots \ldots, m_n)$, čímž je dán rozklad prostoru $\mathscr{X}$ na množinu $\mathscr{N}$ a $\bar{\mathscr{N}}$. Poruchovou bariéru pak tvoří vektory $(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}, 0, k_{r+1}, \ldots, k_n)$, kde $r = 1, 2, \ldots, n$ a $k_j = 1, 2, \ldots \ldots, m_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r - 1, r + 1, \ldots, n)$.

Budeme předpokládat splnění těchto podmínek pro provoz zařízení:

(1) Doba bezporuchové činnosti bloku r-tého druhu je náhodnou proměnnou a má distribuční funkci

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 - e^{-\lambda_r t} \quad \text{pro} \quad \lambda_r > 0\,, \quad t \geqq 0\,, \\ &= 0 \qquad\qquad\;\, \text{pro} \quad t < 0\,. \end{aligned}$$

(2) Doba opravy bloku r-tého druhu je náhodnou proměnnou a má distribuční funkci

$$G(t) = 1 - e^{-\mu_r t}\,, \quad \mu_r > 0\,, \quad t \geqq 0\,,$$
$$= 0\,, \quad t < 0\,.$$

(3) Všechny náhodné proměnné jsou nezávislé.

Jestliže selháním resp. opravou bloku r-tého druhu přejde systém ze stavu $\mathbf{x}$ do stavu $\mathbf{y}$, položíme

$$\lambda_{\mathbf{xy}} = \lambda_r.$$

resp.

$$\mu_{\mathbf{xy}} = \mu_r\,.$$

Pak pro rovnovážný stav systému (tj. pro provozní dobu $t \to \infty$) splňují pravděpodobnosti $\pi_{\mathbf{x}}$, že systém je ve tvaru $\mathbf{x}$, soustavu lineárních rovnic pro proces rození a úmrtí (viz např. [2]), kterou v našem případě můžeme psát ve tvaru

$$(3.1)\qquad \Big(\sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{T}_{\mathbf{x}}} \lambda_{\mathbf{xy}} + \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{S}_{\mathbf{x}}} \mu_{\mathbf{xy}}\Big)\,\pi_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{S}_{\mathbf{x}}} \lambda_{\mathbf{yx}}\pi_{\mathbf{y}} + \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{T}_{\mathbf{x}}} \mu_{\mathbf{yx}}\pi_{\mathbf{y}}\,, \quad \mathbf{x}\in\mathscr{N}\,,$$

$$(3.2)\qquad \Big(\sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{S}_{\mathbf{x}}} \mu_{\mathbf{xy}}\Big)\,\pi_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{S}_{\mathbf{x}}} \lambda_{\mathbf{yx}}\pi_{\mathbf{y}}\,, \quad \mathbf{x}\in\mathscr{B}\,.$$

Zřejmě v množině $\mathscr{N} - \mathscr{B}$ není pro $n = 1$ žádný stav, pro $n = 2$ má tato množina jeden stav a pro $n > 2$ má

$$1 + \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_j=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_j}}^{n} m_{i_1} m_{i_2} \ldots m_{i_j}$$

stavů. Pak v množině $\mathscr{N} \cup \mathscr{B}$ je tento počet stavů:

$$m_1 + 1\,, \qquad (n = 1)\,,$$
$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) - 1\,, \qquad (n = 2)\,,$$
$$\prod_{j=1}^{n}(m_j + 1) - \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{i} m_{i_1} m_{i_2} \ldots m_{i_j} - 1\,, \quad (n > 2)\,.$$

Stejný počet rovnic má naše soustava, v níž jedna rovnice je závislá. Tu nahradíme podmínkou, že

$$(3.3)\qquad \sum_{\mathbf{x}\in\mathscr{N}\cup\mathscr{B}} \pi_{\mathbf{x}} = 1\,.$$

Přepišme nyní rovnici (3.1) do tvaru

$$(3.4)\qquad \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{T}_{\mathbf{x}}} (\lambda_{\mathbf{xy}}\pi_{\mathbf{x}} - \mu_{\mathbf{yx}}\pi_{\mathbf{y}}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathscr{S}_{\mathbf{x}}} (\lambda_{\mathbf{yx}}\pi_{\mathbf{y}} - \mu_{\mathbf{xy}}\pi_{\mathbf{x}})\,.$$

Této rovnici vyhovuje řešení

$$\pi_{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{m_j - k_j} \pi_{\mathbf{m}}\,, \quad \mathbf{k} \in \mathcal{N}\,, \tag{3.5}$$

neboť, položíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{k}$, $\mathbf{y} = (k_1, \ldots, k_{r-1}, k_r - 1, k_{r+1}, \ldots, k_n)$ pro libovolné r, máme

$$\lambda_r \pi_{\mathbf{k}} = \mu_r \pi_{(k_1, \ldots, k_{r-1}, k_r - 1, k_{r+1}, \ldots, k_n)}$$

a tedy součet $\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}}$ v (3.4) je roven nule. Obdobně zjistíme, že i součet $\sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{S}_{\mathbf{x}}}$ je roven nule. Řešení (3.5) také vyhovuje rovnici (3.2) pro $\mathbf{x} = \mathbf{k} \in \mathrm{B}$. Konečně z rovnice (3.3) máme

$$\pi_{\mathbf{m}} = \left[\sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_n \\ \mathbf{k} \in \mathcal{N} \cup \mathcal{B}}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j}\right)^{m_j - k_j}\right]^{-1}. \tag{3.6}$$

Dosadíme-li (3.5) a (3.6) do vzorce (2.2) a položíme-li $\varrho_j = \lambda_j / \mu_j$, máme spolehlivost systému dánu ve tvaru

$$R = \frac{\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{N}} \prod_{j=1}^{n} \varrho_j^{m_j - k_j}}{\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{N} \cup \mathcal{B}} \prod_{j=1}^{n} \varrho_j^{m_j - k_j}}\,. \tag{3.7}$$

Poněvadž

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{N}} \prod_{j=1}^{n} \varrho_j^{m_j - k_j} = \sum_{\substack{k_j = 0 \\ j = 1, 2, \ldots, n}} \prod_{j=1}^{n} \varrho_j^{k_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \varrho_j^{m_j}}{1 - \varrho_j}\,,$$

a

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}} \prod_{j=1}^{n} \varrho_j^{m_j - k_j} = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i^{m_i} \sum_{\substack{k_j = 0 \\ j = 1, 2, \ldots, n \\ j \neq i}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \varrho_j^{k_j} = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i^{m_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1 - \varrho_j^{m_j}}{1 - \varrho_j}\,,$$

můžeme (3.7) psát v konečném tvaru

$$R = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n} [\varrho_i^{m_i}(1 - \varrho_i)]/[1 - \varrho_i^{m_i}]}\,. \tag{3.8}$$

4. SPOLEHLIVOST SAMOČINNÉHO POČÍTAČE

Uvažujme samočinný počítač jako zařízení o třech sériově zapojených blocích v tomto základním uspořádání:

blok 1 – vstup počítače

blok 2 – elektronika počítače

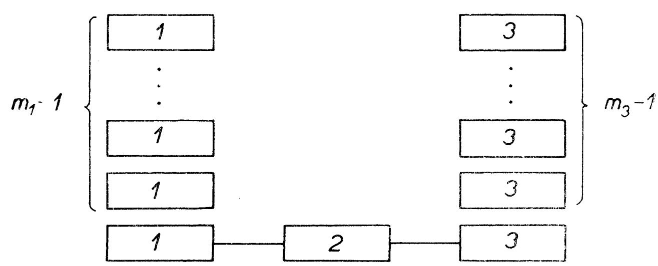
blok 3 – výstup počítače

Pro zvýšení spolehlivosti počítače doplňuje se základní uspořádání rezervními vstupy a výstupy, které tvoří studené rezervy počítače. Variantu uspořádání počítače s $m_1 - 1$ rezervními vstupy a s $m_3 - 1$ rezervními výstupy, znázorněnou na obr. 1, označíme trojčíslím

$$m_1 \quad 1 \quad m_3 .$$

TABULKA 1

varianta	R
111	0,93 023
211	0,95 614
112	0,96 475
212	0,99 264
312	0,99 348
213	0,99 410
313	0,99 494
413	0,99 496
314	0,99 500
414	0,99 502



Obr. 1.

Jestliže model spolehlivosti počítače ztotožníme s modelem v odst. 3, pak spolehlivost uvedené varianty počítače je podle (3.8) dána výrazem

$$(3.9) \qquad R = \frac{1}{1 + \varrho_2 + [\varrho_1^{m_1}(1 - \varrho_1)]/[1 - \varrho_1^{m_1}] + [\varrho_3^{m_3}(1 - \varrho_3]/[1 - \varrho_3^{m_3}]} .$$

Jako příklad uvažujme samočinný počítač s parametry

$$\varrho_1 = 0{,}03 , \quad \varrho_2 = 0{,}005 , \quad \varrho_3 = 0{,}04 .$$

V tabulce 1 je vypočtena spolehlivost několika variant počítače, Ze (3.9) plyne, že

$$\lim_{m_i \to \infty} R = \frac{1}{1 + \varrho_2} = 0{,}995\,025 ,$$

takže za „optimální" variantu můžeme považovat variantu 2 1 2, tj. samočinný počítač s jedním rezervním vstupem a výstupem.

Literatura

[1] *Birnbaum, Esary, Saunders:* Multicomponent Systems and Structures and Their Reliability. Technometrics 3 (1961).

[2] *Bharucha, Reid:* Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. 1960.

[3] *Barlow, Hunter:* System Efficiency and Reliability. Technometrics 2 (1960).

Резюме

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

ВЛАДИМИР КЛЕГА (VLADIMÍR KLEGA)

Исследуется установка, состоящая из конечного числа блоков, включенных последовательно, причем каждый из блоков имеет конечное число холодных резервов. Ремонт определенного блока и его резервов производит один ремонтник-специалист. В момент отказа установки производит починку только ремонтник блока, в результате аварии которого перестала работать вся установка. Остальные ремонтники в это время выполняют внесрочный ремонт установки и ремонт блоков начнут опять производить после приведения установки в действие.

Для такой модели определена надежность в случае уравновешенного состояния и показательного распределения времен ремонта и длин интервалов между авариями достоверность, как вероятность того, что установка действует, и определена формулой (3.8), где $m_i - 1$ — число холодных резервов и ϱ_i — частное от деления среднего времени ремонта на среднее время безаврийного действия i-ого блока.

Summary

ON A STOCHASTIC RELIABILITY MODEL

VLADIMÍR KLEGA

The paper considers an arrangement of a finite number of blocks connected in series, each block having a finite set of laid-off reserve duplicates; each block and its reserves can be repaired by a specialized operator, not available for the remaining blocks. On failure of one block the other operators perform routine sevicing of their blocks, proceeding to repairs only when the complete arrangement is again in working order.

For this model, in a equilibrium state and with an exponential distribution of repair durations and intervals between failures, the reliability is defined as the probability that the arrangement is in working order; this is given in (3.8), where $m_i - 1$ is the number of laid-off duplicates, and ϱ_i the ratio of mean repair time to mean failure-free interval of the i-th block.

Adresa autora: Ing. dr. *Vladimír Klega* C.Sc., Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů, Praha 1, Husova 8.