Ivan Hlaváček; Mircea Predeleanu

Sur l'existence et l'unicité de la solution dans la théorie du fluage linéaire. III. Le problème contact et mixte

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 3, 199–210

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103017`

SUR L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DANS LA THÉORIE DU FLUAGE LINÉAIRE
III. LE PROBLÈME CONTACT ET MIXTE

IVAN HLAVÁČEK et MIRCEA PREDELEANU
(Reçu le 9 novembre 1964.)

LE PROBLÈME CONTACT

Considérons les domaines Ω du même type que dans le second problème aux limites [12].

Soit donnée la fonction des forces massiques $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega, J)$. Les conditions aux limites du problème contact sont:

1° la projection du vecteur du déplacement dans la direction de la normale vers la frontière Γ

$$u_{(\nu)} = \sum_{i=1}^{3} \nu_i u_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,\ t \in J\,, \tag{31}$$

2° la projection de la tension superficielle $q_i = \sum_{k=1}^{3} \nu_k \sigma_{ki}$ dans le plan tangent vers la frontière Γ

$$\boldsymbol{q}_{(s)} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma,\ t \in J\,, \tag{32}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est un vecteur – unité de la normale.

Les équations de l'equilibre (4) avec des forces massiques données naturellement doivent être accomplies.

Comme dans le premier et second problème aux limites, à la place d'un problème du fluage linéaire nous formulerons d'abord un problème équivalent de la théorie de l'élasticité pour les forces massiques modifiées.

On peut écrire la condition (32) aussi sous la forme

$$q_{(s)i}(t) = \sum_{k=1}^{3} \nu_k\, \sigma_{ik}(t) - \nu_i \sum_{j,k=1}^{3} \sigma_{jk}(t)\, \nu_j \nu_k = 0\,, \quad t \in J,\ i = 1, 2, 3\,. \tag{33}$$

Si on substitue ici

$$\sigma_{ik}(t) = G_t \hat{\sigma}_{ik} \quad \text{(à comparer [12])}$$

et si on profite de la linéarité de l'opérateur G_t, on obtient

$$G_t\Big[\sum_{k=1}^{3} \nu_k \hat{\sigma}_{ik} - \nu_i \sum_{j,k=1}^{3} \hat{\sigma}_{jk} \nu_j \nu_k\Big] = 0 .$$

En même temps on suppose $\partial \nu_i(t)/\partial t = 0$ pour $t \in J$, $i = 1, 2, 3$.

Ensuite, il résulte du lemme 4 [12]

$$\sum_{k=1}^{3} \nu_k \hat{\sigma}_{ik}(t) - \nu_i \sum_{j,k=1}^{3} \hat{\sigma}_{jk}(t) \nu_j \nu_k = 0 , \quad t \in J, \ i = 1, 2, 3 . \tag{34}$$

Nous sommes arrivés à un problème aux limites équivalent de la théorie de l'élasticité classique, que nous définissons par les équations

$$L_i \, \mathbf{u}(t) = G_t^{-1} F_i \equiv \mathscr{F}_i^*(t) , \quad t \in J, \ i = 1, 2, 3 \tag{23}$$

et par les conditions aux limites (31), (34).

En *solutionnant le problème contact*, on comprendra la solution faible du problème aux limites (23), (31), (34), c'est-à-dire la fonction des déplacements $\mathbf{u}(X, t) \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega, J)$ telle, que pour chaque $t \in J$ on ait (en continuant on supprime l'argument t):

1° (31) $\sum_{i=1}^{3} \nu_i \, u_i(t) = 0$ sur Γ (au sens des traces),

2° pour chaque vecteur-fonction $\boldsymbol{\varphi}(X)$, qui possède toutes les dérivées continues dans $\bar{\Omega}$ et satisfait la condition (31), (on indiquera le linéal de ces fonction R), fait

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{u}) \, \mathrm{d}X = - \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi_i \mathscr{F}_i^* \, \mathrm{d}X . \tag{35}$$

Remarque 5. Dans les cas singuliers, où Γ est composé des surfaces de rotation, on restreindra la solution $\mathbf{u}$, la fonction $\mathbf{F}$ et les fonctions $\boldsymbol{\varphi} \in R$ encore par les conditions, qu'on introduit plus tard dans la démonstration du théorème d'existence.

Remarque 6. La relation (35) résulte de l'équation

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi_i L_i \mathbf{u} \, \mathrm{d}X = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi_i \mathscr{F}_i^* \, \mathrm{d}X$$

et des conditions aux limites (31), (34) par l'intégration par parties. Le second membre de (35) représente la valeur de la fonctionelle $-(\boldsymbol{\varphi}, \mathscr{F}^*)$, qui est linéaire et continue non seulement pour $\boldsymbol{\varphi} \in R$, mais aussi pour $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$, car $\mathscr{F}^* \in \mathbf{L}_2(\Omega, J)$ (voir la remarque 4 [12]).

Théorème 3. *Le problème contact pour un corps défini par les relations* (1)–(3) *en tenant compte des suppositions du lemme* 4, *soumis aux forces massiques* $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_2(\Omega, J)$ *a une solution* $\mathbf{u}$, *qui est unique dans* $H_R(\Omega, J) \subset \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega, J)$[1] *et*

$$|\mathbf{u}|_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega, J)} \leqq c|\mathbf{F}|_{\mathbf{L}_2(\Omega, J)} . \tag{36}$$

Démonstration: qu'on choisisse d'abord un $t \in J$ fixé et dans le suivant qu'on supprime le signe de la dépendence de t. Considérons d'abord les domaines dont les frontières ne sont pas formées par les surfaces de rotation, aussi que la condition (31) déjà élimine les déplacements et les petites rotations du corps comme un entier rigide.

H_R soit l'espace hilbertien, qui provient comme une enveloppe complète du linéal R dans une norme convenante au produit scalaire

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}]_{H_R} \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \hat{\sigma}_{ik}(\mathbf{u}) \, \mathrm{d}X , \quad \mathbf{v}, \mathbf{u} \in R .$$

La forme bilinéaire ainsi définie possède en effet des qualités du produit scalaire dans une part de l'espace $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$. C'est-à-dire dans l'ensemble R ont lieu l'inégalité de Korn ([7], § 43) et l'inégalité

$$|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqq c_2 \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}X . \tag{37}$$

De cela on déduit l'inégalité

$$|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c_3 |\mathbf{v}|^2_{H_R} \quad \text{pour} \quad \mathbf{v} \in R , \tag{38}$$

$H_R \subset \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ et la validité de (38) même pour $\mathbf{v} \in H_R$.

La définition intégrale du produit scalaire vaut pour tous les $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in H_R$. C'est la conséquence de la continuité du produit scalaire, de l'inégalité (38) et de la fermeté de l'opérateur de la dérivation généralisée.

Suivant le théorème de Fréchet-Riesz, il existe précisément un élément $\mathbf{u} \in H_R$ tel que

$$[\mathbf{v}, \mathbf{u}]_{H_R} = -(\mathbf{v}, \mathscr{F}^*) \quad \text{pour} \quad \mathbf{v} \in H_R ,$$

donc spécialement aussi pour $\varphi \in R \subset H_R$, alors $\mathbf{u}$ satisfait à la condition (35). La mesurabilité de $\mathbf{u}(t)$ résulte de la mesurabilité de la transformation $\mathscr{F}^*(t)$ dans J.

Nous vérifions l'accomplissement de la condition (31) ainsi: on sait, qu'il existe la suite des éléments $\varphi_n \in R$ telle que (selon (38))

$$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n - \mathbf{u}|_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} = 0 .$$

[1]) $H_R(\Omega, J)$ soit l'espace des transformations mesurables de l'intervalle J dans l'espace H_R.

Alors même pour toutes les composantes, on a

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_{ni} - u_i|_{W_2^{(1)}(\Omega)} = 0 .$$

Pour les domaines du type considéré, il existe une transformation continue linéaire de l'espace $W_2^{(1)}(\Omega)$ dans l'espace des traces $L_2(\Gamma)$ (voir [7], § 22, resp. [6]). Alors

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} |\varphi_{ni} - u_i|_{L_2(\Gamma)} = 0 .$$

Evaluons la norme des différences

$$|\sum_{i=1}^{3} v_i\varphi_{ni} - \sum_{i=1}^{3} v_i u_i|^2_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{\lambda} \int_{g_k} [\sum_{i=1}^{3} v_i(\varphi_{ni} - u_i)]^2 \, \mathrm{d}x_{m_k} \, \mathrm{d}x_{n_k} \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\lambda} \int_{g_k} (\sum_{i=1}^{3} v_i^2)(\sum_{i=1}^{3} (\varphi_{ni} - u_i)^2) \, \mathrm{d}x_{m_k} \, \mathrm{d}x_{n_k} = \sum_{i=1}^{3} |\varphi_{ni} - u_i|^2_{L_2(\Gamma)} ,$$

parce que $\boldsymbol{v}$ est un vecteur-unité. Si on substitue ici la condition (31) pour les fonctions φ_{ni} et la rélation (*), on obtient

$$|\sum_{i=1}^{3} v_i u_i|^2_{L_2(\Gamma)} = 0 .$$

Ensuite, on montre facilement, qu'il vaut (36) et que la solution faible est unique dans $H_R(\Omega) \subset \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Enfin nous ferons une mention des cas singuliers où la condition aux limites (31) n'élimine pas les mouvements du corps en tant qu' entier rigide.

En cas où Γ se compose des surfaces de rotation avec un seul axe de rotation commun qu'on identifie sans détriment de la généralité avec l'axe x_3, on pose les conditions suivantes pour la solution $\boldsymbol{u}$ du problème, et pour les fonctions $\varphi \in R$ resp. pour les forces massiques (pour chaque $t \in J$)

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}X = 0 , \quad \text{resp.} \quad \int_\Omega (x_1, F_2 - x_2 F_1) \, \mathrm{d}X = 0 .$$

En cas où Γ se compose de deux surfaces sphériques concentriques, on prend les conditions

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}X = 0 \quad \text{resp.} \quad \int_\Omega (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \, \mathrm{d}X = 0 ,$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon — vecteur.

Les conditions pour les forces massiques expriment l'équilibre de forces extérieurcs, les conditions additionnelles pour la solution $\boldsymbol{u}$ resp. pour les fonctions φ sont suffisantes pour l'élimination des rotations possibles du corps pris comme un entier rigide. Pour le linéal R ainsi défini on a de nouveau l'inégalité de Korn et l'inégalité (38) dans H_R, pour la démonstration on peut donc procéder comme tout à l'heure.

LE PROBLÈME MIXTE

Supposons de nouveau que le domaine Ω satisfait les conditions du second problème aux limites [12] et que sa frontière se compose de trois parties

$$\Gamma = \Gamma_{\text{I}} + \Gamma_{\text{II}} + \Gamma_{\text{III}},$$

(dont une quelconque peut manquer).

Par $L_2(\Gamma_{\text{I}})$ on désignera l'espace des fonctions p, définies presque partout dans la partie Γ_{I} de la frontière (c'est-à-dire presque partout dans ces domaines bidimensionnaux $g_r^{\text{I}} \subset g_{k_r}$, où pour $(x_{m_r}, x_{n_r}) \in g_r^{\text{I}}$ on a

$$[x_{m_r}, x_{n_r}, \varphi_{k_r}(x_{m_r}, x_{n_r})] \in \Gamma_{\text{I}}$$

(chaque point de Γ_{I} pouvant être exprimé de cette manière-ci), et tels, que l'expression (norme)

$$\sum_{r=k_r} \int_{g_r^{\text{I}}} p^2[x_{m_r}, x_{n_r}, \varphi_{k_r}(x_{m_r}, x_{n_r})] \, \mathrm{d}x_{m_r} \, \mathrm{d}x_{n_r} = |p|^2_{L_2(\Gamma_{\text{I}})} < \infty .$$

$\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{I}})$ représente l'espace des vecteur-fonctions $\boldsymbol{p}(X) \equiv (p_1(X), p_2(X), p_3(X))$, dont chaque composante $p_i \in L_2(\Gamma_{\text{I}})$, $i = 1, 2, 3$; et on introduit la norme dans $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{I}})$ par

$$|\boldsymbol{p}|^2_{\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{I}})} = \sum_{i=1}^{3} |p_i|^2_{L_2(\Gamma_{\text{I}})} .$$

Par $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{I}}, J)$ on désignera l'espace de toutes les transformations de l'intervalle J dans $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{I}})$ telles, que l'expression (norme)

$$\sup_{t \in J} |\boldsymbol{p}(t)|_{\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{I}})} \equiv |\boldsymbol{p}|_{\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{I}}, J)} < \infty .$$

De manière analogue, on définit les espaces $L_2(\Gamma_{\text{II}})$, $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{II}})$, $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{II}}, J)$ et $L_2(\Gamma_{\text{III}})$, $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{III}})$, $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{III}}, J)$.

Soit donnée la fonction des forces massiques $\boldsymbol{F} \in \mathbf{L}_2(\Omega, J)$, la fonction de la charge de surface $\boldsymbol{p} \in \mathbf{L}_2(\Gamma_{\text{II}}, J)$ et la fonction des déplacements superficiels $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega, J)$ telle, que pour tous les $t \in J$ on ait $f_{(v)} = 0$ sur Γ_{III} au sens des traces.

On formule les conditions aux limites du problème mixte ainsi (pour tous les $t \in J$):

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{I}}, \tag{39}$$

$$q_i \equiv \sum_{k=1}^{3} v_k \, \sigma_{ki}(\boldsymbol{u}) = p_i \qquad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{II}},\ i = 1, 2, 3\,, \tag{40}$$

$$u_{(v)} = \sum_{i=1}^{3} v_i u_i = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{III}}\,, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{q}_{(s)} \equiv \boldsymbol{q} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q} \,.\, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{III}} \tag{42}$$

(comparer (32)). En outre, naturellement, les relations (1), (2), (3) et les équiatons d'équilibre (4) doivent être accomplies (voir [11]).

On peut écrire ces équations – comme on sait – dans la forme (5) ou dans la forme équivalente (23), (voir lemme 3 resp. 1a remarque 4).

On peut transformer la condition (40) dans la forme équivalente (21), valable sur la partie Γ_{II} de la frontière et la condition (42) dans la forme (34), valable sur Γ_{III}. Nous sommes arrivés de nouveau à un problème mixte équivalent de la théorie de l'élasticité classique, que nous définissons par les équations (23) et par les conditions aux limites (39), (21), (41), (34).

En *solutionnant le problème mixte* on comprendra la solution faible du problème aux limites équivalent, c'est-à-dire la fonction des déplacements $\boldsymbol{u}(X, t) \in \boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega, J)$ telle, que pour chaque $t \in J$ on ait (en continuant on supprime l'argument t)

1° $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ sur Γ_{I} (au sens des traces),

2° $u_{(v)} = 0$ sur Γ_{III} (au sens des traces),

3° pour chaque vecteur-fonction $\boldsymbol{\varphi}(X)$, qui possède toutes les dérivées continues dans $\bar{\Omega}$, dont le support est disjoint avec la partie Γ_{I} et $\varphi_{(v)} = 0$ sur Γ_{III} (on indiquera le linéal de ces fonction M), fait

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{u}) \, \mathrm{d}X = \int_{\Gamma_{\mathrm{II}}} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i p_i^* \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \mathscr{F}_i^* \, \mathrm{d}X\,. \tag{43}$$

Remarque 7. Dans les cas singuliers, quand Γ_{I} manque et la condition (41) permet les mouvements du corps comme un entier rigide, on pose sur la solution $\boldsymbol{u}$, les fonctions $\boldsymbol{\varphi} \in M$ et les forces extérieures $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{p}$ les conditions suivantes, qu'on introduit plus tard dans la démonstration du théorème d'existence.

Remarque 8. La relation (43) résulte de l'équation

$$\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} \varphi_i \frac{\partial \hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{u})}{\partial x_k} \, \mathrm{d}X = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \mathscr{F}_i^* \, \mathrm{d}X$$

et des conditions aux limites (40), (42) pour $\boldsymbol{u}$ et des conditions pour les fonctions $\boldsymbol{\varphi}$ par l'intégration par parties. Le second membre de (43) représente une différence des valeurs des fonctionelles $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{p}^*) - (\boldsymbol{\varphi}, \mathscr{F}^*)$ qui sont linéaires et continues non seulement pour $\boldsymbol{\varphi} \in M$, mais aussi pour $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)$. C'est-à-dire que le lemme 4 resp. la remarque 2 vaut même dans le cas où l'on remplace partout $L_2(\Gamma, J)$ par $L_2(\Gamma_{\text{II}}, J)$, ainsi que

$$G_t^{-1} p_i = p_i^* \in L_2(\Gamma_{\text{II}}, J) .$$

Ensuite, il suffit d'employer la définition de l'intégrale de surface et la continuité de l'immersion $\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)$ dans $\boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\text{II}})$ (comparer [7], § 22), en attestant l'affirmation pour la première fonctionelle. Pour la seconde fonctionelle l'affirmation est évidente, car $\mathscr{F}^* \in \boldsymbol{L}_2(\Omega, J)$.

Théorème 4. *Le problème mixte pour un corps défini par les relations* (1)–(3), *compte tenu des suppositions du lemme* 4, *soumis aux forces massiques* $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega, J)$ *et à la charge de surface* $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\text{II}}, J)$ *a une solution* $\boldsymbol{u}$, *qui est unique dans* $f \oplus H_M(\Omega, J) \subset \boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega, J)$[2] *et*

$$|\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega,J)} \leqq c\left[|\boldsymbol{F}|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega,J)} + |\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\text{II}},J)} + |\boldsymbol{f}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega,J)}\right] . \tag{44}$$

Démonstration. On choisit d'abord un $t \in J$ fixé et dans la suite on supprime le signe de la dépendance de t.

Supposons d'abord que par les conditions (39) et (41) les mouvements du corps – pris comme un entier rigide – sont éliminés.

On pose

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{w} ,$$

si bien que, au sens de (43), l'égalité suivante devrait être valable

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{w}) \, \mathrm{d}X =$$
$$\int_{\Gamma_{\text{II}}} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \boldsymbol{p}_i^* \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \mathscr{F}_i^* \, \mathrm{d}X - \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{f}) \, \mathrm{d}X .$$

La fonctionelle définie par la dernière intégrale du second membre $\langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f} \rangle$ est linéaire et continue pour les fonctions de $\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)$, car $\hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{f}) \in L_2(\Omega)$.

H_M soit l'espace hilbertien, qui provient comme une enveloppe complète du linéal M dans une norme convenant au produit scalaire

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]_{H_M} \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \hat{\sigma}_{ik}(\boldsymbol{w}) \, \mathrm{d}X , \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in M .$$

[2]) $H_M(\Omega, J)$ soit l'espace des transformations mesurables de l'intervalle J dans l'espace H_M.

La forme bilinéaire ainsi définie possède en effet des qualités du produit scalaire dans une partie de $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$. C'est-à-dire dans l'ensemble M l'inégalité de Korn et l'inégalité

$$|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqq c_1 \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{d}X . \tag{37}$$

ont lieu (voir [7], § 43). De cela, on déduit l'inégalité

$$|\mathbf{v}|^2_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} \leqq c_2 |\mathbf{v}|^2_{H_M} \quad \text{pour} \quad \mathbf{v} \in M , \tag{45}$$

$H_M \subset \mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ et la validité de (45) dans H_M entier. La définition intégrale du produit scalaire vaut pour tous les $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_M$. C'est une conséquence de la continuité du produit scalaire, de l'inégalité (45) et de la fermeté de l'opérateur de dérivation généralisée.

Suivant le théorème de Fréchet-Riesz, il existe précisément un élément $\mathbf{w} \in H_M$ tel, que

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]_{H_M} = (\mathbf{v}, \mathbf{p}^*) - (\mathbf{v}, \mathscr{F}^*) - \langle \mathbf{v}, \mathbf{f} \rangle \tag{46}$$

pour $\mathbf{v} \in H_M$, alors spécialement aussi pour $\varphi \in M \subset H_M$. La mesurabilité de $\mathbf{u}(t)$ résulte de la mesurabilité des transformations $\mathbf{p}^*(t)$, $\mathscr{F}^*(t)$, $\mathbf{f}(t)$ dans J. Ensuite, $\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{w}$ satisfait à la définition de la solution faible (43).

Nous vérifions l'accomplissement de la condition (41) sur Γ_{III} d'une façon analogue comme dans le problème contact, avec la seule différence qu'on emploie ici la continuité de la transformation linéaire de l'espace $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ dans l'espace des traces $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\mathrm{III}})$ (voir [7], § 22).

L'accomplissement de la condition

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\mathrm{I}}$$

résulte pareillement de l'existence d'une suite $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in M$, qui converge dans l'espace $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ vers $\mathbf{w}$, et de la continuité de l'immersion d'espace $\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)$ dans $\mathbf{L}_2(\Gamma_{\mathrm{I}})$.

On atteste l'unicité de la solution faible de même que p.ex. dans la démonstration du théorème 2.

Pour démontrer (44), on profite de l'inégalité (45) pour $\mathbf{w}(t)$ et ensuite de la relation (46) pour $\mathbf{v} = \mathbf{w}(t)$ on dérive

$$|\mathbf{w}(t)|^2_{H_M} \leqq |\mathbf{w}(t)|_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega)} \left(|\mathbf{p}^*(t)|_{\mathbf{W}_2^{(-1)}(\Omega)} + |\mathscr{F}^*(t)|_{\mathbf{W}_2^{(-1)}(\Omega)} + |\mathbf{f}(t)|_{\mathbf{W}_2^{(-1)}(\Omega)}\right) . \tag{47}$$

Par la conjonction de (45) pour $\mathbf{w}(t)$, de (47) et par la transition à la borne supérieure, on obtient

$$|\mathbf{w}|_{\mathbf{W}_2^{(1)}(\Omega, J)} \leqq c_3 |\mathbf{p}^* + \mathscr{F}^* + \mathbf{f}|_{\mathbf{W}_2^{(-1)}(\Omega, J)} . \tag{48}$$

D'après la citation dans la remarque 8 on dérive par suite

$$|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}^*(t)| \leqq c_4 |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega} \, |\boldsymbol{p}^*(t)|_{\boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\mathrm{II}})},$$

d'où il résulte

$$|\boldsymbol{p}^*|_{\boldsymbol{W}_2^{(-1)}(\Omega,J)} \leqq c_4 |\boldsymbol{p}^*|_{\boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\mathrm{II}},J)}.$$

Suivant les inégalités analogues (17) (voir [11]) on obtient

$$|\boldsymbol{p}^*|_{\boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\mathrm{II}},J)} \leqq c_5 |\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\mathrm{II}},J)}.$$

En somme alors

$$|\boldsymbol{p}^*|_{\boldsymbol{W}_2^{(-1)}(\Omega,J)} \leqq c_6 |\boldsymbol{p}|_{\boldsymbol{L}_2(\Gamma_{\mathrm{II}},J)}. \tag{49}$$

Dans le travail [12] on a établi l'inégalité

$$|\mathscr{F}^*|_{\boldsymbol{W}_2^{(-1)}(\Omega,J)} \leqq c_5 |\boldsymbol{F}|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega,J)}. \tag{30}$$

On trouve facilement que

$$|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}(t) \rangle| \leqq c_7 |\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)} \, |\boldsymbol{f}(t)|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)},$$

d'où il résulte

$$|\boldsymbol{f}|_{\boldsymbol{W}_2^{(-1)}(\Omega,J)} \leqq c_7 |\boldsymbol{f}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega,J)}. \tag{50}$$

Si l'on substitute (49), (30), (50) dans (48) et que l'on emploie la relation

$$|\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega,J)} \leqq |\boldsymbol{w}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega,J)} + |\boldsymbol{f}|_{\boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega,J)},$$

on obtient l'inégalité (44).

Enfin, nous analysons quelques cas singuliers du problème mixte, quand la partie Γ_{I} de la frontière manque, et la condition (41) n'élimine pas les mouvements du corps pris comme un entier rigide.

Pour obtenir la solution unique, on complète les conditions pour la solution $\boldsymbol{u}$ et pour les fonctions $\boldsymbol{\varphi} \in M$ ainsi:

a) quand Γ_{III} se compose de surfaces cylindriques avec les droites superficielles parallèles p.ex. à l'axe x_1, nous éliminons la possibilité du déplacement du corps par la condition

$$\int_\Omega u_1 \, \mathrm{d}X = 0 ; \tag{51}$$

b) quand Γ_{III} est réduite en parties de plans qui sont réciproquement parallèles, p.ex. avec les équations $x_3 = x_{0i}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, on emploie les conditions

$$\int_\Omega u_1 \, \mathrm{d}X = \int_\Omega u_2 \, \mathrm{d}X = 0 , \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}X = 0 ; \tag{52}$$

c) quand Γ_{III} se compose de surfaces de rotation avec un seul axe de rotation commun, qu'on identifie sans détriment de la généralité avec l'axe x_3, resp. de surfaces sphériques concentriques, on prend les conditions (voir le problème contact)

$$(53) \qquad \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}X = 0\,, \quad \text{resp.} \quad \int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}X = 0\,;$$

d) quand Γ_{III} est une partie de la surface hélicoïdale

$$x_1 = \varrho \cos \omega\,, \quad x_2 = \varrho \sin \omega\,,$$
$$x_3 = g(\varrho) + h\omega\,,$$

il suffit de mettre la condition

$$(54) \qquad \int_\Omega \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}X = 0\,.$$

Les conditions du type de (51)–(54) sont valables aussi pour les fonctions $\boldsymbol{\varphi} \in M$.

En même temps, il faut accomplir les conditions nécessaires d'équilibre de toutes forces extérieures, à savoir dans le cas

$$(55) \qquad \text{a)} \ -\int_\Omega F_1 \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_{II}} p_1 \, \mathrm{d}S = 0\,,$$

$$(56) \qquad \text{b)} \ -\int_\Omega F_1 \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_{II}} p_1 \, \mathrm{d}S = -\int_\Omega F_2 \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_{II}} p_2 \, \mathrm{d}S = 0\,,$$

$$(57) \qquad -\int_\Omega (x_1 F_2 - x_2 F_1) \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_{II}} (x_1 p_2 - x_2 p_1) \, \mathrm{d}S = 0\,,$$

$$\text{c) (57) resp.} \ -\int_\Omega (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_{II}} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \, \mathrm{d}S = 0\,,$$

$$(58) \qquad \text{d)} \ -\int_\Omega (x_1 F_2 - x_2 F_1) \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_{II}} (x_1 p_2 - x_2 p_1) \, \mathrm{d}S + $$
$$+ h\left(\int_\Omega -F_3 \, \mathrm{d}X + \int_{\Gamma_{II}} p_3 \, \mathrm{d}S\right) = 0\,,$$

(comparer [7], § 40). En employant l'opérateur G_t, on constate que même les forces extérieures modifiées $\mathscr{F}^*$, $\boldsymbol{p}^*$ accomplissent ensuite les conditions d'équilibre citées.

Dans chacun des quatre cas cités l'inégalité (37) et l'inégalité de Korn ont lieu de nouveau dans le linéal corréspondant. Parce que Γ_I manque, on peut mettre dans la démonstration précitée $\boldsymbol{f} \equiv 0$ et $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$. A part de cela, le procédé de la démonstration reste sans changement. On vérifie l'accomplissement des conditions (51)–(54) facilement par un passage à la limite.

Littérature

Les travaux [1]—[10] sont cités dans la Ière partie (voir [11]).

[11] *I. Hlaváček, M. Predeleanu:* Sur l'existence et l'unicité de la solution dans la théorie du fluage linéaire. I. Premier problème aux limites. Aplikace matematiky 9, (1964), No 5, 321—327.

[12] *I. Hlaváček, M. Predeleanu:* Sur l'existence et l'unicité de la solution dans la théorie du fluage linéaire. II. Second problème aux limites. Aplikace matematiky 10 (1965), No 5, 391—398.

Výtah

EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ V TEORII LINEÁRNÍ REOLOGIE III. KONTAKTNÍ A SMÍŠENÁ OKRAJOVÁ ÚLOHA

IVAN HLAVÁČEK a MIRCEA PREDELEANU

Dokazuje se existence a unicita řešení kontaktního a smíšeného okrajového problému v lineární prostorové reologii, s omezením na homogenní a isotropní materiály a stálý, v čase neproměnný koeficient příčné kontrakce. Je započteno jak dotvarování, tak i stárnutí materiálu. Při smíšené úloze jsou na části povrchu dána posunutí, na další části povrchové síly a na zbytku povrchu jsou kontaktní podmínky.

Řešení úlohy je definováno ve slabém smyslu (viz [6], [7). Pomocí příslušné Volterrovy integrální rovnice je původní problém převeden na problém klasické teorie pružnosti, pro který se snadno dokáže existence i unicita řešení.

Резюме

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ОДНОЗНАЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ III. КОНТАКТНАЯ И СМЕШАННАЯ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

ИВАН ГЛАВАЧЕК и МИРЧА ПРЕДЭЛЕАНУ
(IVAN HLAVÁČEK et MIRCEA PREDELEANU)

Доказывается существование и однозначность решения контактной и смешанной краевых задач в линейной пространственной ползучести, причем ограничиваемся однородными и изотропными материалами и постоянным, непеременным во времени коэффициентом поперечного сжатия. Учитывается наследственность и также старение материала.

В смешанной задаче предполагается, что на одной части границы заданы перемещения, на второй поверхностные напряжения и на остающейся части выполнены контактные условия.

Решение задачи определено в слабом смысле (см. [6]). При помощи соответствующего интегрального уравнения Вольтерра сводится первоначальная задача к проблеме из теории упругости, для которой легко проверить утверждение о существовании и однозначности решения.

Adrese des auteurs: Inž. *Ivan Hlaváček* C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1. — Dr. *Mircea Predeleanu*, Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de la R.P.R., M. Eminescu 47, București 3.