Ivo Babuška

Über die optimale Berechnung der Fourierschen Koeffizienten

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 2, 113–123

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103006`

ÜBER DIE OPTIMALE BERECHNUNG DER FOURIER'SCHEN KOEFFIZIENTEN

IVO BABUŠKA

(Eingelangt am 16. April 1965.)

1. EINLEITUNG

In der numerischen Praxis spielt die numerische Berechnung des Integrals

$$J_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ipx}\, \mathrm{d}x\,, \quad p \geqq 0\,, \tag{1}$$

p ganze Zahl, eine besondere Aufgabe, wobei $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion ist.

Es handelt sich hier um die Problematik der numerischen Berechnung eines speziellen Funktionals. Über diese Fragen vergleiche auch [1], [10]. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der numerischen Berechnung (linearen Charakters) mit Hilfe der Funktionswerte der Funktion $f(x)$ in den Knotenpunkten eines gleichmässigen Netzes.

Wir setzen

$$I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\,(f) = \sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) a_l^{(j)} \tag{2}$$

und wollen uns mit der Frage der Wahl der Koeffizienten $a_l^{(j)}$ beschäftigen.

Für den Fall $p = 0$ wird in der numerischen Praxis die Trapezformel

$$a_l^{(j)} = \frac{1}{j}\,, \quad l = 1, 2, \ldots, j\,,$$

als geeigneteste angenommen. W. E. MILNE hat auf die Vorzüge der Trapezformel gegenüber den anderen Formel als erster aufmerksam gemacht. Er hat gezeigt: Wenn die k-te Ableitung der Funktion $f(x)$ von endlicher Variation ist, so ist der Fehler von der Grössenordnung $O(1/j^{k+1})$. (Vgl. zB. [2], S. 130.) DAVIS [3] vergleicht die Eigenschaften dieser Formel mit den anderen, z.B. der Gauss'schen und kommt zu dem Schluss, dass die Trapezformel nicht immer die Beste sein muss. (Siehe noch weiter.)

Für $p > 0$ hat L. N. G. FILON [4] eine numerische Methode angedeutet, die heute in der numerischen Rechenpraxis oft benützt wird. Der Hauptgedanke der Filon'schen Methode besteht in der Überwindung der Schwierigkeiten die damit zusammenhängen, dass der Integrand in (1) einen sehr oscilierenden Charakter haben kann (für grössere p) trotzdem die Funktion f eine glatte Funktion ist. Filon approximiert, ähnlich wie in der Simpson Regel, die Funktion $f(x)$ durch Teile einer quadratischen Parabel (also nicht den ganzen Integrand) und erhält eine Quadraturformel, deren Koeffizienten von dem Wert p, j abhängen.

Mit der Berechnung von (1) hat sich auch BABUŠKA in [1] und [5] beschäftigt. Einige Fragen im Zusammenhang mit dem Verkleinerungskoeffizienten sind in [6] angeführt. Ausführlicher ist diese Problematik in [7] und [8] analysiert. Einige Fragen, welche mit dieser Problematik zusammen hängen sind auch in [9] zu finden.

2. FORMULIERUNG DES PROBLEMS

Trotzdem es sich in der numerischen Praxis grösstenteils um die Berechnung eines konkreten Integrals (1) handelt, und wir doch über die numerische Berechnung als Methode sprechen, so verstehen wir darunter die Approximation des Funktionals (1) durch das Funktional (2). In diesem Sinne wollen wir die Methode (2) als geeignet oder nicht geeignet je nach der Grösse des Fehlerfunktionals $J_p(f) - I(f)$[1]) betrachten.

Es sei ein Banach-Raum B der 2π-periodischen Funktionen derart gegeben, dass J_p und I auf B stetige lineare Funktionale sind.

Das Funktional $I(p, j, a_{1,0}^{(j)}, \ldots, a_{j,0}^{(j)})$ nennen wir eine *optimale Approximation von* J_p in B^*, wenn für jedes $a_1, \ldots, a_j$ gilt

$$\|J_p - I(p, j, a_{1,0}^{(j)}, \ldots, a_{j,0}^{(j)})\|_{B^*} \leqq \|J_p - I(p, j, a_1, \ldots, a_j)\|_{B^*} \tag{3}$$

(die Norm ist als Norm der Funktionale genommen).

Wir bezeichnen noch

$$\chi^{(B)}(p, j) = \inf_{a^{(j)}_i, i=1,\ldots,j} \|J_p - I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\|_{B^*}\,. \tag{4}$$

Dieser Ausdruck (4) drückt offensichtlich die maximale Genauigkeit aus, welche in der Klasse der Formeln von der Form (2) erreichbar ist.

---

[1]) Wir schreiben anstatt $I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})(f)$ einfach $I(f)$ oder I falls es zu keinem Missverständnis kommen kann.

Es ist daher offenbar zu sehen, dass der Begriff der Optimalität relativ im Zusammenhang mit der Wahl des Raumes B ist. Von diesem Standpunkt aus, kann keine Methode universal optimal sein. Z.B. Davis führt in [3] (für $p = 0$) Fehlerabschätzungen an, aus denen hervorgeht, dass z.B. die Gauss'sche Quadratur in manchen Fällen (Wahl des Raumes B) besser ist, als die allgemein anerkannte Trapezformel, von der wir gesprochen haben.

Wir haben schon angeführt, dass wir in der numerischen Rechenpraxis immer nur einen konkreten Fall des Integrals (1) berechnen. Bei der Wahl der konkreten Methode taucht dann die praktisch sehr bedeutungsvolle Frage auf, in welchen Raum B wir unsere konkrete Funktion einbetten sollen. Wir können sie natürlich in verschiedene B einbetten, davon hängt dann aber auch die Angebrachtheit der jeweiligen Methode ab.

Im Zusammenhang hiermit ist die Problematik der Verringerung des Risikos eine Funktion in einen ungeeigneten Raum einzubetten sehr aktuell.

Für die Probleme der mathematischen Analysis ist die Existenz eines bestimmten derartigen Prameters j, $j = 1, 2, \ldots$ charakteristisch, dass wir das gewünschte Ergebnis für grosse j erhalten (d.i. für $j \to \infty$). Es ist daher natürlich, dass ähnlich wie in einer Reihen anderer Probleme, der assymptotische Gesichtspunkt sehr wichting sein kann.

Es sei eine Funktion $\beta(j)$, $j = 1, 2, \ldots$ derart gegeben, dass die Funktion $\beta(j)\, j$ nur ganzzahlige nichtnegative Werte annimmt. Es sei ein Banach Raum B und die Folge der Koeffizienten

$$a_l^{(j)}\,; \quad l = 1, 2, \ldots j\,; \quad j = 1, 2, \ldots$$

gegeben.

Die Formel $I(\beta(j)\, j, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})$ nennen wir *assymptotisch optimal* (in Bezug auf $\beta(j)$) wenn

$$(5) \qquad \|J_{\beta(j)j} - I(\beta(j)\, j, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\|_{B*} = \chi^{(B)}(\beta(j)\, j, j)\,(1 + o(1)) \quad \text{für} \quad j \to \infty$$

resp. *ordnungsmässig optimal*, wenn

$$(5) \qquad \|J_{\beta(j)j} - I(\beta(j)\, j, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\|_{B*} = \chi^{B}(\beta(j)\, j, j)\; O(1) \quad \text{für} \quad j \to \infty$$

gilt.

Vom Standpunkt des schon gesagten, kommt nun die Frage auf, ob wir es erreichen können, dass eine Folge $a_l^{(j)}$ *gleichzeitig* assymptotischen (order grössenordnungsmässig) optimal für eine womöglich breite Klasse von Räumen B ist.

Wir wollen ein solche Klasse von Räumen definieren. Wir bezeichnen $\mathscr{H}$ den Raum aller reeller Folgen $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$ welche folgende Eigenschaften erfüllen:

1. $$\gamma_j \geqq 0\,, \quad \gamma_0 > 0\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$
2. Es existiert j_0 derart, dass $\gamma_{j_0} \neq 0$ (j_0 hängt allgemein von γ ab).
3. $$\lim_{j \to \infty} \gamma_j^{1/j} = 0\,.$$

Jeder Folge γ ordnen wir eine Funktion

$$\psi_\gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j z^j$$

zu.

Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen über $\mathscr{H}$ ist offensichtlich, dass

1. $\psi_\gamma(x)$ für $x \geqq 0$ eine wachsende und positive Funktion ist,
2. ein $D > 0$ derart existiert, dass für $x \geqq 0$ ist

$$\psi_\gamma(x) \geqq (1 + x)\, D\,. \tag{6}$$

Es sei $\gamma \in \mathscr{H}$. Wir bezeichnen H_γ den Hilbertraum aller stetigen 2π-priodischen komplexen Funktionen $g(x)$ mit dem Skalarprodukt $(g(x) \in H_\gamma,\ h(x) \in H_\gamma)$

$$(g, h)_\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \int_0^{2\pi} (g^{(j)}(x)\, \overline{h^{(j)}}(x))\, \mathrm{d}x\,.^{2)} \tag{7}$$

Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen über $\mathscr{H}$ können wir nun voraussetzen, dass alle Funktionen $g(x) \in H_\gamma$, $\gamma \in \mathscr{H}$ total stetig sind. Die Räume H_γ für $\gamma \in \mathscr{H}$ bilden eine genung grosse Klasse von Banachräumen, über die wir gesprochen haben.

3. ÜBER DIE OPTIMALE FORMEL

In diesem Abschitt beweisen wir folgende Behauptung:

Satz 1. *Es sei ein natürliches p und j, $\gamma \in \mathscr{H}$ gegeben. Wenn wir dann*

$$a_l^{(j)} = \frac{1}{j}\, C(p, j, \gamma)\, e^{ip(2\pi/j)l}\,, \quad l = 1, 2, \ldots, j \tag{8}$$

setzen, wobei

$$(C(p, j, \gamma))^{-1} = \psi_\gamma(p^2) \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (\psi_\gamma((tj - p)^2))^{-1} \tag{9}$$

gilt, ist das Funktional

$$I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})$$

eine optimale Approximation des Funktionals J_p in H_γ, wobei die optimale Approximation eindeutig bestimmt ist.

---

[2]) Offensichtlich solange $\gamma_j = 0$, so müssen wir die Existenz der j-ten Ableitung nicht voraussetzen. Die Ableitungen sind im verallgemeinerten Sinne zu verstehen. (D.h. schwache.)

Weiter gilt dann

(10) $$\chi^{(H_\gamma)}(p, j) = (\psi_\gamma(p^2))^{-\frac{1}{2}}\, Q(p, j, \gamma)\,,$$

wobei

(11) $$Q(p, j, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,(1 - C(p, j, \gamma))^{\frac{1}{2}}\,.$$

Beweis. 1. Wir zeigen zuerst, dass

$$J_p(g) = (2\pi)^{-1}\,(g, (\psi_\gamma(p^2))^{-1}\, e^{-ipx})_\gamma$$

ist. Wenn $g(x) \in H_\gamma$ ist, dann ist $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ wobei

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2\, \psi_\gamma(k^2) = \|g\|_\gamma^2 < \infty\,.$$

Weiter ist

$$(g, (\psi_\gamma(p^2))^{-1}\, e^{-ipx})_\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (ik)^j\, e^{ikx}\Big)\, (\psi_\gamma(p^2))^{-1}\, (ip)^j\, e^{ipx}\, \mathrm{d}x = 2\pi c_{-p}\,.$$

Anderseits ist auch offensichtlich $J_p(g) = c_{-p}$.

2. Genauso einfach lässt sich zeigen, dass gilt

$$I(p, j, a_1, \ldots, a_j)\,(g) = (2\pi)^{-1}\, C(p, j, \gamma)\, \Big(g, \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (\psi_\gamma((tj - p)^2))^{-1}\, e^{i(tj-p)}\Big)_\gamma\,.$$

3. Weil H_γ ein Hilbertraum ist, so ist die Projektion auf den entsprechenden Teilraum eine optimale Approximation. Es genügt daher festzustallen, ob die Funktion

$$\varrho(x) = (2\pi)^{-1}\, \Big[(\psi_\gamma(p^2))^{-1}\, e^{-ipx} - C(p, j, \gamma) \sum_{t=-\infty}^{+\infty} (\psi_\gamma((tj - p)^2))^{-1}\, e^{i(tj-p)x}\Big]$$

für $x_l = (2\pi/j)\, l$, $l = 1, \ldots, j$ gleich Null wird.

Es ist

$$\varrho\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) = (2\pi\, \psi_\gamma(p^2))^{-1}\, e^{-ip \cdot 2\pi l/j} (1 - \psi_\gamma(p^2)\, C(p, j, \gamma) \sum_{t=-\infty}^{\infty} (\psi_\gamma((tj - p)^2))^{-1})\,.$$

Damit ist der erste Teil unserer Behauptung bewiesen.

4. Der zweite Teil ist wiederum einfach. Offensichtlich ist

$$\chi^{(H_\gamma)}(p, \gamma) = \|\varrho(x)\|_\gamma\,.$$

Durch einfaches Ausrechnen erhalten wir sofort unsere Behauptung.

Wir wollen die Ergebnisse unserer Behauptung näher betrachten. Die optimale Approximation ist auf Grund von Satz 1 die gewöhnliche Trapezformal multipliziert mit dem Verringerungskoeffizienten $C(p, j, \gamma)$. Wir sagen Verringerungskoeffizient, denn offensichtlich ist $C(p, j, \gamma) < 1$.

Der Ausdruck $C(p, j, \gamma)$ (siehe (9)) und der Fehler $\chi^{(H_\gamma)}(p, j)$ hängen offenbar nicht davon ab, ob wir γ mit einer multiplikativen positiven Konstante multiplizieren. Wir können z.B. voraussetzen $\gamma_0 = 1$.

4. ÜBER DIE ASSYMPTOTISCH OPTIMALE FORMEL

Wir können ganz analog wie in Abschnitt 3 folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Es seien natürliche p und j und $\gamma \in \mathscr{H}$ und $B \geqq 0$ gegeben und wir setzen*

$$a_l^{(j)} = \frac{B}{j} e^{ip \cdot 2\pi l/j}, \quad l = 1, 2, \ldots, j .$$

Dann ist

$$(12) \quad \|J_p - I(p, j, a_1^{(j)}, \ldots, a_j^{(j)})\|_\gamma^2 = (2\pi\, \psi_\gamma(p^2))^{-1} \left(1 - B + B\left(-1 + \frac{B}{C(p, j, \gamma)}\right)\right).$$

Wir wählen nun $B = 1$, d.h. wir setzen $a_{l,u}^{(j)} = e^{ip \cdot 2\pi l/j}/j$. Die so entstandene Formel nennen wir Universalformel. Dann ist $(p = \beta(j)\, j)$ (vgl. (10), (11), (12))

$$(13) \quad \frac{\|J_{\beta(j)j} - I(\beta(j)\, j, j, a_{1,u}^{(j)}, \ldots, a_{j,u}^{(j)})\|_\gamma^2}{(\chi^{(H_\gamma)}(\beta(j)\, j, j))^2} = \frac{1}{C(\beta(j)\, j, j, \gamma)} =$$

$$= 1 + \psi_\gamma((\beta(j)\, j)^2) \left(\sum_{t=1}^{\infty} (\psi_\gamma((j(t + \beta(j))^2))^{-1} + \sum_{t=1}^{\infty} (\psi_\gamma((j(t - \beta(j))^2))^{-1}\right).$$

Aus (13) folgt sofort Satz 3, 4 und 5.

Satz 3. *Es sei $\beta(j) = p/j$. p sei ganzzahling und nichtnegativ. Dann ist die Universalformel assymptotisch optimal für jedes $\gamma \in \mathscr{H}$.*

Der Beweis folgt sofort aus (13), (9) und (6).

Satz 4. *Es sei $0 \leqq \beta(j) \leqq \alpha < \frac{1}{2}$. Dann ist die Universalformel grössenordnungsmässig optimal für jedes $\gamma \in \mathscr{H}$.*

Beweis. 1. Wir beweisen zuerst, dass gilt

$$(14) \quad \sup_{j=1,2,\ldots} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\psi_\gamma(\alpha^2 j^2)}{\psi_\gamma(j^2(t - \alpha)^2)} \leqq D < \infty .$$

Wir sehen leicht ein, dass unter unseren Voraussetzungen ist

$$\frac{\psi_\gamma(\alpha^2 j^2)}{\psi_\gamma(j^2(t-\alpha)^2)} \leqq \frac{1}{1 + \psi'(\alpha^2 j^2)\,\alpha^2 j^2(t^2/\alpha^2 - 2t/\alpha)/\psi_\gamma(\alpha^2 j^2)} \leqq \frac{c}{\alpha^2 + t^2}\,.$$

Daraus folgt jedoch (14).

2. Unter unseren Voraussetzungen gilt jedoch auch

$$(15) \qquad \frac{\psi_\gamma(\beta^2(j)\,j^2)}{\psi_\gamma(j^2(t+\beta(j))^2)} \leqq \frac{\psi_\gamma(\beta^2(j)\,j^2)}{\psi_\gamma(j^2(t-\beta(j))^2)}$$

und

$$(16) \qquad \frac{\psi_\gamma(\beta^2(j)\,j^2)}{\psi_\gamma(j^2(t-\beta(j))^2)} \leqq \frac{\psi_\gamma(\alpha^2 j^2)}{\psi_\gamma(j^2(t-\alpha)^2)}\,.$$

Aus (13), (14), (15) und (16) folgt jedoch sofort unsere Behauptung.

Satz 5. *Es sei $0 \leqq \beta(j) \leqq \alpha < \frac{1}{2}$. Es sei $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$ ein Teilraum des Raumes $\mathscr{H}$ aller solcher Folgen $\gamma \in \mathscr{H}$ dass $\psi_\gamma(x)$ kein Polynom ist. Dann ist die Universalformel assymptotisch optimal für jedes $\gamma \in \mathscr{H}_1$.*

Beweis. Es gunügt offensichtlich zu beweisen, dass

$$(17) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x\,\psi'_\gamma(x)}{\psi_\gamma(x)} = \infty\,.$$

Dann ist der Beweis gleich dem von Satz 4.

Wir wählen ein natürliches N und beweisen, dass

$$(18) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x\,\psi'_\gamma(x)}{\psi_\gamma(x)} \geqq N\,.$$

Es gilt

$$(19) \qquad \frac{x\,\psi'_\gamma(x)}{\psi_\gamma(x)} \geqq 1 + N - \frac{\gamma_0}{\psi_\gamma(x)} - \frac{(N-1)\,\gamma_2 x^2 + (N-2)\,\gamma_3 x^3 + \ldots + \gamma_N x^N}{\psi_\gamma(x)}\,.$$

Weil jedoch nach den Voraussetzungen $\psi_\gamma(x)$ kein Polynom ist, so konvergieren die letzten zwei Glieder aus (19) zu Null. Damit ist aber (18) und daher auch Satz 5 bewiesen.

Was ist die Bedeutung von Satz 3, 4 und 5. Die Bedeutung der Sätze besteht darin, dass für eine grosse Klasse von Räumen H_γ die Trapezformel universal optimal sein wird. Die Bedingung $\alpha < \frac{1}{2}$ ist offensichtlich eine notwendige Bedingung für die assymptotische Optimalität, denn für den Fall, dass wir $\beta(j) = \frac{1}{2}$ haben, wird der erste Summand in der zweiten Summe in (13) nicht zu Null konvergieren und wir erhalten keine assymptotisch optimale Formel. Das bedeutet praktisch, dass wir immer $j > 2p$ benutzen müssen.

5. ÜBER DIE EINDEUTIGKEIT DER UNIVERSALFORMEL

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns nur mit dem wichtigsten Fall, d.i. für $\beta(j) = p/j$. Aus dem schon gesagten folgt, dass die Universalformel für kein $\gamma \in \mathscr{H}$ optimal ist. Wir zeigen jedoch, dass kein $\gamma_0 \in \mathscr{H}$ derart existiert, damit die optimale Formel in H_{γ_0} assymptotisch optimal für alle H_γ wird.

Es sei also $\gamma_0 \in \mathscr{H}$ gegeben und $I(p, j, a_{1,0}^{(j)}, \ldots, a_{j,0}^{(j)})$ sei die optimale Approximation in H_{γ_0}.

Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 6. *Es existiert ein $\gamma \in \mathscr{H}$ so, dass die optimale Formel in H_{γ_0} nicht ordnungsmässig optimal in H_γ ist.*

Beweis. Nach Satz 1 und 2 ist

$$\xi(j) = \frac{\|J_p - I(p, j, a_{1,0}^{(j)}, \ldots, a_{j,0}^{(j)})\|_\gamma^2}{(\chi^{(H_\gamma)}(p, j))^2} = \frac{1 - C(p, j, \gamma_0)}{1 - C(p, j, \gamma)} +$$

$$+ \frac{C(p, j, \gamma_0)}{1 - C(p, j, \gamma)} \left(\frac{C(p, j, \gamma_0) - C(p, j, \gamma)}{C(p, j, \gamma)} \right) \geqq \frac{1}{1 - C(p, j, \gamma)} (1 - C(p, j, \gamma_0))^2 =$$

$$= \frac{C^2(p, j, \gamma_0)}{C(p, j, \gamma)} \frac{[\sum_{t=1}^{\infty} \psi_{\gamma_0}(p^2) [(\psi_{\gamma_0}((tj - p)^2))^{-1} + (\psi_{\gamma_0}((tj + p)^2))^{-1}]]^2}{\sum_{t=1}^{\infty} \psi_\gamma(p^2) [(\psi_\gamma((tj - p)^2))^{-1} + (\psi_\gamma((tj + p)^2))^{-1})} \geqq$$

$$\geqq \frac{C^2(p, j, \gamma_0)}{C(p, j, \gamma)} \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \psi_{\gamma_0}^2(p^2) [(\psi_{\gamma_0}^2((tj - p)^2))^{-1} + (\psi_{\gamma_0}^2((tj + p)^2))^{-1}]}{\sum_{t=1}^{\infty} \psi_\gamma(p^2) [(\psi_\gamma((tj - p)^2)^{-1} + (\psi_\gamma((tj + p)^2))^{-1}]} .$$

Wir wählen nun ein $\gamma \in \mathscr{H}$ so, dass $\psi_\gamma(x) = \psi_{\gamma_0}^3(x)$. Ein solches $\gamma \in \mathscr{H}$ existiert offensichtlich.

Wir haben nun (für $j > p$ und $t = 1, 2, \ldots$ mit Rücksicht darauf, dass $\psi(x)$ ansteigend ist)

$$\frac{\psi_\gamma(p^2)}{\psi_\gamma((tj + p)^2)} = \frac{\psi_{\gamma_0}^3(p^2)}{\psi_{\gamma_0}^3((tj + p)^2)} \leqq \frac{\psi_{\gamma_0}^2(p^2)\, \psi_{\gamma_0}(p^2)}{\psi_{\gamma_0}^2((tj + p)^2)\, \psi_{\gamma_0}((j - p)^2)} .$$

Ähnlich auch

$$\frac{\psi_\gamma(p^2)}{\psi_\gamma((tj-p)^2)} \leqq \frac{\psi_{\gamma 0}^2(p^2)\,\psi_{\gamma 0}(p^2)}{\psi_{\gamma 0}^2((tj-p)^2)\,\psi_{\gamma 0}((j-p)^2)}\,,$$

sodass

$$\xi(j) \geqq C^2(p, j, \gamma_0)\,\psi_{\gamma 0}((j-p)^2)/C(p, j, \gamma)\,\psi_{\gamma 0}(p^2) \geqq D_0(1 + (j-p)^2)\,.$$

Hiermit ist Satz 6 bewiesen.

6. SCHLUSS

Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, dass es praktisch nützlich und vorteilhaft ist eine solche Formel zu benützen, welche wir universal genannt haben. Diese Formel hat die Eigenschaft, dass sie assymptotisch optimal in einer grossen Klasse von Teilräumen ist. Es ist jedoch notwendig zu bemerken, dass die erzielten Ergebnisse eng mit dem Umstand zusammen hängen, dass die Norm invariant zur Verschiebung ist. Es existieren natürlich Räume in denen die Universalformel nichteinmal assymptotisch optimal ist. Dies ändert jedoch nichts am praktischen Vorteil dieser Formel, deren Vorteil entgegen der optimalen Formel darin besteht, dass allgemein die Benutzung der optimalen Formel nur um sehr wenig besser sein kann, aber um sehr viel schlechter.

Literaturverzeichnis

[1] *И. Бабушка, С. Л. Соболев:* Оптимизация численных методов. Aplikace matematiky 10, 96–128, (1965).

[2] *G. Kowalewski:* Interpolation und Genäherte Quadratur. Leipzig 1932.

[3] *P. J. Davis:* On the Numerical Integration of Periodic Analytic Functions. On numerical Approximation. Proceedings of a Symposium Conducted by the Nath. Res. Center US Army at the University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958. Madison 1959 (Edited by R. E. Langer).

[4] *L. N. G. Filon:* On a quadrature formula for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. Edinburg 49, 38–47 (1928).

[5] *I. Babuška, M. Práger, E. Vitásek:* Numerical Processes in Differential Equations. J. Wiley 1966.

[6] *W. Dällenbach:* Verschärftes rechnerisches Verfahren der harmonischen Analyse. Arch. Elektrotechn. 10 (1922).

[7] *W. Quade, L. Collatz:* Zur Inerpolationstheorie der reellen periodischen Funktionen. S–B Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. 30 (1938).

[8] *F. L. Bauer, H. J. Stetter:* Zur numerischen Fourier Transformation. Numerische Mathematik 1, 208–220 (1959).

[9] *H. Brakhage:* Bemerkung zur optimalen Approximation von linearen Funktionalen periodischer Funktionen. Tagung der Deutschen Mathematischen Vereinigung in Halle, 17–24. Sept. 1961.

[10] *I. Babuška:* Über optimale Formeln zur numerischen Berechnung linearer Funktionale. Aplikace matematiky 10, 441–443 (1965).

Výtah

O OPTIMÁLNÍM VÝPOČTU FOURIEROVÝCH KOEFICIENTŮ

IVO BABUŠKA

V práci se studuje otázka, zda existuje formule $I(f)$ numerického výpočtu integrálu

$$(1) \qquad J_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ipx}\, dx\,, \quad p \geqq 0$$

ve tvaru

$$(2) \qquad I(f) = \sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) b_l^{(j)}\,,$$

která má tu vlastnost, že pro širokou třídu Hilbertových prostorů H periodických funkcí platí

$$(3) \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{\sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_p(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) b_l^{(j)} \right|}{\inf\limits_{a_l^{(j)}} \sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_p(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) a_l^{(j)} \right|} = 1\,.$$

V práci se ukazuje, že položíme-li

$$(4) \qquad b_l^{(j)} = \frac{1}{j}\, e^{ip(2\pi/j)l}\,,$$

dostaneme formuli uvedených vlastností, přičemž požadavek (3) určuje (4) v jistém smyslu jednoznačně.

Dále se ukazuje, že máme-li funkci $\beta(j)$, $j = 1, 2, \ldots$ takovou, že $\beta(j)\, j$ je přirozené, a je-li $0 \leqq \beta(j) \leqq \alpha < \frac{1}{2}$, potom výraz

$$(5) \qquad \sup_{j=1,2,\ldots} \frac{\sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_{\beta(j)j}(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) e^{i2\pi\beta(j)l} \right|}{\inf\limits_{a_l^{(j)}} \sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_{\beta(j)j}(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) a_l^{(j)} \right|}$$

je pro širokou třídu Hilbertových prostorů periodických funkcí omezený. Jestliže naopak však $\beta(j)\, j > \alpha > \frac{1}{2}$, pak výraz (5) je omezený pouze pro podstatně užší třídu prostorů H.

Prakticky z toho vyplývá, že pro výpočet J_p ve třídě periodických funkcí je nejlépe používat lichoběžníkové pravidlo a volit $j > 2p$.

Резюме

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška)

В работе исследуется вопрос, существует-ли формула $I(f)$ для численного вычисления интеграла

$$J_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ipx}\, \mathrm{d}x\,, \quad p \geqq 0 \tag{1}$$

в виде

$$I(f) = \sum_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) b_l^{(j)}\,, \tag{2}$$

обладающая тем свойством, что для широкого класса гильбертовых пространств H периодических функций имеет место соотношение

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_p(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) b_l^{(j)}\right|}{\inf\limits_{a_l^{(j)}} \sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_p(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) a_l^{(j)}\right|} = 1\,. \tag{3}$$

В работе показано, что если положить

$$b_l^{(j)} = \frac{1}{j}\, e^{ip(2\pi/j)l}\,, \tag{4}$$

то получим формулу, обладающую приведенными свойствами, причем требование (3) определяет (4) в определенном смысле однозначно.

Далее доказано, что когда имеем функцию $\beta(j)$, $j = 1, 2, \ldots$ такую, что $\beta(j)\, j$ натуральное и если $0 \leqq \beta(j) \leqq \alpha < \frac{1}{2}$, то выражение

$$\sup_{j=1,2,\ldots} \frac{\sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_{\beta(j)j}(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) e^{i2\pi\beta(j)l}\right|}{\inf\limits_{a_l^{(j)}} \sup\limits_{\|f\|_H \leqq 1} \left| J_{\beta(j)j}(f) - \sum\limits_{l=1}^{j} f\left(\frac{2\pi}{j}\, l\right) a_l^{(j)}\right|} \tag{5}$$

является для широкого класса гильбертовых пространств периодических функций ограниченным. Если, наооборот, $\beta(j)\, j > \alpha > \frac{1}{2}$, то выражение (5) ограничено только для гораздо более узкого класса пространств H.

Практически из этого вытекает, что для вычисления J_p в классе периодических функций наиболее выгодно пользоваться методом трапеций, выбирая $j > 2p$.

Adresse des Autoren: Ing. dr. *Ivo Babuška* Dr.Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Opletalova 45.