Miloš Novotný

Vyjádření transformace z Carsonovou-Laplaceovou transformací

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 6, 483–488

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102989`

VYJÁDŘENÍ TRANSFORMACE Z CARSONOVOU-LAPLACEOVOU TRANSFORMACÍ

MILOŠ NOVOTNÝ

(Došlo dne 15. července 1964.)

V této práci jsou odvozeny tři věty o vyjádření obrazu při všech třech druzích tzv. transformace Z obrazem jistých po úsecích konstantních funkcí při transformaci Carsonově-Laplaceově. To umožňuje používat k výpočtu obrazů při transformaci Z slovníků pro transformaci Carsonovu-Laplaceovu.

Označme $\boldsymbol{P}$ množinu všech komplexních posloupností $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ takových, že $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < +\infty$. Je-li $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}$, označme ještě $r = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$, takže $0 < r \leqq +\infty$.

Podle Cauchyho-Hadamardovy věty řada $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ absolutně konverguje pro $|z| < r$ a diverguje pro $|z| > r$. Nechť $F_1(z)$ je součet této řady v celém jejím oboru konvergence. Potom funkci F_1 nazýváme obrazem posloupnosti $\boldsymbol{a}$ a posloupnost $\boldsymbol{a}$ vzorem funkce F_1 při transformaci Z_1 a píšeme $Z_1(\boldsymbol{a}) = F_1$.

Podle Cauchyho-Hadamardovy věty řada $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k}$ absolutně konverguje pro $|z| < r^{-1}$ a diverguje pro $|z| > r^{-1}$. Nechť $F_2(z)$ je součet této řady v celém jejím oboru konvergence. Potom funkci F_2 nazýváme obrazem posloupnosti $\boldsymbol{a}$ a posloupnost $\boldsymbol{a}$ vzorem funkce F_2 při transformaci Z_2 a píšeme $Z_2(\boldsymbol{a}) = F_2$.

Je-li konečně M nějaká množina komplexních čísel, označíme M^{-1} množinu převrácených hodnot těchto čísel. Potom zřejmě platí tato

Věta o vztahu transformací Z_1 a Z_2: *Nechť $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}$, $Z_i(\boldsymbol{a}) = F_i$ a M_i je definiční obor funkce F_i $(i = 1, 2)$. Potom $M_2 = M_1^{-1}$ a $F_2(z) = F_1(1/z)$ pro $z \in M_1^{-1}$.*

Označme $\boldsymbol{P}_3$ množinu všech dvoustranných komplexních posloupností $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ takových, že $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|} \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$. Je-li $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}_3$, leží obě tyto horní limity v intervalu $\langle 0, +\infty)$; označme ještě $r_H = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|})^{-1}$ a $r_N = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$, takže $r_H^{-1} < r_N$.

Podle Cauchyho-Hamadardovy věty řada $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ absolutně konverguje pro $r_H^{-1} < |z| < r_N$ a diverguje pro $|z| < r_H^{-1}$ a pro $|z| > r_N$. Nechť $F_3(z)$ je součet této řady v celém jejím oboru konvergence. Potom funkci F_3 nazýváme obrazem posloupnosti $\mathbf{a}$ a posloupnost $\mathbf{a}$ vzorem funkce F_3 při transformaci U_3 a píšeme $Z_3(\mathbf{a}) = F_3$.

Zřejmě platí tato

Věta o vztahu transformací Z_1, Z_2 a Z_3: *Nechť* $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \mathbf{P}_3$. *Potom* $\mathbf{a}' = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \mathbf{P}$ *a* $\mathbf{a}'' = \{0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots\} \in \mathbf{P}$. *Označíme-li ještě* $Z_1(\mathbf{a}') = F_1, Z_2(\mathbf{a}'') = F_2$ *a* $Z_3(\mathbf{a}) = F_3$ *a* M_i *definiční obor funkce* F_i $(i = 1, 2, 3)$, *platí dále* $M_3 = M_1 \cap M_2$ *a* $F_3(z) = F_1(z) + F_2(z)$ *pro* $z \in M_3$.

Označme $E(t)$ celou část čísla t, tj. celé číslo takové, že $E(t) \leqq t < E(t) + 1$. Dále nechť $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \mathbf{P}$ a $r = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$, takže $0 < r \leqq +\infty$. Jestliže $0 < r < +\infty$, zvolme $\varrho = r$; jestliže $r = +\infty$, zvolme za ϱ libovolně velké konečné kladné číslo. Konečně nechť $0 \leqq t \leqq +\infty$. Potom definujeme funkci s předpisem

$$s(\mathbf{a}, \varrho, t) = \sum_{k=0}^{E(t)} a_k \varrho^k . \tag{1}$$

Konečně integrálem v mezích od $a \in (-\infty, +\infty)$ do $+\infty$ budeme všude v dalším myslet Riemannův integrál, nevlastní vůči horní mezi. O těchto integrálech platí tato známá věta (viz [1], odst. 77):

Věta o nevlastní integraci funkční řady. *Předpokládejme*: 1) *Platí* $\int_a^T \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^T f_k(t)\, dt$ *pro všechna* $T \in \langle a, +\infty)$, *kde všechny integrály jsou vlastní.* 2) *Konverguje integrál* $\int_a^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(t)|\, dt$ *nebo řada* $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f_k(t)|\, dt$. *Potom*

$$\int_a^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} f_k(t)\, dt .$$

Po tomto úvodu už snadno dokážeme tyto věty o vyjádření obrazu při transformaci Z_1, Z_2 a Z_3 obrazem jisté funkce po úsecích konstantní při transformaci Carsonově-Laplaceově:

Věta 1. *Předpokládejme*: 1) $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \mathbf{P}$. 2) $r = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. 3) *Je-li* $0 < r < +\infty$, *zvolme* $\varrho = r$; *je-li* $r = +\infty$, *zvolme za* ϱ *libovolně velké konečné kladné číslo.* 4) $Z_1(\mathbf{a}) = F_1$. 5) $\log w$ *je hlavní hodnota logaritmu* w. *Potom*

$$F_1(z) = \left[p \int_0^{+\infty} s(\mathbf{a}, \varrho, t)\, e^{-pt}\, dt \right]_{p=\log(\varrho/z)} \quad \textit{pro} \quad 0 < |z| < \varrho . \tag{2}$$

Důkaz: Podle předpokladů

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad \text{pro} \quad |z| < \varrho . \tag{3}$$

Omezme se dokonce na $0 < |z| < \varrho$. Potom zobrazení $z = \varrho e^{-p}$ čili $p = \log(\varrho/z)$ převádí mezikruží $0 < |z| < \varrho$ na polorovinu $0 < \operatorname{Re} p < +\infty$, takže

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varrho^k e^{-kp} \quad \text{pro} \quad 0 < \operatorname{Re} p < +\infty\,. \tag{4}$$

Jestliže $u(t-k) = 0$ resp. 1 pro $0 \leqq t < k$ resp. $k \leqq t < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, máme

$$e^{-kp} = p \int_k^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = p \int_0^{+\infty} u(t-k)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

$$(k = 0, 1, \ldots,\ 0 < \operatorname{Re} p < +\infty)\,,$$

což dosazeno do (4) dává

$$F_1(z) = p \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} a_k \varrho^k\, u(t-k)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad 0 < |z| < \varrho \tag{6}$$

čili pro

$$0 < \operatorname{Re} p < +\infty\,.$$

V každém intervalu $\langle 0, T\rangle$, kde $0 \leqq T < +\infty$, mají funkce $a_k \varrho^k\, u(t-k)\, e^{-pt}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ vlastní Riemannův integrál a řada $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varrho^k\, u(t-k)\, \mathrm{e}^{-pt}$ sestává jen z konečného počtu nenulových členů, takže

$$\int_0^T \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varrho^k\, u(t-k)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T a_k \varrho^k\, u(t-k)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$\text{pro všechna } T \in \langle 0, +\infty)\,.$$

Protože $0 < |z| < \varrho$, bude při označení $x + iy = p = \log(\varrho/z) = \log(\varrho/|z|) + i \arg(\varrho/z)$ čili $x = \log(\varrho/|z|)$ platit $0 < x < +\infty$, takže

$$\int_0^{+\infty} |a_k \varrho^k\, u(t-k)\, e^{-pt}|\,\mathrm{d}t = |a_k|\, \varrho^k \int_0^{+\infty} u(t-k)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t = |a_k|\, \varrho^k \int_k^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t =$$
$$= |a_k|\, \varrho^k \frac{1}{x} e^{-k} = \frac{1}{x} |a_k \varrho^k e^{-kp}| = \frac{1}{x} |a_k z^k| \quad (k = 0, 1, \ldots)\,,$$

a tedy podle (3) konverguje řada $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |a_k \varrho^k\, u(t-k)\, e^{-pt}|\,\mathrm{d}t$. Z toho a ze (7) plyne podle věty o nevlastní integraci funkční řady, že v (6) lze zaměnit sumu a integrál:

$$F_1(z) = p \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varrho^k\, u(t-k)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t = p \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{E(t)} a_k \varrho^k e^{-pt}\,\mathrm{d}t =$$
$$= p \int_0^{+\infty} s(\boldsymbol{a}, \varrho, t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad p = \log(\varrho/z) \quad \text{a} \quad 0 < |z| < \varrho\,.$$

Tím je věta dokázána.

Věta 2. *Předpokládejme*: 1) $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}$. 2) $r = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. 3) *Je-li* $0 < r < +\infty$, *zvolme* $\varrho = r$; *je-li* $r = +\infty$, *zvolme za* ϱ *libovolně velké konečné kladné číslo.* 4) $Z_2(\boldsymbol{a}) = F_2$. 5) $\log w$ *je hlavní hodnota logaritmu* w. *Potom*

$$(8) \qquad F_2(z) = \left[p \int_0^{+\infty} s(\boldsymbol{a}, \varrho, t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\right]_{p=\log(\varrho z)} \quad \textit{pro} \quad \varrho^{-1} < |z| < +\infty\,.$$

Důkaz plyne z věty 1 a z věty o vztahu transformací Z_1 a Z_2.

Věta 3. *Předpokládejme*: 1) $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{a}' = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$, $\boldsymbol{a}'' = \{0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots\}$. 2) $r_H = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|})^{-1}$, $r_N = (\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. 3) *Je-li* $0 < r_H < +\infty$ *resp.* $0 < r_N < +\infty$, *zvolme* $\varrho_H = r_H$ *resp* $\varrho_N = r_N$; *je-li* $r_H = +\infty$ *resp.* $r_N = +\infty$ *zvolme za* ϱ_H *resp.* ϱ_N *libovolně velké konečné kladné číslo.* 4) $Z_3(\boldsymbol{a}) = F_3$. *Potom*

$$(9) \qquad F_3(z) = \left[p \int_0^{+\infty} s(\boldsymbol{a}', \varrho_N, t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\right]_{p=\log(\varrho_N/z)} +$$

$$+ \left[p \int_0^{+\infty} s(\boldsymbol{a}'', \varrho_H, t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t\right]_{p=\log(\varrho_N z)} \quad \text{pro} \quad \varrho_H^{-1} < |z| < \varrho_N\,.$$

Důkaz plyne z vět 1 a 2 a z obou vět o vztahu transformací Z_1, Z_2 a Z_3.

Literatura

[1] *E. C. Titchmarsh:* The theory of functions, Oxford 1932.

Резюме

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ Z ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАРСОНА-ЛАПЛАСА

МИЛОШ НОВОТНЫ (Miloš Novotný)

Обозначим символом $\boldsymbol{P}$ множество всех комплексных последовательностей $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ таких, что $r^{-1} = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > +\infty$, так что ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ имеет радиус сходимости r. Пусть $F_1(z)$ – сумма этого ряда во всей его области сходимости. Тогда мы пишем $Z_1(\boldsymbol{a}) = F_1$.

При тех же условиях ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k}$ сходится абсолютно для $|z| > r^{-1}$ и расходится для $|z| > r^{-1}$. Пусть $F_2(z)$ – сумма этого ряда во всей области сходимости. Тогда мы пишем $Z_2(\boldsymbol{a}) = F_2$.

Обозначим через $\boldsymbol{P}_3$ множество всех комплексных последовательностей $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ таких, что при обозначении $r_H^{-1} = \limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}$ и $r_N^{-1} = \limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ имеет место $r_H^{-1} < r_N$, так что ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ абсолютно сходится для $r_H^{-1} < |z| < r_N$ и раходится для $|z| < r_H^{-1}$ и для $|z| > r_N$. Пусть $F_3(z)$ – сумма этого ряда во всей его области сходимости. Тогда мы пишем $Z_3(\boldsymbol{a}) = F_3$.

Пусть $E(t)$ – целая часть числа t, $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}$ и $r = (\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. Если $0 < r < +\infty$, выберем $\varrho = r$; если $r = +\infty$, то в качестве ϱ возьмем произвольно большое конечное положительное число. Затем определим функцию s по формуле (1). Наконец, интегралом в пределах от $a \in (-\infty, +\infty)$ до $+\infty$ мы разумеем всюду интеграл Римана, несобственный по верхнему пределу. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Предположим:* 1) $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}$. 2) $r = (\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. 3) *Если* $0 < r < +\infty$, *выберем* $\varrho = r$; *если* $r = +\infty$, *возьмем в качестве* ϱ *произвольно большое конечное положительное число.* 4) $Z_1(\boldsymbol{a}) = F_1$. 5) $\log w$ *является главным значением логарифма* w. *Тогда справедливо* (2).

Теорема 2. *Предположим:* 1) $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}$. 2) $r = (\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. 3) *Если* $0 < r < +\infty$, *выберем* $\varrho = r$; *если* $r = +\infty$, *быверем в качестве* ϱ *произвольно большое конечное положительное число.* 4) $Z_2(\boldsymbol{a}) = F_2$. 5) $\log w$ *является главным значением логарифма* w. *Тогда справедливо* (8).

Теорема 3. *Предположим:* 1) $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{a}' = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$, $\boldsymbol{a}'' = \{0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots\}$. 2) $r_H = (\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|})^{-1}$, $r_N = (\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. 3) *Если* $0 < r_H < +\infty$ *или же* $0 < r_N < +\infty$, *выберем* $\varrho_H = r_H$ *или же* $\varrho_N = r_N$; *если* $r_H = +\infty$ *или же* $r_N = +\infty$, *то в качестве* ϱ_H *или же* ϱ_N *выберем произвольно большое конечное положительное число.* 4) $Z_3(\boldsymbol{a}) = F_3$. *Тогда справедливо* (9).

Приведенные теоремы позволяют вычислять образы в преобразованиях Z_1, Z_2 и Z_3 при помощи словарей для преобразования Карсона-Лапласа.

Summary

THE Z TRANSFORM IN TERMS OF THE CARSON-LAPLACE TRANSFORM

MILOŠ NOVOTNÝ

Denote by $\boldsymbol{P}$ the set of all sequences $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ with complex terms, such that $r^{-1} = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < +\infty$. Thus the series $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ has r as radius of convergence; denote its sum by $F_1(z)$, and define $Z_1(\boldsymbol{a}) = F_1$.

Under the same assumptions, the series $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k}$ converges absolutely for $|z| < r^{-1}$ and diverges for $|z| < r^{-1}$. Denote its sum by $F_2(z)$ and define $Z_2(\boldsymbol{a}) = F_2$.

Let $\boldsymbol{P}_3$ be the set of all sequences $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ with complex terms, such that $r_H^{-1} < r_N$ for $r_H^{-1} = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}$, $r_N^{-1} = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Thus the series $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ converges absolutely for $r_H^{-1} < |z| < r_N$, and diverges for $|z| < r_H^{-1}$ or $|z| > r_N$. Denote its sum by $F_3(z)$, and define $Z_3(\boldsymbol{a}) = F_3$.

$E(t)$ denotes the integral part of the real number t. Let $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}$ and $r = (\limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. If $0 < r < +\infty$, set $\varrho = r$; if $r = +\infty$, let ϱ be arbitrary positive. The function s is then defined by (1). By integrals between bounds $a \in (-\infty, +\infty)$ and $+\infty$ there is meant the Riemann integral, improper only with respect to its upper bound. Then the following theorems hold.

Theorem 1. *Let* $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}$, $r = \limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. *If* $0<r<+\infty$, *set* $\varrho = r$; *if* $r = +\infty$, *let* ϱ *be arbitrary positive. Let* $Z_1(\boldsymbol{a}) = F_1$, *let* $\log w$ *denote the principal value of the logarithm of* w. *Then* (2) *holds.*

Theorem 2. *Let* $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}$, $r = (\limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. *If* $0 < r < +\infty$, *set* $\varrho = r$; *if* $r = +\infty$, *let* ϱ *be arbitrary positive. Let* $Z_2(\boldsymbol{a}) = F_2$, *let* $\log w$ *denote the principal value of the logarithm of* w. *Then* (8) *holds.*

Theorem 3. *Let* $\boldsymbol{a} = \{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{a}' = \{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$, $\boldsymbol{a}'' = \{0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots\}$, *and* $r_H = (\limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|})^{-1}$, $r_N = (\limsup_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. *If* $0 < r_H < +\infty$ *or* $0 < r_N < +\infty$, *set* $\varrho_H = r_H$ *or* $\varrho_N = r_N$ *respectively*; *if* $r_H = +\infty$ *or* $r_N = +\infty$, *let* ϱ_H *or* ϱ_N *be arbitrary positive. Let* $Z_3(\boldsymbol{a}) = F_3$. *Then* (9) *holds.*

These three theorems make it possible to obtain images under the Z_1, Z_2 or Z_3 transforms from dictionaries of Carson-Laplace correspondences.

Adresa autora: Miloš Novotný, Výzkumný ústav telekomunikací, Třebohostická 987, Praha-Strašnice.