Vojtech Jankovič

# Vzorce pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice $y' = f(t, y)$, ktoré obsahujú vyššie derivácie

*Aplikace matematiky*, Vol. 10 (1965), No. 6, 469–482

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102988

# VZORCE PRE NUMERICKÉ RIEŠENIE DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE $y' = f(t, y)$, KTORÉ OBSAHUJÚ VYŠŠIE DERIVÁCIE

VOJTECH JANKOVIČ

(Došlo dňa 22. mája 1964.)

Všeobecné odvodenie vzorcov typu P — predpovedné a typu $Q$ — opravné. Koeficienty sú v tabulkách a tiež niektoré vzorce sú rozpísané. Sú to vzorce veľmi vysokej presnosti.

## 1. ÚVOD

**1.1.** Budeme sa zaoberať riešením diferenciálnej rovnice

$$y' = f(t, y) \tag{1.1}$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(t_0) = y_0 \, . \tag{1.2}$$

O funkcii $f(t, y)$ v rovnici (1.1) budeme predpokladať, že je analytickou svojich premenných v oblasti $R$, určenej nerovnosťami

$$|t - t_0| < A \, , \quad |y - y_0| < B \, .$$

MILNE [1], str. 84–87 podáva nasledujúce dvojice vzorcov pre jej riešenie:

$$y_{n+1} = y_{n-2} + 3(y_n - y_{n-1}) + h^2(y''_n - y''_{n-1}) + R_1 \, , \tag{1.1.a}$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h(y'_n + y'_{n+1}) + \tfrac{1}{12}h^2(y''_n - y''_{n+1}) + R_2 \, , \tag{1.1.b}$$

kde

$$R_1 = \tfrac{60}{720}h^5 y^{\mathrm{V}}(s) \, , \quad t_{n-2} < s < t_{n+1} \, ,$$
$$R_2 = \tfrac{1}{720}\, h^5 y^{\mathrm{V}}(s) \, , \qquad t_n < s < t_{n+1} \, .$$

Hodnota $h = t_{n+1} - t_n$ $(h > 0)$ je krok delenia nezávisle premennej $t$.

$$y_{n+1} = y_{n-2} + 3(y_n - y_{n-1}) + \tfrac{1}{2}h^3(y'''_n + y'''_{n-1}) + R_3 \, , \tag{1.2.a}$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h(y'_n + y'_{n+1}) + \tfrac{1}{10}h^2(y''_n - y''_{n+1}) + \tfrac{1}{120}h^3(y'''_n + y'''_{n+1}) + R_4 \, , \tag{1.2.b}$$

kde

$$R_3 = \frac{420}{100\,800}h^7 y^{\mathrm{VII}}(s)\,, \quad t_{n-2} < s < t_{n+1}\,,$$

$$R_4 = -\frac{1}{100\,800}h^7 y^{\mathrm{VII}}(s)\,, \quad t_n < s < t_{n+1}\,.$$

(1.3.a) $$y_{n+1} = y_{n-3} + 2(y_n - y_{n-2}) - 2h\delta^2 y'_{n-1} + 2h^2(y''_n - y''_{n-2}) + R_5\,,$$

(1.3.b) $$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_n + \tfrac{7}{15}h\delta^2 y'_n + \tfrac{1}{15}h^2(y''_{n-1} - y''_{n+1}) + R_6\,,$$

kde

$$R_5 = \frac{105}{4725}h^7 y^{\mathrm{VII}}(s)\,, \quad t_{n-3} < s < t_{n+1}\,,$$

$$R_6 = \frac{1}{4725}h^7 y^{\mathrm{VII}}(s)\,, \quad t_{n-1} < s < t_{n+1}\,.$$

Výpočet prebieha takým spôsobom, že hodnota $y_{n+1}$ sa najskôr predpovie menej presným vzorcom (1.1.a) [príp. (1.2.a), (1.3.a)] a potom sa opravuje presnejším (1.1.b) [príp. (1.2.b), (1.3.b)].

V knihe [2], str. 198 je táto metóda nazývaná metódou Milne-ho. Milne nazýva tak metódu inú, hoci prvý v roku 1949 podal vzorce tohto druhu.

**1.2.** Možno odvodiť aj iné vzorce, čo bude v ďalšom ukázané celkom všeobecne. Vzorce prvého typu budeme nazývať vzorce typu $P$ (predpovedné), druhého typu $Q$ (opravné).

Vzorce budeme označovať $P_{ik}$, $Q_{ik}$, kde $i = 0, 1, 2, \ldots$ značí počet predchádzajúcich bodov, ktoré vystupujú vo vzorcoch (začínajúc $n - 1$), $k = 1, 2, 3, \ldots$ značí maximálny stupeň derivácie vo vzorci. Podľa tohto označenia sú vzorce uvedené v predchádzajúcom odstavci nasledujúcich typov:

| | | | |
|---|---|---|---|
| vzorec | (1.1.a) | typ | $P_{22}$, |
| vzorec | (1.1.b) | typ | $Q_{02}$, |
| vzorec | (1.2.a) | typ | $P_{23}$, |
| vzorec | (1.2.b) | typ | $Q_{03}$, |
| vzorec | (1.3.a) | typ | $P_{32}$, |
| vzorec | (1.3.b) | typ | $Q_{12}$. |

## 2. VZORCE TYPU $P_{ik}$

**2.1.** Odvodíme výrazy typu $P_{ik}$. Uvažujme Taylorove rozvoje funkcií $y_{n+1}$ a $y^{(k)}_{n-i}$ v okolí bodu $t_n$

(2.1.1) $$y_{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\, y_n^{(m)}\,,$$

(2.1.2) $$y^{(k)}_{n-i} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(ih)^m}{m!}\, y_n^{(k+m)}\,,$$

kde $i = 1, 2, 3, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots$

Lineárnou kombináciou vzťahov (2.1.1) a (2.1.2) dostaneme všeobecné vyjadrenie vzorca $P_{ik}$. Vynásobme (2.1.1) koeficientom $h^k a_{ik}$ a (2.1.2) koeficientom 1 a zlúčme. Dostávame výraz

$$y_{n+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{h^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} y_{n-s}^{(r)}, \tag{2.1.3}$$

pričom koeficienty $A_{rs}$ sú nasledujúceho tvaru

$$A_{r0} = 1 + (-1)^r \sum_{i=1}^{\infty} (i)^r a_{i0} + \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r+k} \,.\, r \,.\, (r-1) \ldots (r-k-1) \,.\, \sum_{i=1}^{\infty} (i)^{r-k} a_{ik},$$

$$A_{rs} = -r!\, a_{rs}\,.$$

Aby sme z tohto všeobecného vyjadrenia (2.1.3) dostali vzorce určitého typu $P_{ik}$, treba koeficienty $A_{rs}$ voliť nasledovným spôsobom:

$$A_{rs} = 0 \quad \text{pre} \quad r = k+1, k+2, \ldots, \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1.4}$$

$$A_{r0} = 0 \quad \text{pre} \quad r = k+1, k+2, \ldots, m\,. \tag{2.1.5}$$

Pritom počet $m$ vo vzorci (2.1.5) je závislý od $i$ vo vzorci $P_{ik}$.

Podmienku (2.1.4) splníme voľbou koeficientov

$$a_{rs} = 0 \quad \text{pre} \quad r = 1, 2, 3, \ldots, s = k+1, k+2, \ldots$$

a zvyšné určíme z podmienok (2.1.5).

Okrem toho musíme ešte voliť

$$a_{rs} = 0 \quad \text{pre} \quad r = i+1, i+2, \ldots, s = 0, 1, 2, \ldots$$

V ďalších odstavcoch sú uvedené koeficienty špeciálnych druhov vzorcov typu $P_{ik}$.

**2.2.** Vzorce typu $P_{i2}$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots$

Hodnoty koeficientov $a_{rs}$ pre vzorce typu $P_{12}$ získané z rovníc (2.1.5) sú v tabuľke 1.

Poznámka. V tabuľkách sú uvádzané aj zvyšky, čo sú prvé nenulové členy vo výraze (2.1.3) po každom uvedenom vzorci.

Po rozpísaní sú vzorce typu $P_{12}$ nasledujúcich tvarov:

$$y_{n+1} = 32y_n - 31y_{n-1} - 2h(8y'_n + 7y'_{n-1}) + 2h^2(2y''_n - y''_{n-1}), \tag{1}$$

$$y_{n+1} = -16y_n + 17y_{n-1} + 2h(4y'_n + 5y'_{n-1}) + 2h^2 y''_{n-1}, \tag{2}$$

$$y_{n+1} = 8y_n - 7y_{n-1} - 2h(2y'_n + 7y'_{n-1}) + 2h^2 y''_n, \tag{3}$$

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + 2h(y'_n + 2y'_{n-1}) + h^2(y''_n + y''_{n-1}), \tag{4}$$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} - h(y'_n - y'_{n-1}) + \tfrac{1}{2}h^2(3y''_n + y''_{n-1}), \tag{5}$$

(6) $$y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) - \tfrac{1}{4}h(y'_n - 7y'_{n-1}) + \tfrac{1}{8}h^2(11y''_n + 5y''_{n-1}),$$

(7) $$y_{n+1} = y_n - \tfrac{1}{2}h(y'_n - 3y'_{n-1}) + \tfrac{1}{12}h^2(17y''_n + 7y''_{n-1}),$$

(8) $$y_{n+1} = 4y_n - 3y_{n-1} - 2hy'_n + \tfrac{1}{3}h^2(5y''_n + y''_{n-1}),$$

(9) $$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_{n-1} + \tfrac{2}{3}h^2(2y''_n + y''_{n-1}),$$

(10) $$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2y''_n.$$

Tabuľka 1.

| | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | Zvyšky |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 31 | 14 | 2 | $\frac{1}{90}h^6y^{VI}$ |
| 2 | $-17$ | $-10$ | $-2$ | $\frac{1}{15}h^5y^{V}$ |
| 3 | 7 | 2 | 0 | $\frac{1}{30}h^5y^{V}$ |
| 4 | $-5$ | $-4$ | $-1$ | $\frac{1}{20}h^5y^{V}$ |
| 5 | 1 | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{24}h^5y^{V}$ |
| 6 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{7}{4}$ | $-\frac{5}{8}$ | $\frac{7}{160}h^5y^{V}$ |
| 7 | 0 | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{7}{12}$ | $\frac{31}{720}h^5y^{V}$ |
| 8 | 3 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{180}h^5y^{V}$ |
| 9 | $-1$ | $-2$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{45}h^5y^{V}$ |
| 10 | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{12}h^4y^{IV}$ |

Podobne koeficienty $a_{rs}$ pre vzorce typu $P_{22}$ sú uvedené v tabuľke 2. Vzorec pod číslom 10 je na začiatku uvedený vzorec (1.1.a). Niektoré z uvedených vzorcov typu $P_{22}$ sú nasledujúce:

(1) $$y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(459y_n - 702y_{n-1} + 245y_{n-2}) - \tfrac{3}{2}h(63y'_n + 36y'_{n-1} - 29y'_{n-2}) + \\ + \tfrac{9}{2}h^2(3y''_n - 12y''_{n-1} + y''_{n-2}),$$

(2) $$y_{n+1} = 63(y_n - y_{n-1}) + y_{n-2} - 30h(y'_n + y'_{n-1}) + 6h^2(y''_n - y''_{n-1}),$$

(3) $$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} - y_{n-2} - 2h(y'_n - y'_{n-1}) + 2h^2(y''_n + y''_{n-1}),$$

(4) $$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} - y_{n-2} + 2h(-2y'_n + y'_{n-1} + y'_{n-2}) + \\ + \tfrac{2}{3}h^2(4y''_n + 7y''_{n-1} + y''_{n-2}),$$

(7) $$y_{n+1} = \tfrac{107}{2}(y_n - y_{n-2}) + y_{n-1} - \tfrac{3}{2}h(19y'_n + 36y'_{n-1} + 15y'_{n-2}) + \\ + \tfrac{1}{6}h^2(37y''_n + 28y''_{n-1} - 17y''_{n-2}),$$

(8) $$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \tfrac{1}{12}h^2(13y''_n - 2y''_{n-1} + y''_{n-2}),$$

(9) $$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} - y_{n-2} + \tfrac{1}{6}h^2(7y''_n + 4y''_{n-1} + y''_{n-2}).$$

Pre vzorce typu $P_{32}$ hodnoty koeficientov $a_{rs}$ sú v tabuľke 3 a tieto po rozpísaní sú nasledovné:

(1) $$\begin{aligned} y_{n+1} = {} & \tfrac{1}{3}(2432y_n - 893y_{n-3}) + 128(23y_{n-2} - 27y_{n-1}) + \\ & + 4h(-72y'_n + 216y'_{n-1} + 264y'_{n-2} - 23y'_{n-3}) + \\ & + 4h^2(23y''_n - 108y''_{n-1} + 72y''_{n-2} - 2y''_{n-3}). \end{aligned}$$

Tabuľka 2.

| | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{20}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | Zvyšky |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 351 | 54 | 54 | $-\frac{245}{2}$ | $-\frac{87}{2}$ | $-\frac{9}{2}$ | $\frac{1}{1680}h^9y^{IX}$ |
| 2 | 63 | 30 | 6 | $-1$ | 0 | 0 | $\frac{1}{210}h^7y^{VII}$ |
| 3 | $-1$ | $-2$ | $-2$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{45}h^6y^{VI}$ |
| 4 | $-1$ | $-2$ | $-\frac{14}{3}$ | 1 | $-2$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{90}h^7y^{VII}$ |
| 5 | $-1$ | $-\frac{62}{15}$ | $-\frac{14}{3}$ | $-1$ | $-\frac{44}{15}$ | $-\frac{4}{5}$ | $-\frac{77}{360}h^7y^{VII}$ |
| 6 | 1 | $-\frac{46}{15}$ | $-\frac{13}{3}$ | $-1$ | $-\frac{341}{120}$ | $-\frac{31}{40}$ | $\frac{107}{9450}h^7y^{VII}$ |
| 7 | $-1$ | 54 | $-\frac{14}{3}$ | $\frac{107}{2}$ | $\frac{45}{2}$ | $\frac{17}{6}$ | $\frac{11}{3780}h^8y^{VIII}$ |
| 8 | 1 | 0 | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}h^5y^{V}$ |
| 9 | $-1$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}h^5y^{V}$ |
| 10 | 3 | 0 | 1 | $-1$ | 0 | 0 | $\frac{1}{12}h^5y^{V}$ |

Tabuľka 3.

| | $a_{10}$ | $a_{20}$ | $a_{30}$ | $a_{11}$ | $a_{21}$ | $a_{31}$ | $a_{12}$ | $a_{22}$ | $a_{32}$ | Zvyšky |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3456 | $-2944$ | $\frac{893}{3}$ | $-864$ | $-1056$ | 92 | 432 | $-288$ | 8 | $\frac{1}{34650}h^{12}y^{XII}$ |
| 2 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{5}{4}$ | 0 | $\frac{17}{240}h^6y^{VI}$ |
| 3 | $-34$ | 16 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{44}{3}$ | $-\frac{8}{3}$ | 0 | $\frac{23}{3780}h^8y^{VIII}$ |
| 4 | 702 | $-352$ | 1 | 0 | $-138$ | 0 | 108 | $-18$ | 0 | $\frac{7}{40}h^{10}y^{X}$ |
| 5 | $-18488$ | $-375$ | 23 | $-10216$ | $-408$ | 4 | $-2284$ | $-72$ | 0 | $-\frac{45481}{1663200}h^{11}y^{XI}$ |

Nasledujúci vzorec je uvedený v knihe Booth [4], str. 93:

$$(2) \qquad y_{n+1} = y_n + y_{n-2} - y_{n-3} + \tfrac{1}{4}h^2(5y''_n + 2y''_{n-1} + 5y''_{n-2}),$$

$$(3) \qquad y_{n+1} = -16(y_n + y_{n-2}) + 34y_{n-1} - y_{n-3} + \tfrac{4}{3}h^2(2y''_n\, y''_{n-1} + 11 + 2y''_{n-2}).$$

**2.3.** Vzorce typu $P_{i3}$ pre $i = 1, 2, 3, \ldots$

Tabuľka 4.

| | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | Zvyšky |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-209$ | $-98$ | $-18$ | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{2520}h^8y^{\mathrm{VIII}}$ |
| 2 | $-13$ | 0 | $\frac{8}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{7}{3600}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 3 | $-29$ | $-8$ | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{560}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 4 | $-49$ | $-18$ | $-2$ | 0 | $\frac{1}{630}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 5 | 1 | 7 | 3 | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{480}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 6 | 0 | $\frac{13}{2}$ | $\frac{29}{10}$ | $\frac{49}{120}$ | $\frac{209}{100800}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 7 | 31 | 22 | 6 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{420}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 8 | $-1$ | 6 | $\frac{14}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{13}{6300}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 9 | 111 | 62 | 14 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{315}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 10 | 15 | 14 | $\frac{22}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{450}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |
| 11 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{7}{720}h^7y^{\mathrm{VII}}$ |

V tabuľke 4 sú hodnoty koeficientov $a_{rs}$ pre vzorce type $P_{13}$. Rozpísané vzorce majú nasledovný tvar:

$$(1) \qquad y_{n+1} = -208y_n + 209y_{n-1} + 14h(8y'_n + 7y'_{n-1}) - \\ -6h^2(4y''_n - 3y''_{n-1}) + \tfrac{4}{3}h^3(2y'''_n + y'''_{n-1}),$$

$$(2) \qquad y_{n+1} = -12y_n + 13y_{n-1} + 14hy'_n - \tfrac{2}{5}h^2(11y''_n + 4y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{30}h^3(31y'''_n - 9y'''_{n-1}),$$

$$(3) \qquad y_{n+1} = -28y_n + 29y_{n-1} + 2h(11y'_n + 4y'_{n-1}) - 6h^2y''_n + \\ + \tfrac{1}{6}h^3(7y'''_n - y'''_{n-1}),$$

$$(5) \qquad y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + 7h(y'_n - y'_{n-1}) - 3h^2(y''_n + y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{12}h^3(11y'''_n - 5y'''_{n-1})$$

(tento vzorec je uvedený v knihe Collatz [5], str. 427), Tabuľka 5.

| | $a_{10}$ | $a_{20}$ | $a_{11}$ | $a_{21}$ | $a_{12}$ | $a_{22}$ | $a_{13}$ | $a_{23}$ | Zvyšky |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1377$ | $-1621$ | $-2754$ | $-\frac{1221}{2}$ | $-162$ | $-\frac{171}{2}$ | $-108$ | $-\frac{9}{2}$ | $\frac{13}{604800}h^{12}y^{XII}$ |
| 2 | $-1$ | $-1$ | $62$ | $-\frac{81}{4}$ | $10$ | $-\frac{29}{4}$ | $-\frac{28}{3}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{71}{151200}h^{10}y^{X}$ |
| 3 | $-417$ | $-1$ | $-210$ | $0$ | $-42$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $\frac{1}{12960}h^{9}y^{IX}$ |
| 4 | $-1$ | $1$ | $14$ | $0$ | $6$ | $0$ | $\frac{4}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{1260}h^{9}y^{IX}$ |
| 5 | $-105$ | $\frac{1}{2}$ | $-42$ | $0$ | $-6$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{1680}h^{8}y^{VIII}$ |
| 6 | $0$ | $\frac{209}{208}$ | $\frac{189}{31}$ | $0$ | $\frac{159}{26}$ | $0$ | $\frac{35}{26}$ | $0$ | $\frac{139}{174700}h^{8}y^{VIII}$ |
| 7 | $-27$ | $\frac{7}{8}$ | $0$ | $0$ | $3$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\frac{1}{1344}h^{8}y^{VIII}$ |
| 8 | $-53$ | $\frac{3}{4}$ | $-14$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{2}{3}$ | $0$ | $\frac{1}{1344}h^{8}y^{VIII}$ |
| 9 | $-1$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-\frac{22}{15}$ | $-\frac{77}{120}$ | $-1$ | $-\frac{7}{40}$ | $\frac{43}{18900}h^{8}y^{VIII}$ |
| 10 | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-\frac{11}{15}$ | $-\frac{61}{120}$ | $-1$ | $-\frac{3}{20}$ | $\frac{659}{302400}h^{8}y^{VIII}$ |
| 11 | $2$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $0$ | $-\frac{11}{30}$ | $-\frac{53}{120}$ | $-1$ | $-\frac{11}{80}$ | $\frac{1289}{604800}h^{8}y^{VIII}$ |
| 12 | $3$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-\frac{3}{8}$ | $-1$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{480}h^{8}y^{VIII}$ |
| 13 | $-3$ | $2$ | $0$ | $0$ | $-\frac{11}{5}$ | $-\frac{31}{40}$ | $-1$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{239}{100800}h^{8}y^{VIII}$ |
| 14 | $5$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{29}{120}$ | $-\frac{29}{30}$ | $-\frac{1}{10}$ | $\frac{109}{60480}h^{8}y^{VIII}$ |
| 15 | $0$ | $-\frac{29}{32}$ | $-\frac{3}{4}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-\frac{7}{16}$ | $0$ | $\frac{53}{13440}h^{7}y^{VII}$ |
| 16 | $0$ | $-\frac{7}{16}$ | $3$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{336}h^{7}y^{VII}$ |
| 17 | $-7$ | $-\frac{3}{8}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{360}h^{7}y^{VII}$ |
| 18 | $-21$ | $-\frac{1}{4}$ | $-6$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{420}h^{7}y^{VII}$ |
| 19 | $\frac{273}{31}$ | $-\frac{16}{31}$ | $\frac{210}{31}$ | $0$ | $\frac{66}{31}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{310}h^{7}y^{VII}$ |
| 20 | $-1$ | $-1$ | $-2$ | $0$ | $-\frac{2}{5}$ | $0$ | $-\frac{8}{15}$ | $0$ | $\frac{13}{3150}h^{7}y^{VII}$ |
| 21 | $1$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $-\frac{1}{5}$ | $0$ | $-\frac{31}{60}$ | $0$ | $\frac{209}{50400}h^{7}y^{VII}$ |
| 22 | $1$ | $1$ | $15$ | $0$ | $\frac{31}{5}$ | $0$ | $\frac{27}{20}$ | $0$ | $\frac{1}{50400}h^{7}y^{VII}$ |
| 23 | $0$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ | $0$ | $-\frac{3}{10}$ | $0$ | $-\frac{21}{40}$ | $0$ | $-\frac{127}{6720}h^{7}y^{VII}$ |
| 24 | $3$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{240}h^{7}y^{VII}$ |

$$(6)\qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h(15y'_n - 13y'_{n-1}) + \tfrac{1}{10}h^2(31y''_n - 29y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{120}h^3(111y'''_n - 49y'''_{n-1}),$$

$$(8)\qquad y_{n+1} = y_{n-1} + 2h(4y'_n - 3y'_{n-1}) - \tfrac{2}{5}h^2(8y''_n + 7y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{2}{15}h^3(7y'''_n - 3y'''_{n-1}),$$

$$(11)\qquad y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \tfrac{1}{2}h^2(y''_n + y''_{n-1}) + \tfrac{1}{6}h^3(2y'''_n + y'''_{n-1}).$$

Koeficienty pre vzorce typu $P_{23}$ sú uvedené v tabuľke 5. Vzorec pod číslom 24 je začiatku uvedený vzorec (1.2.a). Niektoré z týchto vzorcov sú v ďalšom rozpísané:

$$(1)\qquad y_{n+1} = -2997y_n + 1377y_{n-1} + 1621y_{n-2} + \tfrac{3}{2}h(837y'_n + 1836y'_{n-1} + \\ + 407y'_{n-2}) + \tfrac{9}{2}h^2(-45y''_n + 36y''_{n-1} + 19y''_{n-2}) + \\ + \tfrac{9}{2}h^3(3y'''_n + 24y'''_{n-1} + y'''_{n-2}),$$

$$(2)\qquad y_{n+1} = -y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + \tfrac{1}{4}h(183y'_n - 248y'_{n-1} + 81y'_{n-2}) - \\ - \tfrac{1}{4}h^2(83y''_n + 40y''_{n-1} - 29y''_{n-2}) + \\ + \tfrac{1}{12}h^3(63y'''_n - 112y'''_{n-1} + 18y'''_{n-2}),$$

$$(3)\qquad y_{n+1} = -417(y_n - y_{n-1}) + y_{n-2} + 210h(y'_n + y'_{n-1}) - \\ - 42h^2(y''_n - y''_{n-1}) + 4h^3(y'''_n + y'''_{n-1}),$$

$$(4)\qquad y_{n+1} = y_n + y_{n-1} - y_{n-2} + 14h(y'_n - y'_{n-1}) + 6h^2(y''_n - y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{4}{3}h^3(y'''_n - y'''_{n-1}),$$

$$(12)\qquad y_{n+1} = 3(y_n - y_{n-1}) + y_{n-2} - \tfrac{3}{8}h^2(y''_n - y''_{n-2}) + \\ + \tfrac{1}{8}h^3(-2y'''_n + 8y'''_{n-1} + y'''_{n-2}),$$

$$(21)\qquad y_{n+1} = y_n - y_{n-1} + y_{n-2} + h(y'_n + y'_{n-1}) - \tfrac{1}{5}h^2(y''_n - y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{31}{60}h^3(y'''_n + y'''_{n-1}),$$

$$(23)\qquad y_{n+1} = y_{n-2} + \tfrac{3}{2}h(y'_n + y'_{n-1}) - \tfrac{3}{10}h^2(y''_n - y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{21}{40}h^3(y'''_n + y'''_{n-1})$$

(tento vzorec uvádza ZURMÜHL [3], str. 374).

**2.4.** Vzorce typu $P_{i4}$ pre $i = 1, 2, \ldots$

Koeficienty vzorcov $P_{14}$ sú v tabuľke 6.

$$(1)\qquad y_{n+1} = 1472y_n - 1471y_{n-1} - 6h(128y'_n + 117y'_{n-1}) + 2h^2(88y''_n - \\ - 71y''_{n-1}) - \tfrac{4}{3}h^3(16y'''_n + 11y'''_{n-1}) + \tfrac{2}{3}h^4(2y^{\mathrm{IV}}_n - y^{\mathrm{IV}}_{n-1}),$$

$$(2)\qquad y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \tfrac{3}{4}h(-43y'_n + 45y'_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{56}h^2(1027y''_n + 877y''_{n-1}) + \tfrac{1}{168}h^3(-841y'''_n + 479y'''_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{3360}h^4(25\,216y^{\mathrm{IV}}_n + 703y^{\mathrm{IV}}_{n-1}),$$

$$(3)\qquad y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2(2y''_n - y''_{n-1}) - \tfrac{1}{15}h^3(8'''_n + 7y'''_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{60}h^4(11y^{\mathrm{IV}}_n - 4y^{\mathrm{IV}}_{n-1}).$$

Tabuľka 6.

| | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | Zvyšky |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1471 | 702 | 141 | $\frac{44}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{113400} h^{10} y^{\mathrm{X}}$ |
| 2 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{135}{4}$ | $-\frac{877}{56}$ | $-\frac{479}{168}$ | $-\frac{703}{3360}$ | $\frac{109}{1881600} h^{9} y^{\mathrm{IX}}$ |
| 3 | 1 | 0 | 1 | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{11}{33600} h^{8} y^{\mathrm{VIII}}$ |

## 3. VZORCE TYPU $Q_{ik}$

**3.1.** K odvodeniu výrazov typu $Q_{ik}$ uvažujme Taylorove rozvoje funkcií $y_{n+1}^{(k)}$ a $y_{n-i}^{(k)}$ v okolí bodu $t_n$

$$y_{n+1}^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} y_n^{(k+m)}, \tag{3.1.1}$$

$$y_{n-i}^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(ih)^m}{m!} y_n^{(k+m)}, \tag{3.1.2}$$

kde $i = 1, 2, 3, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots$

Lineárnou kombináciou vzťahov (3.1.1) a (3.1.2) dostaneme všeobecný tvar vzorca typu $Q_{ik}$. Vynásobme (3.1.1) koeficientom $h^k \beta_k$ pričom $\beta_0 = 1$ a (3.1.2) koeficientom $h^k b_{ik}$ a zlúčme. Dostávame

$$y_{n+1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{h^r}{r!} \sum_{s=-1}^{\infty} B_{rs} y_{n-s}^{(r)}, \tag{3.1.3}$$

v ktorom koeficienty $B_{rs}$ majú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned}
B_{0\,-1} &= 0, \\
B_{r\,-1} &= -r!\,\beta_r, \\
B_{r0} &= 1 + \sum_{i=1}^{r} r(r-1)\ldots(r-i+1)\,\beta_i + (-1)^r \sum_{i=1}^{\infty} (i)^r\, b_{i0} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r+k}\, r(r-1)\ldots(r-k+1) \sum_{i=1}^{\infty} (i)^{r-k}\, b_{ik}, \\
B_{rs} &= -r!\, b_{rs}.
\end{aligned}$$

Z tohto všeobecného tvaru (3.1.3) získame vzorce určitého typu $Q_{ik}$ voľbou koeficientov $B_{rs}$:

$$B_{rs} = 0 \quad \text{pre} \quad r = k+1, k+2, \ldots, \quad s = -1, 1, 2, \ldots \tag{3.1.4}$$

$$B_{r0} = 0 \quad \text{pre} \quad r = k+1, k+2, \ldots, \mathrm{m}. \tag{3.1.5}$$

Podmienku (3.1.4) splníme voľbou koeficientov

$$\beta_j = 0 \quad \text{pre} \quad j = k + 1,\ k + 2, \ldots,$$
$$b_{rs} = 0 \quad \text{pre} \quad r = 1, 2, 3, \ldots, s = k + 1,\ k + 2, \ldots$$

a ostatné koficienty určíme z podmienok (3.1.5).

Okrem toho musí ešte platiť

$$b_{rs} = 0 \quad \text{pre} \quad r = i + 1,\ i + 2, \ldots, s = 0, 1, 2, \ldots$$

**3.2.** Vzorce typu $Q_{i2}$ pre $i = 0, 1, 2, \ldots$

Pre vzorec $Q_{02}$ dostávame

$$\beta_1 = -\tfrac{1}{2},\ \beta_2 = \tfrac{1}{12} \text{ a vzorec (1.1.b).}$$

Vzorce typu $Q_{12}$:

1. $\beta_1 = -\tfrac{3}{8}, \quad \beta_2 = \tfrac{1}{24}, \quad b_{10} = 1, \quad b_{11} = \tfrac{3}{8}, \quad b_{12} = \tfrac{1}{24},$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \tfrac{3}{8}h(y'_{n+1} - y'_{n-1}) - \tfrac{1}{24}h^2(y''_{n+1} - 8y''_n + y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{60\,480}h^8 y^{\mathrm{VIII}}.$$

2. $\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -\tfrac{1}{12}, \quad b_{10} = 1, \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = -\tfrac{1}{12},$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \tfrac{1}{12}h^2(y''_{n+1} + 10y''_n + y''_{n-1}) - \tfrac{1}{240}h^6 y^{\mathrm{VI}}.$$

Vzorce typu $Q_{22}$:

1. $\beta_1 = -\tfrac{33}{103}, \quad b_{10} = \tfrac{729}{103}, \quad b_{11} = \tfrac{243}{103}, \quad b_{12} = \tfrac{81}{103},$

$\beta_2 = \tfrac{3}{103}, \quad b_{20} = -1, \quad b_{21} = -\tfrac{33}{103}, \quad b_{22} = -\tfrac{3}{103},$

$$y_{n+1} = \tfrac{729}{103}(y_n - y_{n-1}) + y_{n-2} + \tfrac{3}{103}h[11(y'_{n+1} + y'_{n-2}) - 81(y'_n + y'_{n-1})] - \\ - \tfrac{3}{103}h^2[y''_{n+1} - y''_{n-2} - 27(y''_n - y''_{n-1})] + \tfrac{1}{3\,172\,400}h^{11} y^{\mathrm{XI}}.$$

2. $\beta_1 = 0, \quad b_{10} = 3, \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = \tfrac{3}{4},$

$\beta_2 = -\tfrac{1}{12}, \quad b_{20} = -1, \quad b_{21} = 0, \quad b_{22} = \tfrac{1}{12},$

$$y_{n+1} = 3(y_n - y_{n-1}) + y_{n-2} + \tfrac{1}{12}h^2[y''_{n+1} - y''_{n-2} + 9(y''_n - y''_{n-1})] - \\ - \tfrac{11}{2520}h^7 y^{\mathrm{VII}}.$$

**3.3.** Vzorce typu $Q_{i3}$ pre $i = 0, 1, 2, \ldots$

Vzorce typu $Q_{03}$:

1. $\beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \beta_2 = \tfrac{1}{10}, \quad \beta_3 = -\tfrac{1}{120}$ a vzorec (1.2.b).

2. $\beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 - \tfrac{1}{24},$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h(y'_{n+1} + y'_n) - \tfrac{1}{24}h^3(y'''_{n+1} + y'''_n) + \tfrac{1}{120}h^5 y^{\mathrm{V}}.$$

Vzorce typu $Q_{13}$:

1. $$\beta_1 = -\tfrac{41}{105}, \quad \beta_2 = \tfrac{2}{35}, \quad \beta_3 = -\tfrac{1}{315},$$
$$b_{10} = -1, \quad b_{11} = -\tfrac{41}{105}, \quad b_{12} = -\tfrac{2}{35}, \quad b_{13} = -\tfrac{1}{315},$$
$$y_{n+1} = y_{n-1} + \tfrac{1}{105}h(41y'_{n+1} + 128y'_n + 41y'_{n-1}) - \tfrac{2}{35}h^2(y''_{n+1} - y''_{n-1}) + \\ + \tfrac{1}{315}h^3(y'''_{n+1} + 16y'''_n + y'''_{n-1}) - \tfrac{1}{130\,977\,000}h^{11}y^{XI}.$$

2. $$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -\tfrac{2}{15}, \quad \beta_3 = \tfrac{1}{40},$$
$$b_{10} = 1, \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = -\tfrac{2}{15}, \quad b_{13} = -\tfrac{1}{40},$$
$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \tfrac{1}{15}h^2(2y''_{n+1} + 11y''_n + y''_{n-1}) - \tfrac{1}{40}h^3(y'''_{n+1} - y'''_{n-1}) + \\ + \tfrac{29}{302\,400}h^8y^{VIII}$$

tento vzorec uvádza ZURMÜHL [3], str. 375).

**3.4.** Vzorce typu $Q_{i4}$ pre $i = 0, 1, \ldots$

Vzorce typu $Q_{04}$:

1. $$\beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \beta_2 = \tfrac{3}{28}, \quad \beta_3 = -\tfrac{1}{84}, \quad \beta_4 = \tfrac{1}{1680},$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}h(y'_{n+1} + y'_n) - \tfrac{3}{28}h^2(y''_{n+1} - y''_n) + \\ + \tfrac{1}{84}h^3(y'''_{n+1} + y'''_n) - \tfrac{1}{1680}h^4(y^{IV}_{n+1} - y^{IV}_n) + \tfrac{1}{25\,401\,600}h^9y^{IX}.$$

V knihe [2], str. 199 sa uvádza, že TUNG odvodil dole uvedený vzorec, ktorý je tohto typu ale menšej presnosti:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \tfrac{1}{2}h^2(y''_n + y''_{n+1}) + \tfrac{1}{20}h^3(y'''_n - y'''_{n+1}) + \\ + \tfrac{1}{240}h^4(y^{IV}_n + y^{IV}_{n+1}) - \tfrac{509}{806\,400}h^8y^{VIII}.$$

## 4. DISKUSIA

Ku vzorcu (1.1.b) typu $Q_{02}$, ktorý má koeficient zvyšku, $0{,}0013\dot{8}h^5$ je výhodnejšie ako vzorec (1.1.a) typu $P_{22}$ s koeficientom zvyšku $0{,}08\dot{3}h^5$ použiť ľubovolný zo vzorcov typu $P_{12}$. Každý z týchto vzorcov má koeficient zvyšku menší. Najlepší vzorec tohto typu je vzorec (1) s koeficientom $0{,}0\dot{1}h^6$, ktorý pre $h < 0{,}125$ je presnejší ako sám opravný vzorec a preto ho možno kombinovať s presnejším vzorcom typu $Q$.

Ďalšia výhoda odvodených vzorcov typu $P_{12}$ je, že sa dajú použiť vo výpočte skôr ako vzorec (1.1.a), ktorý je až typu $P_{22}$. Uvedené vzorce (1) až (7) typu $P_{22}$ sú tiež ďaleko presnejšie ako vzorec (1.1.a). Najlepší z nich má koeficient zvyšku až $0.00059 \ldots h^9$. Aj špeciálne, ako je vzorec (1.1.a) – vzorce (2) a (3) sú s koeficientom zvyšku až $0{,}00476 \ldots h^7$. Tieto vzorce treba kombinovať s vyššími vzorcami typu $Q$.

Vzorec (1.1.b) typu $Q_{02}$ má koeficient zvyšku $0{,}0013\dot{8}h^5$, naproti tomu odvodené vzorce typu $Q_{12}$ majú $0{,}0000181 \ldots h^8$ [vzorec(1)] a $0{,}0041 \ldots h^6$ [(vzorec(2)]. Vzorce typu $Q_{22}$ majú koeficient zvyšku $0{,}000000315 \ldots h^{11}$ [vzorec (1)] a $-0{,}00436 \ldots h^7$ [vzorec (2)].

Oproti vzorcu (1.3.a) typu $P_{32}$ s koeficientom zvyšku $0{,}0\dot{2}h^7$ sú odvodené vzorce tohto typu lepšie: $0{,}000028 \ldots h^{12}$ pri vzorci (1), $0{,}00608 \ldots h^8$ pri vzorci (3), $0{,}175 \ldots$ $\ldots h^{10}$ pri vzorci (4), $-0{,}027 \ldots h^{11}$ pri vzorci (5). Tu však už nemožno použiť ako opravný vzorec (1.3.b) typu $Q_{12}$, treba vybrať z uvedených vzorcov typu $Q_{12}$, $Q_{22}$.

Ku vzorcu (1.2.b) typu $Q_{03}$ s koeficientom zvyšku $0{,}0000099 \ldots h^7$ možno použiť odvodené vzorce typu $P_{13}$, ktoré sú presnejšie a tiež skôr použiteľné, lebo vzorec (1.2.a) je až typu $P_{23}$. Uvedené vzorce typu $P_{23}$ sú však od neho presnejšie a treba použiť aj opravné vzorce presnejšie ako (1.2.b), napríklad vzorec (1) typu $Q_{13}$ s koeficientom zvyšku $-0{,}0000000076 \ldots h^{11}$.

Výhodne možno použiť aj kombináciu vzorcov typu $P_{14}$ a $Q_{04}$.

Je vidieť, že môžeme použiť vzorce rôzneho typu a rôznych tvarov v najvýhodnejšej kombinácii vzhľadom na požadovanú presnosť a zložitosť vyšších derivácií.

## 5. POZNÁMKY

1. Vzorce typu $P_{0k}$, pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ by boli obyčajné rozvoje Taylorovho radu.

2. Vzorce typu $P_{i1}$ by boli vzorce využívajúce pre výpočet iba pravé strany diferenciálnej rovnice.

3. Ako vidieť z odvodenia vzorcov, bolo by možné získať vzorce s ľubovolným dosahom aproximácie, lenže koeficienty týchto výrazov sú značne zložité. Ich určenie vyžaduje riešiť sústavy lineárnych rovníc veľkého počtu so stúpajúcimi koeficientami. Vždy taký počet, koľko treba určiť neznámych koeficientov.

4. Pretože je dôležité pre další výpočet (aby sa nevnášala chyba) mať počiatočné hodnoty riešenia čo najlepšie určené, oplatí sa ich určiť aj pomocou zložitejších vzorcov. Výhodne možno s nimi počítať pri dlhšom časovom intervale, hlavne ak sa počíta na samočinnom počítači.

5. Zvyšky aproximácií závisia aj na veľkosti kroku. Pri presnejších vzorcov možno krok voliť väčší, čím skôr vyriešime úlohu.

6. Sústavy diferenciálnych rovníc prvého rádu možno riešiť podľa tých istých vzorcov analogickým spôsobom.

### *Literatúra*


[1] *Милн В. Э.:* Численное решение дифференциальных уравнений (перевод с английского), Москва 1955.

[2] *Norris C. H., Hansen R. J., Holley M. J., Biggs J. M., Namyet S., Minami J. K.:* Structural design for dynamic loads, New York—Toronto—London 1959.

[3] *Zurmühl R.:* Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953.

[4] *Бут Э. Д.:* Численные методы (перевод с английского), Москва 1959.

[5] *Коллатц Л.:* Численные методы решения дифференциальных уравнений (перевод с немецкого), Москва 1953.

Резюме

## ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛОВОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y' = f(t, y)$, СОДЕРЖАЩИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

ВОЙТЕХ ЯНКОВИЧ (Vojtech Jankovič)

В статье произведен общий вывод формул для числового решения дифференциального уравнения (1.1) с начальным условием (1.2), в котором использованы также производные высшего порядка.

Получены формулы двоякого типа (экстраполяционные и интерполяционные). Первые формулы – предсказывающие – обозначены как формулы типа $P$, а другие – поправляющие – формулы типа $Q$. Расчет произведен таким образом, что значение решения прежде всего предсказано по формуле типа $P$, а после этого исправлено по формуле типа $Q$. Формулы с обозначением $P_{i,k}$, $Q_{i,k}$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$, обозначают количество предыдущих точек, которые в формуле выступают (начиная с $n - 1$); $k = 1, 2, 3, \ldots$ обозначает максимальную степень производной в формуле.

Коэффициенты общих выражение формул (2.1.3) и (3.1.3) приведены в таблицах (для $P_{i,k}$), и большинство формул приведено также в явном виде.

Отмечены формулы других авторов.

Приведенные формулы позволяют выбрать подходящую пару формул $P_{i,k}$ и $Q_{i,k}$ для расчета конкретного дифференциального уравнения с требуемым приближением.

Аналогично можно решать также системы дифференциальных уравнений.

Summary

## FORMULAS FOR NUMERICAL SOLUTION OF $y' = f(t, y)$, CONTAINING HIGHER DERIVATIVES

VOJTECH JANKOVIČ

A general deduction is given of formulas containing higher derivatives for the numerical solution of the differential equation (1.1) with initial condition (1.2).

The formulas are of two kinds, the extrapolation and the interpolation formulas. The former are predictive and are termed type $P$ formulas; the latter, correction formulas, are termed type $Q$ formulas. The computation proceeds in the following manner. The value of the solution is predicted first using a formula of type $P$ and then corrected according to a $Q$ type formula. The formulas are denoted as $P_{ik}$, $Q_{ik}$, where

$i = 0, 1, 2, \ldots$ denotes the number of preceding points encountered in the formula (beginning with $n - 1$), and $k = 1, 2, 3, \ldots$ denotes the highest degree of the derivative encountered in the formula.

The coefficient of general terms of formulas (2.1.3) and (3.1.3) are tabulated for types $P_{ik}$, and most of the formulas are explicitly developed.

Formulas adopted from other authors are pointed out.

The presented formulas make it possible to choose a suitable pair of formulas $P_{ik}$, $Q_{ik}$ for the solution of a particular differential equation with the required accuracy.

Systems of differential equations may be solved analogously.

*Adresa autora: C. Sc. Vojtech Jankovič,* Oblastné výpočtové stredisko SlPK, Kýčerského 1, Bratislava.