John von Neumann

Různé. O postavení matematiky. Matematik

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 5, 444–451

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102984

RŮZNÉ

O POSTAVENÍ MATEMATIKY

Úvodem. V rozvoji lidského poznání v posledních 100 letech hraje důležitou roli matematika. Vývoj dnešní matematiky není již tak silně podmiňován ostatními obory jako dříve. Velká část problémů současné matematiky vyrůstá z ní samé.

Jaká je vlastně dnešní úloha matematiky v současné vědě? Co vlastně charakterizuje matematiku jako nejexaktnější vědu a v čem spočívá její dnešní rozhodující význam? Jaký je poměr matematiky a jejích aplikací a co je to matematická přesnost?

Tyto a obdobné otázky si klade řada pracovníků včetně největších dnešních matematiků.

Redakční rada považuje za užitečné seznamovat své čtenáře s různými zajímavými názory, týkajícími se této problematiky. Vzhledem k subtilitě těchto otázek budou se pravděpodobně názory lišit. Ačkoliv půjde vždy o subjektivní názory autorů, redakční rada soudí, že mohou být pro čtenáře zajímavé.*)

MATEMATIK**)

JOHN VON NEUMANN

Diskuse o povaze intelektuální práce je nesnadným úkolem v kterékoli oblasti, dokonce i v těch oblastech, které nejsou tolik vzdálené ústřední sféře našeho společného lidského intelektuálního úsilí jako je dosud matematika. Diskuse o povaze každého intelektuálního úsilí je sama o sobě nesnadná — rozhodně je obtížnější než samotné vynakládání tohoto zvláštního intelektuálního úsilí. Pochopit mechanismus letadla a teorie sil, které je zvedají a pohánějí, je těžší než v něm pouze jet, být jim zvedán a dopravován — nebo je dokonce řídit. Jen výjimečně někdo pochopí nějaký proces, když se předtím důkladně neobeznámí s jeho povahou a užitím, dříve než si jej instinktivně a empiricky neosvojí.

Jakákoli diskuse o povaze intelektuálního úsilí v kterékoli oblasti je tudíž nesnadná, ledaže předpokládá běžné, navyklé znalosti o této oblasti. V matematice je toto omezení velmi zpřísněno, má-li být diskuse udržována na nematematické úrovni. V diskusi se pak nutně projeví některé velmi nepříznivé rysy; jednotlivá hlediska nelze nikdy patřičně doložit a jistá celková povrchnost v diskusi je nevyhnutelná.

Ve svém dalším výkladu jsem si těchto nedostatků velmi dobře vědom a předem se omlouvám. Kromě toho názory, které chci vyslovit, patrně se mnou zcela nesdílí mnoho jiných matematiků —

*) Vzhledem k tomu, že statě, zabývající se touto problematikou, jsou roztroušeny v různých publikacích, prosíme o upozornění na články tohoto charakteru.

**) Z knihy „*The Works of the Mind*", vydané pod redakcí ROBERTA B. HEYWOODA ve vydavatelství The University of Chicago Press 1947, přeloženo a uveřejněno s laskavým svolením vydavatelství The University of Chicago Press.

dozvíte se o ne příliš dobře uspořádaných dojmech a interpretacích jednoho člověka — a mohu vám jen velmi málo pomoci při rozhodování, jak dalece jsou na místě.

Přes všechny tyto překážky musím však doznat, že pokus promluvit k vám o povaze intelektuálního úsilí v matematice je zajímavým a vybízejícím úkolem. Doufám jen, že nedopadnu příliš špatně.

Nejpodstatnější charakteristickou skutečností o matematice je, podle mého mínění, její zcela zvláštní vztah k přírodním vědám nebo, obecněji, k jakékoli vědě, která vysvětluje zkušenost na vyšší než čistě popisné úrovni.

Většina lidí, matematikové i jiní lidé, budou souhlasit, že matematika není empirická věda nebo alespoň že je pěstována způsobem, který se v některých rozhodujících ohledech odlišuje od speciálních postupů empirických věd. A přece je její vývoj velmi úzce spjat s přírodními vědami. Jedno z jejích hlavních odvětví, geometrie, skutečně začalo jako přírodní, empirická věda. Některé z nejlepších myšlenek moderní matematiky (myslím, že nejlepší) zjevně vznikly v přírodních vědách. Matematické metody pronikají a ovládají „teoretické" části přírodních věd. V moderních empirických vědách se stává stále více hlavním kritériem úspěchu, zda je možné užít matematické metody nebo polomatematické metody fyziky. V celé přírodovědě je vskutku stále zřejmější nepřerušený řetězec přeměn, z nichž všechny důrazně směřují k matematice a jsou téměř totožné s myšlenkou vědeckého pokroku. Do biologie ve zvýšené míře pronikají chemie a fyzika, do chemie experimentální a teoretická fyzika a do fyziky samy matematické formy teoretické fyziky.

V povaze matematiky existuje zcela zvláštní obojetnost. Tuto obojetnost si musíme uvědomit, přijmout ji a včlenit do svých úvah o tomto předmětu. Tato dvojí tvářnost je tváří matematiky a nevěřím, že by bez obětování její podstaty bylo možné nějaké zjednodušené, monistické pojetí.

Nebudu se proto pokoušet o to, abych vám předkládal nějakou monistickou verzi. Budu se snažit, abych popsal, jak nejlépe dovedu, mnohostranný jev, jakým je matematika.

Je nepopiratelné, že některé z nejlepších myšlenek v matematice — v těch jejích částech, které patří k čisté matematice, jak jen si ji umíme představit — vzešly z přírodních věd. Zmíníme se o dvou nejpozoruhodnějších skutečnostech.

Prvním příkladem, jak také má být, je geometrie. Geometrie byla hlavní složkou starověké matematiky. Spolu s jednotlivými svými odvětvími je nadále jednou z hlavních částí moderní matematiky. Nemůže být pochybností o tom, že její původ v antice byl empirický a že začala jako disciplína asi právě tak jako dnes teoretická fyzika. Nehledě na všechna ostatní svědectví, ukazuje to samo jméno „geometrie".

Eukleidova axiomatizace znamená velký odklon od empirie, ale vůbec není jednoduché obhájit stanovisko, že právě toto bylo rozhodujícím a posledním krokem způsobujícím naprosté odtržení. Že Eukleidova axiomatizace nevyhovuje v některých podružných věcech moderním požadavkům na absolutní axiomatickou přesnost, má v tomto ohledu menší význam. Co je podstatnější, je toto: jiné disciplíny, které jsou nepochybně empirické, jako mechanika a termodynamika, jsou obvykle formulovány více nebo méně axiomatickým způsobem, který se dá v pojetí některých autorů stěží odlišit od Eukleidova postupu.

Klasické dílo teoretické fyziky naší doby, Newtonovy *Principy*, se velmi podobalo Eukleidovu jak svou literární podobou, tak obsahem některých svých nejkritičtějších částí. Ve všech těchto případech je ovšem v pozadí axiomatického způsobu zpracování fyzikální názor, podepírající axiomy a experimentální výsledky, které zdůvodňují věty. Dálo by se však namítnout, že je možné obdobně interpretovat Eukleida, zvláště ze stanoviska antiky, předtím než geometrie nabyla své současné dvoutisícileté stability a autority — autority, které moderní výstavba teoretické fyziky jasně postrádá.

Mimoto, zatímco se deempirizace geometrie od Eukleidovy doby pozvolna zvětšovala, nikdy k tomu zcela úplně nedošlo, dokonce ani v moderní době. Diskuse o neeukleidovské geometrii to dobře osvětluje. Osvětluje i ambivalenci matematického myšlení. Protože se diskuse převážně vedla na vysoce abstraktní úrovni, zabývala se čistě logickým problémem, zda Eukleidův „pátý postulát" je důsledkem ostatních či nikoli; a formální spor ukončil F. Klein čistě matematickým příkladem, kterým ukázal, jak se část eukleidovské roviny stane neeukleidovskou formálním předefinováním jistých základních pojmů. A přece byl zde empirický podnět přítomen od začátku až do konce. Hlavním důvodem, proč se ze všech Eukleidových postulátů vyšetřoval pátý, byl bezpochyby neempirický charakter pojmu celé nekonečné roviny, který se projevuje zde a pouze zde. Myšlenku, že alespoň v jednom podstatném bodě — a to bez ohledu na všechny matematicko-logické rozbory — má být rozhodnutí pro nebo proti Eukleidovi empirické povahy, měl jistě největší matematik, Gauss. A nicméně i poté, co Bolyai, Lobačevskij, Riemann a Klein dospěli abstraktním způsobem k tomu, co dnes považujeme za formální řešení původní kontroverze, řekla empirie — nebo spíše fyzika — své poslední slovo. Objev obecné relativity si vynutil revizi našich názorů na povahu geometrie v docela novém směru a se zcela novým rozložením čistě matematických důvodů. Konečně ještě další zmínka k dovršení kontrastního pohledu. Tento poslední vývoj se uskutečnil v téže generaci, která se dožila úplné deempirizace a abstrakce Eukleidovy axiomatické metody v rukou moderních axiomaticko-logicky pracujících matematiků. A tyto dva zdánlivě protichůdné postoje jsou dokonale slučitelné v jednom matematickém intelektu: tak Hilbert uskutečnil významné přínosy jak k axiomatické geometrii tak k obecné elativitě.

Druhým příkladem je infinitezimální počet — nebo spíše vše z analýzy, co z něho vzniklo. Infinitezimální počet byl prvním úspěchem moderní matematiky a je těžké přecenit jeho význam. Myslím, že vymezuje zřetelněji než cokoli jiného počátek moderní matematiky a že systém matematické analýzy, který je jeho logickým rozvinutím, stále představuje největší technický pokrok v exaktním myšlení.

Původ infinitezimálního počtu je jasně empirický. Keplerovy první pokusy s integrováním byly formulovány jako „dolichometrie" — měření soudků — to jest nauka o objemu pro tělesa se zakřivenými povrchy. To je geometrie, avšak poeukleidovská, a v době, o níž mluvím, neaxiomatizovaná, empirická geometrie. Toho si byl Kepler plně vědom. Hlavní úsilí a hlavní objevy, objevy Newtonovy a Leibnizovy, měly explicitně fyzikální původ. Newton vynalezl kalkul „fluxí" v podstatě pro účely mechaniky — vskutku rozvinul obě disciplíny, infinitezimální počet a mechaniku, víceméně společně. První formulace infinitezimálního počtu nebyla ani matematicky přesná. Po více než stopadesát let po Newtonovi byla jedině nepřesná polofyzikální formulace k disposici! A přece se během tohoto údobí realizovaly některé z nejvýznamnějších pokroků v analýze a to navzdory tomuto nepřesnému matematicky neadekvátnímu základu! Někteří z vůdčích matematických geniů tohoto údobí byli zjevně nepřesní, jako Euler, avšak jiní, jako Gauss nebo Jacobi, většinou přesní byli. Vývoj byl konfuzní a víceznačný, jak jen možno, a jeho vztah k empirii jistě nebyl v souladu s našemi současnými (nebo Eukleidovými) ideami o abstrakci a přesnosti. Přesto by jej žádný matematik nechtěl vyobcovat — v onom období se produkovala prvotřídní matematika, nejlepší jaká kdy vůbec existovala! A dokonce poté, co Cauchy vpodstatě znovu nastolil vládu přesnosti, došlo Riemannovým přičiněním k velmi nápadné obnově polofyzikálních metod. Riemannova vědecká osobnost sama, jak o tom svědčí jeho spor s Weierstrassem, je nejjasnějším dokladem dvojí povahy matematiky, ale zabředl bych příliš hluboko do odborných záležitostí, kdybych se zabýval specifickými podrobnostmi. Zdá se, že počínaje Weierstrassem se analýza stala zcela abstraktní, přesnou a neempirickou. Avšak ani to není bezvýjimečně pravda. Spor o „základy" matematiky a logiky, k němuž došlo během posledních dvou generací, rozptýlil mnohé iluze v tomto směru.

To mne přivádí k třetímu příkladu, který je závažný pro naši diagnózu. Tento příklad se však týká spíše poměru matematiky k filosofii nebo gnoseologii než k přírodním vědám. Dokresluje velmi pozoruhodným způsobem, že sám pojem „absolutní" matematické přesnosti není neměnný. Proměnlivost pojmu přesnosti ukazuje, že výbava matematiky musí obsahovat ještě něco jiného než matematickou abstrakci. Když jsem analyzoval spor o „základy", nedokázal jsem sám sebe přesvědčit o tom, že rozhodnutí musí padnout ve prospěch empirické povahy této zvláštní složky. Důvody v prospěch takové interpretace jsou dosti průkazné, alespoň v některých fázích diskuse. Nepovažuji je však za absolutně nutné. Dvě věci jsou však jasné. Za prvé zde musí přistoupit něco nematematického, co je nějak spjato s empirickými vědami nebo s filosofií nebo s obojím — a neempirický charakter by se dal uznat jen za předpokladu, že filosofie (nebo speciálněji gnoseologie) může existovat nezávisle na zkušenosti. (A tento předpoklad je jen nutný, není však o sobě postačující.) Za druhé, empirický původ matematiky je velmi podepřen případy, jakými byly naše předchozí příklady (geometrie a infinitezimální počet), a to bez ohledu na to, jaká snad je nejvhodnější interpretace sporu o „základy".

Při rozboru proměnlivosti pojmu matematické přesnosti chci klást hlavní důraz na spor o „základech", jak jsem se o něm shora zmínil. Chtěl bych však nejdříve stručně uvažovat o druhém aspektu problematiky. Tento aspekt rovněž posiluje moji argumentaci, považuji jej však za druhotný, protože je pravděpodobně méně průkazný než analýza sporu o „základy". Mám na mysli změny matematického „stylu". Je dobře známo, že styl, v němž jsou matematické důkazy psány, prodělal značné výkyvy. Je lépe mluvit o výkyvech než o tendenci, protože v něktreých ohledech jsou rozdíly mezi současnými autory a některými autory osmnáctého nebo devatenáctého století větší mezi současnými autory a Eukleidem. Na druhé straně existuje zde v jiných ohledech pozoruhodná stálost. V oblastech, v nichž se projevují rozdíly, jsou to hlavně odlišnosti ve způsobu zpracování, které lze eliminovat, aniž bychom zavedli nějaké nové pojmy. Avšak v mnoha případech jsou tyto odlišnosti tak velké, že začínám pochybovat o tom, zda autory, kteří „předkládají" svá pojetí tak odchylnými způsoby, lze odlišit jen růzností stylu, vkusu a vzdělání — zdali skutečně měli tytéž názory o tom, co konstituuje matematickou přesnost. Konečně v krajních případech (například v mnoha pracích z analýzy ze sklonku osmnáctého století, jak bylo shora uvedeno) jsou tyto rozdíly podstatné a lze je odstranit, jestliže to vůbec jde, jen pomocí nových a podnětných teorií, kterým by to trvalo tak sto let, aby se rozvinuly. Někteří matematikové, kteří pracovali pro nás takovými nepřesnými způsoby (nebo někteří z jejich současníků, kteří je kritizovali) si dobře uvědomovali nedostatek přesnosti. Nebo abychom byli objektivnější: jejich vlastní přání, jak by měly vypadat matematické postupy, byly více v souladu s našimi současnými hledisky než s jejich činy. Avšak jiní — například největší odborník tohoto údobí Euler — zdá se, že jednali naprosto poctivě a byli zcela uspokojeni svými vlastními měřítky.

Nechci to však dále zdůrazňovat. Místo toho se chci věnovat zcela vyhraněnému sporu o „základy matematiky". Ke sklonku devatenáctého a počátkem dvacátého století vedlo nové odvětví abstraktní matematiky, Cantorova teorie množin, k obtížím; to jest, jisté úvahy vedly ke kontradikcím. Ačkoliv tyto úvahy nepatřily k ústředním a „užitečným" součástem teorie množin a daly se jistými formálními kritériy vždy snadno zjistit, přece jen nebylo zřejmé, proč by měly být v teorii množin považovány za méně hodnotné než její „úspěšné" části. Nehledě na ex post zjištění, že skutečně vedly ke katastrofálním důsledkům, nebylo jasné, jaká apriorní motivace, jaký konsistentní filosofický výklad této situace, by mohly zdůvodnit, abychom je vyloučili z těch partií teorie množin, které jsme chtěli zachránit. Podrobnější zkoumání jádra věci, které podnikli hlavně Russell a Weyl a které ukončil Brouwer, ukázalo, že způsob, jimž nejen teorie množin, ale z větší části i moderní matematika, uvažovaly o pojmu „obecné platnosti" a „existence", byly filosoficky problematické. Matematický systém, který byl bez těchto nežádoucích rysů, „intuitionismus", byl vypracován Brouwerem. V tomto systému nevznikly nesnáze a kontradikce teorie množin. Avšak celých padesát procent moderní matematiky, v jejích nejpodstatnějších — a dosud nepopíraných — částech, zvláště v analýze, byly touto „čistkou" postiženy; buď se staly neplatnými nebo se musely zdůvodňovat velmi složitými pomocnými úvahami. A v tomto procesu se obvykle hodně ztratilo na obecnosti matematické platnosti a na eleganci dedukce. Brouwer a Weyl považovali za nutné, aby pojem matematické přesnosti byl vzhledem k těmto ideím revidován.

Lze těžko přecenit význam těchto událostí. V třetím desetiletí dvacátého století dva matematikové prvořadého významu — oba byli, pokud jen možno, tak hluboce a plně si vědomi toho, co matematika je, k čemu je nebo o čem pojednává — skutečně navrhli, aby pojem matematické přesnosti, pojem toho, co konstituuje přesný důkaz, byl změněn! Následující vývoj stojí rovněž za to, abychom si jej povšimli.

1. Pouze velmi málo matematiků bylo ochotno přijmout nová, nezbytná měřítka pro svou vlastní každodenní praxi. Velmi mnoho matematiků však uznalo, že Weyl a Brouwer měli na první pohled pravdu, ale sami se nadále dopouštěli přestupků, to jest, i nadále dělali svou vlastní matematiku starým, „snadným" způsobem — patrně v naději, že snad někdo jiný, v nějaké jiné době, najde odpověď na kritiku intuitionismu a tím je a posteriori ospravedlní.

2. Aby ospravedlnil „klasickou" (tj. před-intuitionistickou) matematiku, přišel Hilbert s touto geniální myšlenkou: Dokonce v intuitionistickém systému lze přesně vysvětlit, jakým způsobem klasická matematika operuje, to jest, lze popsat, jak klasický systém funguje, přestože nelze ospravedlnit jeho činnost. Bylo by tedy možné intuitionistisky dokázat, že klasické postupy nemohou nikdy vést ke kontradikcím — k vzájemným konfliktům. Bylo jasné, že by takový důkaz byl velmi obtížný, byly však jisté náznaky, jak bychom se o to mohli pokusit. Kdyby se tento plán osvědčil, umožnil by nanejvýše pozoruhodné zdůvodnění klasické matematiky na základě samotného protichůdného intuitionistického systému! Taková interpretace by alespoň byla oprávněná v systému filosofie matematiky, který by většina matematiků byla ochotna uznat.

3. Asi po desetiletých pokusech uskutečnit tento program dosáhl Gödel nanejvýše pozoruhodného výsledku. Tento výsledek nelze absolutně přesně vyjádřit bez několika doložek a výhrad, které jsou příliš odborného rázu, než abychom je zde mohli formulovat. Smysl tohoto výsledku tkví vpodstatě v tomto: nevede-li matematický systém ke kontradikci, nelze tuto skutečnost dokázat prostředky onoho systému. Gödelův důkaz splňoval nejpřísnější kritérium matematické přesnosti — intuitionistické kritérium. Jeho vliv na Hilbertův program je z důvodů, které jsou pro tuto příležitost opět příliš odborné, poněkud sporný. Podle mého osobního mínění, které sdílejí mnozí jiní matematikové, Gödel ukázal, že Hilbertův program je v podstatě beznadějný.

4. Jakmile se rozplynula velká naděje ospravedlnit klasickou matematiku — ve smyslu Hilbertově či Brouwerově a Weylově — rozhodla se většina matematiků používat tak či onak tohoto systému. Navzdory tomu docházelo se v klasické matematice k výsledkům, které byly elegantní i užitečné, a třebaže si nikdy více nemůžeme být absolutně jisti její spolehlivostí, má alespoň právě tak pevný základ, jako například existence elektronu. Jsme-li tudíž ochotni akceptovat vědy, měli bychom právě tak dobře akceptovat klasický systém matematiky. Takové stanovisko se ukázalo přijatelným dokonce pro některé z původních zastánců intuitionistického systému. Spor o „základy" není v současné době rozhodně uzavřen, zdá se však velmi nepravděpodobné, že klasický systém byl — vyjma nepatrnou menšinou matematiků — opuštěn.

Vylíčil jsem historii tohoto sporu tak podrobně, protože si myslím, že je nejlepší zárukou proti tomu, abychom považovali neměnnou přesnost matematiky za něco příliš moc samozřejmého. To se událo během našeho vlastního života a sám vím, jak se snadno, že to až ponižuje, během této doby měnily mé vlastní názory ve vztahu k absolutní pravdě matematiky a jak se změnily třikrát za sebou!

Doufám, že uvedené tři příklady dostatečně dobře osvětlují polovinu mé téze — že mnohé nejlepší matematické inspirace přicházejí ze zkušenosti a že lze stěží věřit v existenci absolutního, neměnného pojmu matematické přesnosti, odloučeného od vší lidské zkušenosti. Snažím se v této věci zastávat velmi antiintelektuální stanovisko. Ať již máme v tomto ohledu jakékoli filosofické či gnoseologické záliby, skýtají opravdové zkušenosti matematického cechu s jeho předmětem malou oporu pro předpoklad existence apriorního pojmu matematické přesnosti. Moje téze však obsahuje i druhou polovinu a touto částí se chci nyní zabývat.

Pro každého matematika je velmi nesnadné se domnívat, že matematika je čistě empirická věda nebo že všechny matematické ideje odvozují svůj původ z empirie. Uvažujme nejdříve o druhé polovině tohoto tvrzení. Existují různé důležité části moderní matematiky, v nichž se empirický původ nedá zjistit, nebo dá-li se zjistit, je tak vzdálený, že je jasné, že tématika prodělala úplnou metamorfózu, jakmile se odloučila od svých empirických kořenů. Symbolika algebry byla vynalezena pro domácké, matematické použití, lze však odůvodněně tvrdit, že má silná empirická pouta. Avšak moderní, „abstraktní" algebra se stále více rozvinula ve směrech, které mají ještě méně empirických souvislostí. Totéž se dá říci o topologii. A ve všech těchto oblastech je matematikovo subjektivní měřítko úspěchu, hodnoty jeho úsilí velmi značně soběstačné a estetické a prosté (nebo téměř prosté) empirických souvislostí. (Později o tom řeknu něco více.) V teorii množin je to ještě jasnější. „Mohutnost" a „uspořádání" nekonečné množiny mohou být generalizacemi konečných číselných pojmů, ale v jejich nekonečné podobě (zvláště „mohutnost") mají stěží nějaký vztah k tomuto světu. Kdybychom se nechtěl vyhnout technickým záležitostem, mohl bych to doložit na různých příkladech z teorie množin — na problému „axiomu výběru", na „srovnatelnosti" nekonečných „mohutností", na problému „kontinua" atd. Tytéž připomínky se vztahují na mnohé z teorie reálných čísel a z teorie reálných bodových množin. Dvěma podivuhodnými příklady jsou diferenciální geometrie a teorie grup: rozhodně byly koncipovány jako abstraktní neaplikované disciplíny a byly téměř vždy v tomto duchu pěstovány. Po deseti letech v jednom případě a po sto letech v druhém se ukázalo, že jsou ve fyzice velmi užitečné. A ještě stále se většinou pěstují v uvedeném abstraktním, neaplikovaném duchu.

Příkladů na všechny tyto okolnosti a jejich různé kombinace by se dalo uvést více, raději se však místo toho obrátím k prvnímu bodu, jak jsem jej shora nastínil: Je matematika empirická věda? Nebo přesněji: Je matematika skutečně pěstována tak, jak jsou pěstovány empirické vědy? Nebo obecněji: Jaký je normální matematikův vztah k jeho tématice? Jaká jsou kritéria toho, co mu přináší úspěch, co požaduje? Jaké vlivy, jaké úvahy řídí a orientují jeho úsilí?

Podívejme se tedy, v jakých ohledech se odlišuje způsob, jakým normálně matematik pracuje, od způsobu práce v přírodních vědách. Rozdíl mezi nimi na jedné straně a matematikou na straně druhé se projevuje a jasně se zvětšuje, jakmile přecházíme od teoretických disciplín k experimentálním a pak od experimentálních k popisným. Porovnejme proto matematiku se skupinou, která je jí nejbližší — s teoretickými disciplínami. A vyberme zde disciplínu, která je matematice vůbec nejbližší. Doufám, že mne nebudete příliš přísně soudit, jestliže se mi nepodaří zvládnout matematickou hybridnost a jestliže dodám: protože je ze všech teoretických věd nejvíce rozvinuta — to jest teoretická fyzika. Matematika a teoretická fyzika mají skutečně mnoho společného. Jak jsem předtím ukázal, byl Eukleidův geometrický systém prototypem axiomatického způsobu zpracování klasické mechaniky a obdobné postupy ovládají fenomenologickou termodynamiku právě tak jako jisté fáze Maxwellova systému elektrodynamiky a také systém speciální relativity. Kromě toho většina teoretických fyziků dnes zastává stanovisko, že teoretická fyzika nevysvětluje jevy, ale pouze je klasifikuje a koreluje. To znamená, že kritérium úspěchu pro takovou teorii je prostě v tom, zdali může jednoduchým a elegantním klasifikačním a korelačním schématem zahrnovat velmi mnohé jevy, které by se bez tohoto schématu zdály být komplikované a heterogenní, a zdali toto schéma zahrnuje jevy, o nichž se neuvažovalo nebo které dokonce ani nebyly známy v době, kdy toto schéma bylo vyvinuto. (Obě tato poslední tvrzení postihují ovšem sjednocující a predikční schopnosti teorie.) Nuže toto kritérium, jak zde bylo vyloženo, má zjevně do značné míry estetickou povahu. Z těchto důvodů je ve velmi těsném příbuzenském svazku s matematickými kritérii úspěchu, která — jak uvidíte — jsou téměř zcela estetické povahy. Nyní tedy srovnáváme matematiku s empirickou vědou, která má k ní nejblíže a s níž má, jak jsem doufejme ukázal, mnoho společného — s teoretickou fyzikou. Odlišnosti ve skutečných procedurálních způsobech jsou nicméně značné a podstatné. Cíle teoretické fyziky jsou vcelku dány „zvnějška", ve většině případech potřebami experimentální fyziky. Téměř vždy vznikají z potřeby vyřešit nějaký problém; predikční a sjednocující úspěchy se obvykle dostavují až dodatečně. Je-li nám snad dovoleno přirovnání, tak se postup vpřed (predikce a unifikace) dostavuje v průběhu zkoumání, kterému nutně předchází boj proti nějakým předcházejícím nesnázím (obvykle proti zdánlivé kontradikci v daném systému). Součástí činnosti teoretického fyzika je vyhledávání takových překážek, které dávají naději na možnost nějakého „průlomu". Jak jsem uvedl, pramení tyto potíže obvykle z experimentování, ale někdy jsou to kontradikce mezi různými částmi uznávaného jádra teorie samé. To lze ovšem doložit četnými příklady.

Michelsonův pokus vedoucí k speciální relativitě, obtíže spjaté s jistými ionizačními potenciály a jistými spektroskopickými strukturami, které vedly ke kvantové mechanice, dokládají první případ; konflikt mezi speciální relativitou a Newtonovou gravitační teorií vedoucí k obecné relativitě dokládá druhý, méně častý případ. V každém případě jsou problémy teoretické fyziky objektivně dané; ačkoliv kritéria, která ovládají využití úspěchu, jsou hlavně estetická, jak jsem již uvedl, je část problému a to, co jsem shora nazval původním „průlomem", přece jen holou, objektivní skutečností. Předmět teoretické fyziky je tudíž téměř vždy neobyčejně soustředěný; téměř vždy se úsilí teoretických fyziků z větší části soustřeďovalo na ne více než jednu nebo dvě velmi ostře ohraničené oblasti — např. na kvantovou teorii v dvacátých letech a počátkem třicátých let našeho století a na elementární částice a strukturu jader od poloviny třicátých let.

V matematice je situace zcela odlišná. Matematika se člení ve velký počet odvětví, která se navzájem dalece rozcházejí povahou, stylem, cíly a vlivem. Projevuje se zde pravý opak oné krajní koncentrace teoretické fyziky. Dobrý teoretický fyzik může ještě dnes mít účinné znalosti o více než polovině svého předmětu zkoumání. Pochybuji, že kterýkoli dnes žijící matematik má valný vztah k více než čtvrtině. „Objektivně" dáno, mohou se vynořit „důležité" problémy, jakmile se nějaké matematické odvětví poměrně daleko rozvinulo a jestliže zabředlo před nějakou překážkou do vážných nesnází. Avšak dokonce ani potom matematikovi vpodstatě nic nebrání v rozhodnutí zabývat se tím nebo toho nechat a věnovat se něčemu jinému, zatímco v teoretické fyzice je obvykle nějakým „důležitým" problémem konflikt, rozpor, který „musí" být vyřešen. Matematik má k disposici velkou rozmanitost oblastí, jimiž se může zabývat, a požívá velmi značné volnosti, jak s nimi naloží. Abych se dostal k rozhodující okolnosti: Myslím, že je správné, řeknu-li, že jeho kritéria výběru a také kritéria úspěchu jsou hlavně estetické povahy. Uvědomuji si, že toto tvrzení je problematické a že je nelze „dokázat" nebo opravdu příliš daleko dospět při jeho odpodstatnění bez rozboru četných specifických, odborně náročných příkladů. To by si opět vyžadovalo vysoce odborného typu diskuse, pro který zde není vhodná příležitost. Postačí, řeknu-li, že estetický charakter je zde dokonce ještě význačnější než v příkladech, o nichž jsem se shora zmínil v případě teoretické fyziky. Očekáváme, že matematický teorém nebo matematické teorie nebudou jen jednoduše a elegantně popisovat a klasifikovat četné apriorní nestejnorodé speciální případy. Očekáváme též „eleganci" v její „architektonické", strukturální tvářnosti. Konstatovat problém je snadné, ujasnit si ho a všechny pokusy přiblížit se k němu jsou velmi obtížné, pak se opět objeví nějaký velmi překvapující obrat, jenž usnadňuje přístup nebo nějakou jeho část, atd. Jsou-li i dedukce zdlouhavé a složité, měly by zde být nějaké jednoduché obecné principy, které „vysvětlují" komplikace a okliky, redukují zdánlivou libovolnost na několik jednoduchých vůdčích motivací, atd. Tato kritéria jsou jasně kritériy každého tvořivého umění, a existence nějakého empirického, pozemského motivu, tvořícího podklad — často velmi vzdálený podklad — který se ztrácí v estetizujícím vývoji a spěje k nespočetně spletitým variantám — to vše je mnohem bližší atmosféře umění jako takovému než atmosféře empirických věd.

Povšimnete si, že jsem se ani nezmínil o srovnání matematiky s experimentálními nebo popisnými vědami. Zde jsou odlišnosti metody a obecné atmosféry příliš očividné.

Myslím, že se poměrně spolehlivě přibližujeme pravdě — která je natolik složitá, že nepřipouští nic než aproximaci — soudím-li, že matematické ideje mají původ v empirii, třebaže rodokmen je někdy dlouhý a nejasný. Ale jakmile je takto jednou pojímáme, začíná předmět matematiky žít svůj vlastní zvláštní život a dá se lépe srovnat s tvořivým životem, ovládaným téměř výhradně estetickými motivacemi než s čímkoli jiným, zvláště pak s empirickou vědou. Domnívám se, že je tu však ještě další okolnost, kterou je třeba zdůraznit. Když se matematická disciplína daleko vzdálí od svého empirického zdroje nebo ještě více, je-li druhá či třetí generace pouze nepřímo inspirována myšlenkami, které vycházejí z „reality", je ohrožena velmi vážným nebezpečím. Stává se více a více čistě jen estetizující, stále více výhradně jen uměním pro umění.

To nemusí být špatné, je-li oblast obklopena souvztažnou tématikou, která má ještě užší empirické spojitosti nebo je-li disciplína pod vlivem lidí s výjimečně dobře vyvinutým citem. Je tu však vážné nebezpečí, že se tématika bude rozvíjet cestou nejmenšího odporu, že se proud, tak vzdálený od svého zdroje, rozdělí v množství bezvýznamných potůčků a že se disciplína změní v desorganizovanou spoustu podrobností a složitostí. Jinými slovy, při velké vzdálenosti od jejího empirického zdroje nebo když byla velmi „abstraktně" pěstována, hrozí matematické tématice nebezpečí degenerace. Na počátku je styl obvykle klasický; jestliže se objeví známky toho, že se stává barokním, je to poplašné znamení. Bylo by snadné uvést příklady, sledovat specifický vývin v barokní a velmi vysoce barokní styl, ale bylo by to opět příliš odborné.

V každém případě kdykoli se dospěje do tohoto stadia, zdá se mi být jediným lékem omlazující návrat k prameni: další injekce víceméně bezprostředních empirických idejí. Jsem přesvědčen, že to byla nutná podmínka, aby se uchovala svěžest a vitalita tématiky a že se to stejně osvědčí v budoucnosti.

Přeložil Karel Berka