Aplikace matematiky

G. N. Pykhteev

Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 4, 351–373

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102974

ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ ПО РАЗОМКНУТОМУ КОНТУРУ

Г. Н. ПЫХТЕЕВ

(Поступило в редакцию 3/2 1964.)

В статье даны методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру, основанные на выражении (действительной) плотности интегралов с помощью введеной автором изображающей функции.

Основная трудность практического решения многих краевых задач и сингулярных интегральных уравнений, как известно [1, 2], состоит в вычислении интегралов типа Коши. Методы вычисления этих интегралов мало разработаны как в практическом, так и в теоретическом отношении, и поэтому всякое продвижение в этой области представляется нам интересным. Особый интерес с нашей точки зрения представляют методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру, так как они наиболее часто встречаются при решении различных задач механики сплошной среды. Простейшими и наиболее распространенными в задачах механики интегралами типа Коши по разомкнутому контуру являются интегралы с действительной плотностью, взятые вдоль отрезка прямой, которые при помощи простейших преобразований могут быть приведены к любому из двух интегралов

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t - z}\,\mathrm{d}t\,, \quad z \mathrel{\overline{\in}} [-1, 1] \tag{1}$$

или

$$\Psi(z) = \frac{\sqrt{(z^2 - 1)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t - z}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}}\,, \quad z \mathrel{\overline{\in}} [-1, 1] \tag{2}$$

а их главные значения — к любому из двух сингулярных интегралов

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t - x}\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [-1, 1] \tag{3}$$

или

$$I(x) = \frac{\sqrt{(1 - x^2)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t - x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}}\,, \quad x \in [-1, 1]\,, \tag{4}$$

где $f(t)$ — действительная функция, а $\sqrt{(z^2 - 1)}$ — ветвь, аналитическая на разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$ оси x плоскости $z = x + iy$ и такая, что $\sqrt{(z^2 - 1)} = z + 0(z^{-1})$ при больших z. Очевидно, всякую краевую задачу для разомкнутого контура при помощи некоторого конформного преобразования можно свести к аналогичной задаче для отрезка $[-1, 1]$ действительной оси, т.е. в конечном счете выразить её решение через интегралы (1)—(4). Точно также любой интеграл типа Коши по разомкнутому контуру или его главное значение можно привести к такому интегралу, взятому вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси, основная часть которого, сохраняющая все свойства исходного интеграла, выражается через интегралы (1), (2) или (3), (4). Указанные два обстоятельства, а также простота интегралов (1)—(4) и их приложение в механике говорят в пользу того, что целесообразно развивать методы вычисления прежде всего именно этих интегралов. В связи с этим, как и в случае обычных римановых интегралов, сразу же возникает задача — выявить все возможные случаи, когда интегралы (1)—(4) выражаются через элементарные или какие-либо известные, хорошо затабулированные функции, т.е. встает вопрос о точных методах вычисления интегралов (1)—(4). Последнему вопросу и посвящена настоящая работа, в которой даются точные методы вычисления интегралов (1)—(4), основанные на некоторых свойствах аналитических и мероморфных внутри круга функций или их логарифмов. Изложение методов иллюстрируется примерами, большинство которых взято из конкретных задач гидродинамики и теории упругости.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем в плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ окружность $|\zeta| = 1$ и интеграл типа Коши

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\tau)}{\tau - \zeta} \, d\tau , \quad \zeta \,\overline{\in}\, C . \tag{5}$$

Относительно $F(\tau)$ будем предполагать, что это вообще говоря произвольная комплексная функция, но такая, что существует особый интеграл

$$\Omega(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\tau)}{\tau - \zeta_0} \, d\tau , \quad \zeta_0 \in C , \tag{6}$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши. Внутреность круга $|\zeta| < 1$ будем далее обозначать через D^+, а его внешность — через D^-.

Положим в равенстве (5) $1/\zeta$ вместо ζ, а затем составим сумму и разность интегралов $\Omega(\zeta)$ и $\Omega(\zeta^{-1})$, учитывая, что

$$\Omega(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\tau) \frac{d\tau}{\tau} ;$$

тогда после несложных преобразований получим

$$\Omega(\zeta) + \Omega(\zeta^{-1}) - \Omega(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\tau)\frac{\tau - \bar{\tau}}{\tau + \bar{\tau} - \zeta - \zeta^{-1}}\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta^{-1}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\tau)\frac{\zeta - \zeta^{-1}}{\tau + \bar{\tau} - \zeta - \zeta^{-1}}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Точно также, полагая в равенстве (6) $\bar{\zeta}_0$ вместо ζ_0 и проделывая те же самые операции над интегралами $\Omega(\zeta_0)$ и $\Omega(\bar{\zeta}_0)$, получим

$$\Omega(\zeta_0) + \Omega(\bar{\zeta}_0) - \Omega(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\tau)\frac{\tau - \bar{\tau}}{\tau + \bar{\tau} - \zeta_0 - \bar{\zeta}_0}\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\Omega(\zeta_0) - \Omega(\bar{\zeta}_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\tau)\frac{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0}{\tau + \bar{\tau} - \zeta_0 - \bar{\zeta}_0}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Пусть Γ^+ есть верхняя, а Γ^- – нижняя полуокружность окружности C, а $F^+(\tau)$ и $F^-(\tau)$ значения $F(\tau)$ соответственно на Γ^+ и Γ^-; тогда легко видеть, что любой из написанных выше интегралов по окружности C можно представить в виде суммы двух интегралов, один из которых берется по дуге Γ^+, а другой – по дуге Γ^-. Любой интеграл по дуге Γ^+ подстановкой $\tau' = \bar{\tau}$ приводится к интегралу по дуге Γ^-, в частности

$$\int_{\Gamma^+} F^+(\tau)\frac{\tau - \bar{\tau}}{\tau + \bar{\tau} - w}\frac{d\tau}{\tau} = -\int_{\Gamma^-} F^+(\bar{\tau})\frac{\tau - \bar{\tau}}{\tau + \bar{\tau} - w}\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\int_{\Gamma^+} F^+(\tau)\frac{1}{\tau + \bar{\tau} - w}\frac{d\tau}{\tau} = \int_{\Gamma^-} F^+(\bar{\tau})\frac{1}{\tau + \bar{\tau} - w}\frac{d\tau}{\tau},$$

где w – любое число, действительное или комплексное. В силу сказанного будем иметь следующие равенства для интегралов $\Omega(\zeta)$ и $\Omega(\zeta^{-1})$

$$\Omega(\zeta) + \Omega(\zeta^{-1}) - \Omega(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-}[F^-(\tau) - F^+(\bar{\tau})]\frac{\tau - \bar{\tau}}{\tau + \bar{\tau} - \zeta - \zeta^{-1}}\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\Omega(\zeta) - \Omega(\zeta^{-1}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-}[F^-(\tau) + F^+(\bar{\tau})]\frac{\zeta - \zeta^{-1}}{\tau + \bar{\tau} - \zeta - \zeta^{-1}}\frac{d\tau}{\tau},$$

и аналогичные равенства для интегралов $\Omega(\zeta_0)$ и $\Omega(\bar{\zeta}_0)$

$$\Omega(\zeta_0) + \Omega(\bar{\zeta}_0) - \Omega(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-}[F^-(\tau) - F^+(\bar{\tau})]\frac{\tau - \bar{\tau}}{\tau + \bar{\tau} - \zeta_0 - \bar{\zeta}_0}\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\Omega(\zeta_0) - \Omega(\bar{\zeta}_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-}[F^-(\tau) + F^+(\bar{\tau})]\frac{\zeta_0 - \bar{\zeta}}{\tau + \bar{\tau} - \zeta_0 - \bar{\zeta}_0}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Произведем теперь в полученных равенствах замену переменных

$$(7)\qquad \tau = \tau(t) = t - i\sqrt{(1 - t^2)},\ t \in [-1, 1]\,;$$
$$\zeta_0 = \zeta_0(x) = x - i\sqrt{(1 - x^2)},\ x \in [-1, 1]\,;$$

$$(8)\qquad \zeta = \zeta(z) = z - \sqrt{(z^2 - 1)}\,,\quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1]\,,$$

где $\sqrt{(z^2 - 1)}$ – ветвь, определенная нами ранее; тогда после некоторых преобразований получим соотношения

$$(9)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{F^-(\tau) - F^+(\bar{\tau})}{t - z}\,\mathrm{d}t = \Omega(\zeta) + \Omega(\zeta^{-1}) - \Omega(0)\,,$$

$$\frac{\sqrt{(z^2 - 1)}}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{F^-(\tau) + F^+(\bar{\tau})}{t - z}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}} = -\,\Omega(\zeta) + \Omega(\zeta^{-1})\,,$$

связывающие интегралы типа (1), (2) с интегралом (5), а также соотношения

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{F^-(\tau) - F^+(\bar{\tau})}{t - x}\,\mathrm{d}t = \Omega(\zeta_0) + \Omega(\bar{\zeta}_0) - \Omega(0)\,,$$

$$\frac{\sqrt{(1 - x^2)}}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{F^-(\tau) + F^+(\bar{\tau})}{t - x}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}} = \Omega(\zeta_0) - \Omega(\bar{\zeta}_0),$$

связывающие интегралы типа (3), (4) с интегралом (6). Из этих соотношений мы будем исходить при построении излагаемых ниже методов вычисления интегралов (1)–(4).

2. ИЗОБРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ. ПРЯМОЙ И ОБРАТНЫЙ МЕТОД

Будем называть любую функцию $F(\zeta)$, определенную в круге $|\zeta| < 1$, изображением плотности $f(x)$ интегралов (1), (3) в круге $|\zeta| \leqq 1$ или *изображающей функцией интегралов* (*1*), (*3*), если её предельные значения $F(\zeta_0)$ на окружности C удовлетворяют условиям

$$(11)\qquad \operatorname{Re} F^-(\zeta_0) - \operatorname{Re} F^+(\bar{\zeta}_0) = 0\,,\quad \zeta_0 \in \Gamma^-\,,$$

$$(12)\qquad \operatorname{Im}\{F^-[\zeta_0(x)] - F^+[\bar{\zeta}_0(x)]\} = 2f(x)\,,\quad x \in [-1, 1]\,.$$

Аналогично, любую функцию $F(\zeta)$, $|\zeta| < 1$, будем называть изображением плотности $f(x)$ интегралов (2), (4) в круге $|\zeta| \leq 1$ или *изображающей функцией интегралов (2), (4)*, если её предельные значения $F(\zeta_o)$ на окружности C удовлетворяют условиям

$$(13)\qquad \operatorname{Im} F^-(\zeta_0) + \operatorname{Im} F^+(\bar{\zeta}_0) = 0\,,\quad \zeta_0 \in \Gamma^-\,,$$

$$(14)\qquad \operatorname{Re}\{F^-[\zeta_0(x)] + F^+[\bar{\zeta}_0(x)]\} = 2f(x)\,,\quad x \in [-1, 1]\,.$$

Интегралы (1), (2) и (3), (4) легко выразить через интегралы (5) и (6) от предельных значений соответствующих им изображающих функций. Действительно, если $F(\zeta_0)$ является предельным значением изображающей функции интегралов (1), (3), то из соотношений (9), (10) и равенств (11), (12) следует, что

$$(15) \qquad \begin{aligned} \Phi(z) &= \Omega[\zeta(z)] + \Omega[\zeta^{-1}(z)] - \Omega(0)\,, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1]\,, \\ I(x) &= \Omega[\zeta_0(x)] + \Omega[\bar{\zeta}_0(x)] - \Omega(0)\,, \quad x \in [-1, 1]\,, \end{aligned}$$

Если же функция $F(\zeta_0)$ является предельным значением изображающей функции интегралов (2), (4), то из соотношений (9), (10) и равенств (13), (14) вытекает, что

$$(16) \qquad \begin{aligned} \Psi(z) &= -\,\Omega[\zeta(z)] + \Omega[\zeta^{-1}(z)]\,, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1]\,, \\ i\,I(x) &= -\,\Omega[\zeta_0(x)] + \Omega[\bar{\zeta}_0(x)]\,, \quad x \in [-1, 1]\,. \end{aligned}$$

Пусть теперь изображающая функция интегралов (1)–(4) такова, что интегралы $\Omega(\zeta)$ и $\Omega(\zeta_0)$ вычисляются точно, тогда, в силу равенств (15), (16), и интегралы (1)–(4) также вычисляются точно. На последнем факте и основаны предлагаемые нами методы вычисления интегралов (1)–(4). Эти методы мы разделяем на прямой и обратный. *Прямой метод* состоит в том, что по заданной плотности $f(x)$ интегралов (1)–(4) ищется их изображающая функция $F(\zeta)$ в таком классе, для которого интегралы $\Omega(\zeta)$ и $\Omega(\zeta_0)$ вычисляются точно. *Обратный метод* состоит в том, что задается изображающая функция $F(\zeta)$ в каком – нибудь определенном классе, для которого интегралы $\Omega(\zeta)$ и $\Omega(\zeta_0)$ вычисляются точно, а затем находятся соответствующие ей интегралы (1)–(4). Обратный метод полезен в том отношении, что он дает возможность составить таблицы интегралов (1)–(4) такие же, какие составлены для обычных римановых интегралов [3]. Очевидно, предлагаемые методы во многом зависят от свойств того класса, в котором ищется изображающая функция, а подбор этой функции во многом зависит от интуиции.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ (1)–(4) В СЛУЧАЕ, КОГДА ИЗОБРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЛИ МЕРОМОРФНОЙ

Из теории краевых задач функций комплексного переменного хорошо известны свойства аналитических функций, которые мы сформулируем в виде следующей леммы:

Лемма 1. 1) *Если однозначная непрерывная функция $F(\zeta_0)$ есть краевое значение однозначной аналитической в D^+ функции $F(\zeta)$, то*

$$(17) \qquad \Omega(\zeta) = \begin{cases} F(\zeta), & \zeta \in D^+ \\ 0\;, & \zeta \in D^- \end{cases}.$$

2) *Для того, чтобы $F(\zeta_0)$, удовлетворяющая условию Гёльдера, была краевым значением однозначной функции $F(\zeta)$, аналитической в D^+, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$2\Omega(\zeta_0) = F(\zeta_0)\,, \quad \zeta_0 \in C\,. \tag{18}$$

Первое свойство есть известная формула Коши. Доказательство второго свойства можно найти в любой монографии по краевым задачам теории функций [1, 2]. Из леммы 1 и соотношений (15), (16) вытекает

Теорема 1. *Если изображающая функция интегралов* (1)—(4) *является однозначной и аналитической в круге* $|\zeta| < 1$, *причем её предельные значения на окружности* $|\zeta| = 1$ *удовлетворяют условию Гёльдера, то имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= F[\zeta(z)] - F(0)\,, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1]\,, \\ I(x) &= \operatorname{Re} F[\zeta_0(x)] - F(0)\,, \quad x \in [-1, 1]\,, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$f(x) = \operatorname{Im} F[\zeta_0(x)]\,, \quad x \in [-1, 1]\,, \tag{19'}$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= -\, F[\zeta(z)]\,, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1]\,, \\ I(x) &= -\operatorname{Im} F[\zeta_0(x)]\,, \quad x \in [-1, 1]\,, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$f(x) = \operatorname{Re} F[\zeta_0(x)]\,, \quad x \in [-1, 1]\,. \tag{20'}$$

Доказательство. Изображающая функция $F(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы I, а поэтому для неё справедливы формулы (17), (18), причем первую из них для точек, симметричных относительно окружности C, можно записать в виде

$$\Omega(\zeta) = F(\zeta) \quad \text{и} \quad \Omega(\zeta^{-1}) = 0 \quad \text{при} \quad |\zeta| < 1\,. \tag{21}$$

Очевидно, что эта функция, в силу условий (11) или (13), принимает в круге $|\zeta| \leqq 1$ в сопряженных относительно действительного диаметра точках сопряженные значения, т.е.

$$F(\zeta) - F(\bar{\zeta}) = 2i \operatorname{Im} F(\zeta),\ |\zeta| \leqq 1\,; \quad F(\zeta) + F(\bar{\zeta}) = 2 \operatorname{Re} F(\zeta).\ |\zeta| \leqq 1\,, \tag{22}$$

откуда, в силу условий (12), (14), следует, что имеют место равенства (19'), (20'). Подставим выражения (21) и (18) в соотношения (15) и (16); тогда, учитывая формулы (21), (19') и (20'), получим искомые равенства (19), (20).

Свойства аналитических функций, изложенные в лемме I, переносятся с некоторыми изменениями и на мероморфные функции. Сформулируем их в виде следующей леммы:

Лемма 2. 1) *Если однозначная функция* $F(\zeta_0)$ *есть краевое значение однозначной, мероморфной в* D^+ [1]) *функции* $F(\zeta)$, *то*

$$\Omega(\zeta)=\begin{cases}F(\zeta)-R(\zeta), & \zeta\in D^+\\ -R(\zeta) & ,\ \zeta\in D^-\end{cases}, \tag{23}$$

где $R(\zeta)$ — *сумма главных частей разложения* $F(\zeta)$ *в окрестностях полюсов.*

2) *Для того, чтобы* $F(\zeta_0)$, *удовлетворяющая условию Гёльдера, была краевым значением однозначной функции* $F(\zeta)$, *мероморфной в* D^+, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$2\Omega(\zeta_0)=F(\zeta_0)-2R(\zeta_0),\quad \zeta_0\in C. \tag{24}$$

Доказательство данной леммы основывается на известной теореме Коши и формулах Сохоцкого; указание на этот счет можно найти в монографии по краевым задачам теории функций [1]. Используя лемму 2 и соотношения (15), (16), нетрудно показать, что имеет место

Теорема 2. *Если изображающая функция интегралов* (1)—(4) *является однозначной и мероморфной в круге* $|\zeta|<1$, *причем предельные значения на окружности* $|\zeta|=1$ *удовлетворяют условию Гёльдера, то имеют место равенства*

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=F[\zeta(z)]-R[\zeta(z)]-R[\zeta^{-1}(z)]-F_0(0),\quad z\bar{\in}[-1,1],\\ I(x)&=\operatorname{Re}F[\zeta_0(x)]-2\operatorname{Re}R[\zeta_0(x)]-F_0(0),\quad x\in[-1,1],\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$f(x)=\operatorname{Im}F[\zeta_0(x)],\quad x\in[-1,1], \tag{19''}$$

$$\begin{aligned}\Psi(z)&=-F[\zeta(z)]+R[\zeta(z)]-R[\zeta^{-1}(z)],\quad z\bar{\in}[-1,1],\\ I(x)&=-\operatorname{Im}F[\zeta_0(x)]+2\operatorname{Im}R[\zeta_0(x)],\quad x\in[-1,1],\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$f(x)=\operatorname{Re}F[\zeta_0(x)],\quad x\in[-1,1], \tag{20''}$$

в которых $F_0(\zeta)=F(\zeta)-R(\zeta)$.

Доказательство. Изображающая функция $F(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2, а поэтому для неё справедливы формулы (23), (24), причем первую из них для точек, симметричных относительно окружности C, можно записать в виде

$$\Omega(\zeta)=F(\zeta)-R(\zeta)\quad\text{и}\quad \Omega(\zeta^{-1})=-R(\zeta^{-1})\quad\text{при}\quad |\zeta|<1. \tag{27}$$

Также, как и в случае аналитической функции, для рассматриваемой мероморфной функции $F(\zeta)$ справедливы соотношения (22) и вытекающие из них

[1]) Под мероморфной в данной области D функцией здесь и всюду в дальнейшем понимается мероморфная функция с конечным числом полюсов в D.

равенства (19″), (20″). Очевидно, функция $R(\zeta)$ обладает теми же свойствами, что и $F(\zeta)$, и, следовательно,

$$(22) \qquad R(\zeta) - R(\bar{\zeta}) = 2i \operatorname{Im} R(\zeta), \ |\zeta| \leqq 1 \ ; \quad R(\zeta) + R(\bar{\zeta}) = 2 \operatorname{Re} R(\zeta), \ |\zeta| \leqq 1 \ .$$

Подставим выражения (27) и (24) в выражения (15), (16); тогда, учитывая равенства (22), (19″), (20″) и (22), получим две искомые формулы (25), (26).

Из доказанных теорем 1 и 2 следует, что, если изображающая функция интегралов (1)–(4) найдена в классе аналитических или мероморфных функций, то эти интегралы вычисляются точно по формулам (19), (20) или (25), (26). Изображающую функцию в названных классах можно определить как функцию, удовлетворяющую любому из условий

$$(28) \qquad \operatorname{Re} F(\zeta_0) = \operatorname{Re} F(\bar{\zeta}_0), \ \zeta_0 \in C \quad \text{или} \quad \operatorname{Jm} F(\zeta_0) = - \operatorname{Jm} F(\bar{\zeta}_0), \ \zeta_0 \in C$$

и равенству (19′), если рассматриваются интегралы (1), (3) или равенству (20′), если рассматриваются интегралы (2), (4). Очевидно, для аналитической или мероморфной функции $F(\zeta)$ комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ любое из соотношений (28) эквивалентно соотношению

$$(29) \qquad \operatorname{Im} F(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \,,$$

а поэтому вместо условий (28) можно пользоваться условием (29). При этом следует заметить, что при вычислении интегралов (1)–(4) обратным методом от изображающей функции (если она аналитична или мероморфна) нужно потребовать только выполнения одного из условий (28) или условия (29).

Следует также заметить, что некоторые результаты, сформулированные в теореме 1, другим способом и при более сильных предположениях были получены нами ранее [4].

4. ПРИМЕРЫ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЕ ОБРАТНЫИ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ (1)–(4)

Приведем несколько примеров вычисления интегралов (1)–(4) обратным методом в случае, когда изображающая функция является аналитической или мероморфной. При этом мы будем иметь в виду, что, в силу указанного выше, от изображающей функции достаточно потребовать выполнения условия (29).

1) Возьмем функцию

$$F(\zeta) = \zeta^n \,,$$

которая является аналитической в круге $|\zeta| \leqq 1$ и удовлетворяет условию (29). В данном случае

$$\operatorname{Re} F[\zeta_0(x)] = T_n(x) \,, \quad \operatorname{Im} F[\zeta_0(x)] = - U_n(x) \,,$$
$$F[\zeta(z)] = (z - \sqrt{(z^2 - 1)})^n \,,$$

где $T_n(x)$ и $U_n(x)$ — полиномы и функции Чебышева:

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad U_n(x) = \sin n \arccos x .$$

Подставляя найденные выражения в формулы (19)–(20) и учитывая, что $F(0) = 0$, получим

$$(30) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{t - z}\,\mathrm{d}t = -\left(z - \sqrt{(z^2 - 1)}\right)^n, \quad z \bar{\in} [-1, 1] ;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{U_n(t)}{t - x}\,\mathrm{d}t = -T_n(x), \quad x \in [-1, 1] ,$$

$$\frac{\sqrt{(z^2 - 1)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{t - z}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}} = -\left(z - \sqrt{(z^2 - 1)}\right)^n, \quad z \bar{\in} [-1, 1] ,$$

$$\frac{\sqrt{(1 - x^2)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{t - x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}} = U_n(x), \quad x \in [-1, 1] .$$

2) Возьмем другую функцию $F(\zeta) = e^{\alpha\zeta}$ (α — действительное число, $\alpha^2 \leqq 1$), которая также является аналитической в круге $|\zeta| \leqq 1$ и удовлетворяет условию (13). В этом случае

$$\operatorname{Re} F[\zeta_0(x)] = e^{\alpha x}\cos\left[\alpha\sqrt{(1 - x^2)}\right], \quad \operatorname{Im} F[\zeta_0(x)] = -e^{\alpha x}\sin\left[\alpha\sqrt{(1 - x^2)}\right],$$

$$F[\zeta(z)] = e^{\alpha[z - \sqrt{(z^2 - 1)}]}, \quad F(0) = 1 .$$

После подстановки полученных выражений в формулы (19)–(20) будем иметь

$$(31) \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha t}\sin\left[\alpha\sqrt{(1 - t^2)}\right]}{t - z}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{\alpha[z - \sqrt{(z^2 - 1)}]}, \quad z \bar{\in} [-1, 1] ,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha t}\sin\left[\alpha\sqrt{(1 - t^2)}\right]}{t - x}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{\alpha x}\cos\left[\alpha\sqrt{(1 - x^2)}\right], \quad x \in [-1, 1] ,$$

$$\frac{\sqrt{(z^2 - 1)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha t}\cos\left[\alpha\sqrt{(1 - t^2)}\right]}{t - z}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}} = -e^{\alpha[z - \sqrt{(z^2 - 1)}]}, \quad z \bar{\in} [-1, 1] ,$$

$$\frac{\sqrt{(1 - x^2)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{e^{\alpha t}\cos\left[\alpha\sqrt{(1 - t^2)}\right]}{t - x}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)}} = e^{\alpha x}\sin\left[\alpha\sqrt{(1 - x^2)}\right],$$

$$x \in [-1, 1] .$$

3) Рассмотрим теперь функцию

$$F(\zeta) = \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^3 \operatorname{arctg}\left(\zeta \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) .$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет условию (13) и является аналитической в круге $|\zeta| \leqq 1$ всюду, кроме точки $\zeta = 0$, где она имеет полюс второго порядка. Очевидно, здесь нужно воспользоваться формулами (25)–(26). После несложных преобразований находим

$$F[\zeta(z)] = -8(z^2-1)^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg}\left(\left[z-\sqrt{(z^2-1)}\right] \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\operatorname{Re} F[\zeta_0(x)] = 4(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{Arth}\left[\sqrt{(1-x^2)}\sin\alpha\right],$$

$$\operatorname{Im} F[\zeta_0(x)] = -4(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg}(x \operatorname{tg}\alpha).$$

Нетрудно показать, что $F(\zeta) = -\zeta^{-2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha + 4\beta(\alpha) + 0(\zeta^2)$, где

$$\beta(\alpha) = \frac{1}{4}\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\right),$$

откуда $R(\zeta) = -\zeta^{-2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ и, следовательно,

$$R[\zeta(z)] = -\left[z+\sqrt{(z^2-1)}\right]^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad R[\zeta^{-1}(z)] = -\left[z-\sqrt{(z^2-1)}\right]^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{Re} R[\zeta_0(x)] = -(2x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{Im} R[\zeta_0(x)] = 2x\sqrt{(1-x^2)}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Составляя функцию $F_0(\zeta)$ и полагая $\zeta = 0$, будем иметь $F_0(0) = 4\beta(\alpha)$. Подставим в формулы (25)–(26) найденные значения входящих в них величин; тогда получим точные значения следующих четырех интегралов:

$$(32)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}(t\operatorname{tg}\alpha)}{t-z}\,\mathrm{d}t = 2(z^2-1)^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left\{\left[z-\sqrt{(z^2-1)}\right]\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right\} - \frac{1}{2}(2z^2-1)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \beta(\alpha), \quad z \,\overline{\in}\, [-1,1],$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}(t\operatorname{tg}\alpha)}{t-x}\,\mathrm{d}t = -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\operatorname{Arth}\left[\sqrt{(1-x^2)}\sin\alpha\right] - \frac{1}{2}(2x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \beta(\alpha), \quad x \in [-1,1],$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)\operatorname{Arth}\left[\sqrt{(1-t^2)}\sin\alpha\right]}{t-z}\,\mathrm{d}t = 2(z^2-1)\operatorname{arctg}\left\{\left[z-\sqrt{(z^2-1)}\right]\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right\} - z\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad z \,\overline{\in}\, [-1,1],$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)\operatorname{Arth}\left[\sqrt{(1-t^2)}\sin\alpha\right]}{t-x}\,\mathrm{d}t = (1-x^2)\operatorname{arctg}(x\operatorname{tg}\alpha) - x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

5. РАСШИРЕНИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ

При доказательстве теорем 1 и 2 относительно изображающей функции $F(\zeta)$ предполагалось, что её предельные значения $F(\zeta_0)$ на окружности C удовлетворяют условию Гёльдера. Это предположение можно ослабить. Дело в том, что условие Гёдьдера используется нами при доказательстве лемм 1 и 2, на которых основываются теоремы 1 и 2, и накладывается для того, чтобы: 1) функция $F(\zeta)$ или её регулярная часть, если она мероморфна была представима интегралом Коши, 2) предельные значения интеграла $\Omega(\zeta)$ существовали и для них были справедливы формулы Сохоцкого. Однако имеются более широкие классы функций, для которых имеют место оба указанных факта, а тогда для этих классов функций имеют место теоремы 2 и 1. Росмотрим, например, класс H_p, определяемый следующим образом [5]: функция $F(\zeta)$, $\zeta = re^{i\Theta}$ аналитическая в единичном круге, принадлежит классу H_p $(p > 0)$, если

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\Theta})|^p \, \mathrm{d}\Theta = H_p(F) < \infty .$$

Известно [5, 6], что функция $F(\zeta)$, принадлежащая классу H_p, $p > 1$, представима интегралом Коши и её предельные значения $F(\zeta_0)$ на окружности C существуют почти всюду и принадлежат классу L_p, $p > 1$ (класс функций, интегрируемых в степени по Лебегу). С другой стороны известно [1, 7], что, если $F(\zeta_0) \in L_p$, $p > 1$, то интеграл $\Omega(\zeta_0)$ принадлежит тому же классу и предельные значения интеграла $\Omega(\zeta)$ по всем некасательным путям существуют почти всюду и для них справедливы формулы Сохоцкого. Таким образом, для функции $F(\zeta) \in H_p$, $p > 1$ справедливы теоремы 1 и 2, т.е. справедливы следующие два утверждения:

1. *Если изображающая функция* $F(\zeta)$ *однозначна в круге* $|\zeta| \leqq 1$ *и принадлежит классу* H_p, $p > 1$, *то имеют место равенства* (19)–(20).

2. *Если изображающая функция* $F(\zeta)$ *мероморфна в круге* $|\zeta| < 1$, *и её регулярная часть* $F_0(\zeta) = F(\zeta) - R(\zeta)$ *принадлежит классу* Hp, $p > 1$, *то имеют место равенства* (25)–(26).

Полученное ослабление условий, накладываемых на функцию $F(\zeta)$, дает возможность значительно расширить применимость формул (19)–(20), (25)–(26) и выявить новые интегралы (1)–(4), вычисляемые в замкнутом виде. Поясним сказанное на примере. Возьмем функцию

$$F(\zeta) = \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \tag{33}$$

аналитическую в круге $|\zeta| < 1$ и принимающую на окружности $|\zeta| = 1$ значения

$$F(\zeta_0) = \ln \frac{1 + \zeta_0}{1 - \zeta_0} = \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} \right| \pm i \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_0 = e^{i\Theta}, \tag{34}$$

где берется знак плюс на верхней, а знак минус на нижней полуокружности. Эта функция не удовлетворяет всем условиям теоремы 1, так как не является даже ограниченной в единичном круге, но нетрудно показать, что она принадлежит всем классам H_p, $p > 0$ [5], а поэтому на основании сформулированного выше предложения 1 для неё имеют место соотношения (19)–(20). Полагая $\zeta_0 = \zeta_0(x)$ и $\zeta = \zeta(z)$ в равенствах (34) и (33), будем иметь

$$\operatorname{Re} F[\zeta_0(x)] = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,, \quad \operatorname{Im} F[\zeta_0(x)] = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$F[\zeta(z)] = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{-1+z}\,,$$

откуда, используя формулы (19)–(20) и учитывая, что $F(0) = 0$, получим точные выражения для следующих четырех интегралов:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t-z} = -\ln\frac{1+z}{-1+z}\,, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1]\,, \tag{35}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t-x} = -\ln\frac{1+x}{1-x}\,, \quad x \in [-1, 1]\,,$$

$$\frac{\sqrt{(z^2-1)}}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1+t}{1-t}\,\frac{1}{t-z}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = -\ln\frac{1+z}{-1+z}\,, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1]\,,$$

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1+t}{1-t}\,\frac{1}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \pi\,, \quad x \in [-1, 1]\,.$$

6. ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛОГАРИФМА ОТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЛИ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ. ФОРМУЛА ПУАССОНА-ИЕНСЕНА

Рассмотрим функцию $W(\zeta)$, аналитическую или мероморфную в круге $|\zeta| < 1$. Логарифм от $W(\zeta)$ будет, вообще говоря, многозначной функцией, но мы будем под $\ln W(\zeta)$ везде понимать определенную ветвь. Для выделения этой ветви, введем функцию

$$\aleph_\sigma(\zeta) = \ln\zeta\,, \tag{36}$$

понимая здесь под логарифмом его однозначную ветвь, аналитическую в плоскости с разрезом, соединяющим начало координат с бесконечно – удаленной точкой и проходящим через точку $e^{i\sigma}(0 \leqq \sigma \leqq 2\pi)$окружности C, а под $\aleph_\sigma(\zeta_0)$ – – краевое значение $\aleph_\sigma(\zeta)$ на окружности C, т.е.

$$\aleph_\sigma(\zeta_0) = \ln\zeta_0\,, \quad \sigma \leqq \arg\zeta_0 < 2\pi + \sigma\,. \tag{36'}$$

Введем также функцию

$$\aleph(\zeta, a) = \ln(\zeta - a), \quad a = |a|\, e^{i\alpha}, \quad |a| \leqq 1, \tag{37}$$

понимая здесь под логарифмом его однозначную ветвь, аналитическую в плоскости с разрезом, соединяющим точку a с бесконечно – удаленной точкой и составляющим с осью абсцис угол α, а под $\aleph(\zeta_0, a)$ – краевое значение $\aleph(\zeta, a)$ на окружности C, т.е.

$$\aleph(\zeta_0, a) = \ln(\zeta_0 - a), \quad \alpha \leqq \arg \zeta_0 < 2\pi + \alpha. \tag{37'}$$

Пусть функция $W(\zeta)$ имеет в круге $|\zeta| < 1$ n нулей a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ кратностей h_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и m полюсов $b_\mu(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ кратностей k_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, не совпадающих с началом координат, и пусть γ есть порядок $W(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$; тогда под $\ln W(\zeta)$ мы будем понимать определенную ветвь такую, что функция

$$\ln W(\zeta) - \aleph(\zeta) \tag{38}$$

где

$$\aleph(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \aleph(\zeta, a_\nu) - \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu \aleph(\zeta, b_\mu) + \gamma \aleph_\sigma(\zeta) \tag{39}$$

есть однозначная и аналитическая в круге $|\zeta| \leqq 1$. Самыми простыми функциями вида $\ln W(\zeta)$, очевидно, являются $\aleph_\sigma(\zeta)$ и $\aleph(\zeta, a)$. Легко показать, что интегралы типа Коши от этих функций

$$S_\sigma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\aleph_\sigma(t)}{t - \zeta}\, dt \quad \text{и} \quad S(\zeta, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\aleph(t, a)}{t - \zeta}\, dt$$

вычисляются точно, а именно:

$$S_\sigma(\zeta) = \begin{cases} \aleph(\zeta, e^{i\sigma}), \ \zeta \in D^+ \\ \aleph(\zeta, e^{i\sigma}) - \aleph_\sigma(\zeta), \ \zeta \in D^- ; \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2S_\sigma(\zeta_0) &= 2\aleph(\zeta_0, e^{i\sigma}) - \\ &- \aleph_\sigma(\zeta_0), \ \zeta_0 \in C ; \end{aligned} \tag{40}$$

$$S(\zeta, a) = \begin{cases} \aleph(\zeta, e^{i\alpha}), \ \zeta \in D^+ \\ \aleph(\zeta, e^{i\alpha}) - \aleph(\zeta, a), \ \zeta \in D^- ; \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2S(\zeta_0, a) &= 2\aleph(\zeta_0, e^{i\alpha}) - \\ &- \aleph(\zeta_0, a), \ \zeta_0 \in C . \end{aligned} \tag{41}$$

Используя формулы (40), (41), нетрудно установить следующие свойства $\ln W(\zeta)$:

Лемма 3. 1) *Если* $F(\zeta_0)$ *есть краевое значение указанной выше ветви* $\ln W(\zeta)$, *то*

$$\Omega(\zeta) = \begin{cases} \ln W(\zeta) - Q(\zeta), \ \zeta \in D^+ \\ - Q(\zeta), \ \zeta \in D^- , \end{cases} \tag{42}$$

где

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(t)}{t-\zeta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\ln W(t)}{t-\zeta}\,\mathrm{d}t\,, \quad \zeta \,\bar{\in}\, C\,, \tag{43}$$

$$Q(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu[\aleph(\zeta, a_\nu) - \aleph(\zeta, e^{i\alpha_\nu})] - \tag{44}$$
$$- \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu[\aleph(\zeta, b_\mu) - \aleph(\zeta, e^{i\beta_\mu})] + \gamma[\aleph_\sigma(\zeta) - \aleph(\zeta, e^{i\sigma})]\,.$$

2) *Для того, чтобы функция* $F(\zeta_0)$, *удовлетворяющая условию Гёльдера, была краевым значением указанной выше ветви* $\ln W(\zeta)$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$2\,\Omega(\zeta_0) = F(\zeta_0) - 2\,Q(\zeta_0)\,, \quad \zeta_0 \in C\,, \tag{45}$$

где

$$\Omega(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(t)}{t-\zeta_0}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\ln W(t)}{t-\zeta_0}\,\mathrm{d}t\,, \quad \zeta_0 \in C\,. \tag{46}$$

Доказательство. 1) Функция, определяемая равенством (38), удовлетворяет всем условиям леммы 1 и, следовательно, для неё справедливы соотношения (17). Подставляя функцию (38) в эти соотношения и учитывая формулы (40) и (41), после элементарных преобразований, получим искомые равенства (42).

2) Будем обозначать предельные значения $\Omega(\zeta)$ на C из D^+ и D^- соответственно через $\Omega^+(\zeta_0)$ и $\Omega^-(\zeta_0)$. Пусть $F(\zeta_0)$ есть краевое значение $\ln W(\zeta)$; тогда имеют место равенства (42). Переходя в последних к пределу при $\zeta \to \zeta_0$ и применяя формулу Сохоцкого $\Omega^+(\zeta_0) + \Omega^-(\zeta_0) = 2\Omega(\zeta_0)$, получим соотношение (45). Пусть, обратно, имеет место соотношение (45); тогда, применяя формулу Сохоцкого $\Omega^+(\zeta_0) = (1/2)\,F(\zeta_0) + \Omega(\zeta_0)$, находим, что $F(\zeta_0) = \Omega^+(\zeta_0) + Q(\zeta_0) = \ln W(\zeta_0)$, т.е. $F(\zeta_0)$ является краевым значением определенной выше ветви $\ln W(\zeta)$.

Интересно отметить, что из формул (42) легко получить формулу Пуассона-Иенсена [5]. В самом деле, если возьмем разность значений интеграла $\Omega(\zeta)$, определяемого равенством (43), в точках ζ, $|\zeta| < 1$ и $1/\bar{\zeta}$, $|\zeta| < 1$, а затем воспользуемся соотношениями (42), то будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{1}{t-\zeta} - \frac{\bar{\zeta}}{t\bar{\zeta}-1}\right)\ln W(t)\,\mathrm{d}t = \ln W(\zeta) - Q(\zeta) + Q(1/\bar{\zeta})\,,$$

и так как

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-\zeta} - \frac{\bar{\zeta}}{t\bar{\zeta}-1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(\varphi-\Theta) + 1}\,\mathrm{d}\varphi\,;$$

$$t = e^{i\varphi},\ \zeta = re^{i\Theta}\,,$$

$$\mathrm{Re}\,[Q(\zeta) - Q(1/\bar{\zeta})] = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{h}_\nu \ln\left|\frac{\zeta - a_\nu}{1-\bar{a}_\nu\zeta}\right| - \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu \ln\left|\frac{\zeta-b_\mu}{1-\bar{b}_\mu\zeta}\right| + \gamma\ln|\zeta|\,,$$

то легко видеть, что имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |W(e^{i\varphi})| \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(\varphi - \Theta) + 1} \,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \ln \left|\frac{W(\zeta)}{\zeta^\gamma}\right| - \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \ln \left|\frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}_\nu \zeta}\right| + \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu \ln \left|\frac{\zeta - b_\mu}{1 - \bar{b}_\mu \zeta}\right|, \quad |\zeta| < 1,$$

которое и является известной формулой Пуассона-Иенсена.

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ (1)–(4) В СЛУЧАЕ, КОГДА ИЗОБРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ЛОГАРИФМОМ ОТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЛИ МЕРОМОФНОЙ ФУНКЦИИ

При помощи леммы 3 можно установить аналог теорем 1 и 2 для случая, когда изображающая функция $F(\zeta) = \ln W(\zeta)$.

Теорема 3. *Если изображающая функция интегралов* (1)–(4) *представлена в виде* $F(\zeta) = \ln W(\zeta)$, *где* $W(\zeta)$ *есть однозначная аналитическая или мероморфная в круге* $|\zeta| < 1$ *функция, предельные значения которой на окружности* $|\zeta| = 1$ *удовлетворяют условию Гёльдера, а под логарифмом понимается определенная выше ветвь, то имеют место равенства*

(47) $$\Phi(z) = F[\zeta(z)] - Q[\zeta(z)] - Q[\zeta^{-1}(z)] - F^0(0), \quad z \mathrel{\bar{\in}} [-1, 1],$$

$$I(x) = \operatorname{Re} F[\zeta_0(x)] - 2 \operatorname{Re} Q[\zeta_0(x)] - F^0(0), \quad x \in [-1, 1],$$

где

(48) $$f(x) = \operatorname{Im} F[\zeta_0(x)] = \arg W[\zeta_0(x)], \quad x \in [-1, 1],$$

(49) $$\Psi(z) = -F[\zeta(z)] + Q[\zeta(z)] - Q[\zeta^{-1}(z)], \quad z \mathrel{\bar{\in}} [-1, 1],$$

$$I(x) = -\operatorname{Im} F[\zeta_0(x)] + 2 \operatorname{Im} Q[\zeta_0(x)], \quad x \in [-1, 1],$$

где

(50) $$f(x) = \operatorname{Re} F[\zeta_0(x)] = \ln |W[\zeta_0(x)]|, \quad x \in [-1, 1],$$

в которых

(51) $$F^0(\zeta) = \ln W^0(\zeta), \quad W^0(\zeta) = \frac{(\zeta - e^{i\sigma})^\gamma}{\zeta^\gamma} \frac{|b_1|^{k_1} \cdot |b_2|^{k_2} \dots |b_m|^{k_m}}{|a_1|^{h_1} \cdot |a_2|^{h_2} \dots |a_n|^{h_n}} W(\zeta).$$

Доказательство. Функция $F(\zeta) = \ln W(\zeta)$ удовлетворяет усновиям (11) или (13), из которых следует, что

(52) $$F(\zeta_0) - F(\bar{\zeta}_0) = 2i \operatorname{Im} F(\zeta_0) = 2i \arg W(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in C,$$

$$F(\zeta_0) + F(\bar{\zeta}_0) = 2 \operatorname{Re} F(\zeta_0) = 2 \ln |W(\zeta_0)|, \quad \zeta_0 \in C.$$

Согласно лемме 3 для $\ln W(\zeta)$ имеют место формулы (42) и (45), причем первую из них для точек, симметричных относительно окружности C, можно записать в виде

$$\Omega(\zeta) = \ln W(\zeta) - Q(\zeta) \quad \text{и} \quad \Omega(\zeta^{-1}) = -Q(\zeta^{-1}) \quad \text{при } |\zeta| < 1\,. \tag{53}$$

Из условий (11) или (13) следует также, что

$$Q(\zeta_0) - Q(\bar{\zeta}_0) = 2i \operatorname{Im} Q(\zeta_0)\,, \quad Q(\zeta_0) + Q(\bar{\zeta}_0) = 2 \operatorname{Re} Q(\zeta_0)\,. \tag{54}$$

Подставляя значения (53) и (45) в соотношения (9) и (10) и учитывая формулы (52), (54), получим искомые равенства (47)–(51).

Из доказанной теоремы следует, что если изображающая функция интегралов (1)–(4) найдена в классе функций, представимых в виде указанной выше ветви логарифма от мероморфной или аналитической функции, то эти интегралы вычисляются точно. Изображающая функция в названном классе определяется таким же образом, как в классе аналитических или мероморфных функций.

8. НЕСКОЛЬКО СПОСОБОВ ПОЛУЧЕНИЯ ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

При вычислении интегралов (1)–(4) прямым методом возникает вопрос в том, как вообще находить изображающие функции этих интегралов. Можно указать несколько способов получения изображающих функций. Мы приведем здесь четыре способа, при помощи которых часто удается найти изображающую функцию интегралов (1)–(4) в одном из рассмотренных выше классов. Первые три способа основаны на свойствах функции $\ln (1 + \zeta)(1 - \zeta)^{-1}$. Под логарифмом последнего выражения мы всегда будем понимать ветвь, определяемую равенствами (33), (34). Четвертый способ основывается на свойствах (30) полиномов и функций Чебышева.

Способ 1. Вводим функцию $f(\cos \Theta)$, полученную из плотности $f(x)$ заменой x на $\cos \Theta$ и определенную на отрезке $[-\pi, \pi]$ так, чтобы на отрезке $[-\pi, 0]$ она совпадала с плотностью $f(x)$. Представляем $f(\cos \Theta)$ в виде

$$f(\cos \Theta) = f_1(\cos \Theta) + f_2(\cos \Theta)\,, \tag{55}$$

где $f_1(\cos \Theta)$ есть четная функция, а $f_2(\cos \Theta)$ – нечетная функция переменной Θ а затем продолжаем функции $f_1(\cos \Theta)$ и $f_2(\cos \Theta)$ в комплексную область $|\zeta| \leqq 1$, заменяя $\cos \Theta$ на $(\zeta^2 + 1)/2\zeta$. Составляя из найденых таким образом функций линейную комбинацию вида

$$F(\zeta) = i f_2\left(\frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta}\right) - \frac{2}{\pi} f_1\left(\frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta}\right) \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}\,, \tag{56}$$

получим изображающую функцию интегралов (1), (3). Составляя другую линейную комбинацию

$$F(\zeta) = f_1\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) + i\,\frac{2}{\pi} f_2\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) \ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\,, \tag{57}$$

получим изображающую функцию интегралов (2), (4).

Способ 2. Вводим функции $f_1(\cos\Theta)$ и $f_2(\cos\Theta)$, определяемые равенством (55), а затем эти функции и их производные $f_1'(\cos\Theta)$ и $f_2'(\cos\Theta)$ по аргументу $x = \cos\Theta$ продолжаем указанным выше способом в комплексную область $|\zeta| \leqq 1$. Образованное из найденных функций выражение

$$F(\zeta) = i f_2\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) - \frac{1}{\pi}\int_1^\zeta f_1'\left(\frac{\tau^2+1}{2\tau}\right) \frac{\tau^2-1}{\tau^2} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{58}$$

где $f_1(1) = 0$, будет изображающей функцией интегралов (1), (3), а выражение

$$F(\zeta) = f_1\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) + \frac{i}{\pi}\int_1^\zeta f_2'\left(\frac{\tau^2+1}{2\tau}\right) \frac{\tau^2-1}{\tau^2} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{59}$$

где $f_2(1) = 0$, будет изображающей функцией интегралов (2), (4).

Способ 3. Вводим указанным выше способом функцию $f(\cos\Theta)$ и представляем её в виде

$$f(\cos\Theta) = f_3(\cos\Theta)\,[f_1(\cos\Theta) + f_2(\cos\Theta)]\,, \tag{60}$$

где $f_1(\cos\Theta)$ – четная, $f_2(\cos\Theta)$ – нечетная функции переменной Θ, а $f_3(\cos\Theta)$ может быть как четной, так и нечетной. Продолжаем функции $f_1(\cos\Theta)$, $f_2(\cos\Theta)$, $f_3(\cos\Theta)$ и производные $f_1'(\cos\Theta)$, $f_2'(\cos\Theta)$, в комплексную область $|\zeta| \leqq 1$ так же, как это делалось ранее. В зависимости от свойств функции рассмотрим два случая:

1) Пусть $f_3(\cos\Theta)$ – четная функция переменной Θ; тогда

$$F(\zeta) = \left[i f_2\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) - \frac{1}{\pi}\int_1^\zeta f_1'\left(\frac{\tau^2+1}{2\tau}\right) \frac{\tau^2-1}{\tau^2} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] f_3\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right), \tag{61}$$

где $f_1(1) = 0$, является изображающей функцией интегралов (1), (3), а

$$F(\zeta) = \left[f_1\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) + \frac{i}{\pi}\int_1^\zeta f_2'\left(\frac{\tau^2+1}{2\tau}\right) \frac{\tau^2-1}{\tau^2} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] f_3\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right), \tag{62}$$

где $f_2(1) = 0$, является изображающей функцией интегралов (2), (4).

2) Пусть $f_3(\cos\Theta)$ – нечетная фунция переменной Θ; тогда

$$F(\zeta) = i\left[f_1\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) + \frac{i}{\pi}\int_1^\zeta f_2'\left(\frac{\tau^2+1}{2\tau}\right) \frac{\tau^2-1}{2\tau} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] f_3\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right), \tag{63}$$

где $f_2(1) = 0$, будет изображающей функцией интегралов (1), (3), а

$$(64)\qquad F(\zeta) = \left[f_2\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right) + \frac{i}{\pi}\int_1^\zeta f_1'\left(\frac{\tau^2+1}{2\tau}\right)\frac{\tau^2-1}{\tau^2}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] f_3\left(\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}\right),$$

где $f_1(1) = 0$, будет изображающей функцией интегралов (2), (4).

Способ 4. Составляем ряды по степеням ζ с коэффициентами

$$(65)\qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\Theta)\sin n\Theta\,\mathrm{d}\Theta \underset{(n=0,1,,,,)}{\quad\text{и}\quad} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\Theta)\cos n\Theta\,\mathrm{d}\Theta\,.$$

Если первый из них сходится, то его сумма

$$(66)\qquad F(\zeta) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n\zeta^n\,,\quad |\zeta| < 1$$

будет изображающей функцией интегралов (1), (3). Аналогично, если второй ряд сходится, то его сумма

$$(67)\qquad F(\zeta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\zeta^n\,,\quad |\zeta| < 1$$

будет изображающей функцией интегралов (2), (4). Изображающая функция, полученная таким способом, всегда будет аналитической в круге $|\zeta| < 1$.

Замечание 1. Если $f(\cos\Theta)$ является четной или нечетной функцией переменной Θ, то формулы (55)–(59) упрощаются, так как в первом случае $f_1(\cos\Theta) = f(\cos\Theta), f_2(\cos\Theta) \equiv 0$, а во втором случае $f_1(\cos\Theta) \equiv 0, f_2(\cos\Theta) = f(\cos\Theta)$. Точно также в этих случаях упрощаются и формулы (60)–(64).

Замечание 2. На первый взгляд может показаться, что четвертый способ всегда дает возможность получить точное значение интегралов (1)–(4) в удобном виде. На самом деле это не так, ибо вычисление коэффициентов (65) в общем случае представляет собой сложную задачу и не менее сложную задачу представляет собой в общем случае суммирование рядов (66), (67). Поэтому искать изображающую функцию четвертым способом следует лишь в крайнем случае, если не удается получить её более просто.

9. ПРИМЕРЫ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЕ ПРЯМОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ (1)–(4)

Приведем несколько примеров на вычисление интегралов (1)–(4) с заданной плотностью.

1)

$$(68)\qquad \Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t\,,\quad z\,\overline{\in}\,[-1,1]\,;\quad I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{t-x}\,\mathrm{d}t\,,\quad x\in[-1,1]\,.$$

Будем искать изображающую функцию первым способом, т.е. при помощи формулы (56). Учитывая, что плотность $f(\cos\Theta) = \cos n\Theta$ интегралов (68) есть четная функция переменной Θ, находим

$$(69)\qquad F(\zeta) = -\frac{1}{\pi}(\zeta^n + \zeta^{-n})\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

Найденная изображающая функция (69) является мероморфной в круге $|\zeta| < 1$, а регулярная часть ее принадлежит классу H_p (при любом $p > 0$), в круге $|\zeta| \leqq 1$, и, следовательно, для неё имеют место равенства (25). Подставляя в последние функцию (69), получим точные значения интегралов (68):

$$(70)\qquad \Phi(z) = \frac{2}{\pi}\Big[-f_n(z)\operatorname{Arth}[z - \sqrt{(z^2-1)}] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(-1)^k}{2k}f_{n-k}(z) + \frac{1-(-1)^n}{2n}\Big],\quad z \bar{\in} [-1, 1],$$

$$I(x) = \frac{2}{\pi}\Big[-T_n(x)\operatorname{Arth} x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1-(-1)^k}{k}T_{n-k}(x) + \frac{1-(-1)^n}{2n}\Big],\quad x \in [-1, 1],$$

где $f_n(z)$ и $f_{n-k}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, есть функция вида

$$(70')\qquad f_m(z) = (z - \sqrt{(z^2-1)})^m + (z + \sqrt{(z^2-1)})^m \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

2)

$$(71)\qquad \Psi(z) = \frac{\sqrt{(z^2-1)}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_n(t)}{t-z}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}},\quad z \bar{\in} [-1, 1];$$

$$I(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_n(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}},\quad x \in [-1, 1].$$

Будем искать изображающую функцию также первым способом, т.е. при помощи формулы (57). Учитывая, что $f(\cos\Theta) = \sin n\Theta$ есть нечетная функция переменной Θ, будем иметь

$$(72)\qquad F(\zeta) = -\frac{1}{\pi}(\zeta^n - \zeta^{-n})\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

эта функция мероморфна в круге $|\zeta| \leqq 1$ и, следовательно, для неё справедливы соотношения (26). После подстановки в указанные соотношения функции (72), находим точные значения интегралов (71):

$$(73)\qquad \Psi(z) = \frac{2}{\pi}\Big[-f_n^*(z)\operatorname{Arth}[z - \sqrt{(z^2-1)}] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(-1)^k}{2k}f_{n-k}^*(z)\Big],\quad z \bar{\in} [-1, 1],$$

$$I(x) = \frac{2}{\pi}\left[- U_n(x)\,\mathrm{Arth}\, x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1-(-1)^k}{k}\, U_{n-k}(x)\right], \quad x \in [-1, 1]\,,$$

где $f_n^*(z), f_{n-k}^*(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ есть функции вида

(73′) $$f_n^*(z) = -\left[z - \sqrt{(z^2-1)}\right]^m + \left[z + \sqrt{(z^2-1)}\right]^m \quad (m = 1, 2, \ldots)\,.$$

3)

(74) $$\Psi(z) = \frac{\sqrt{(z^2-1)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1 + t\sin\alpha}{1 - t\sin\alpha}\,\frac{1}{t-z}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)}}\,, \quad z \,\overline{\in}\, [-1, 1]\,,$$

$$I(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1 + t\sin\alpha}{1 - t\sin\alpha}\,\frac{1}{t-x}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)}}\,, \quad x \in [-1, 1]\,.$$

Если в данном случае воспользоваться формулой (57), учитывая, что плотность $f(\cos\Theta) = 2\,\mathrm{Arth}\,(\cos\Theta\sin\alpha)$ четна по переменной Θ, то изображающая функция будет иметь вид

(75) $$F(\zeta) = \ln W(\zeta)\,, \quad W(\zeta) = \frac{(1 + \zeta\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha)(\zeta + \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha)}{(1 - \zeta\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha)(\zeta - \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha)}\,.$$

Полученная функция $F(\zeta)$ является логарифмом от мероморфной в круге $|\zeta| \leqq 1$ функции $W(\zeta)$ и поэтому для неё имеют место соотношения (47)–(51). Подставляя в них вместо $F(\zeta)$ выражение (75) находим точные значения рассматриваемых интегралов:

(76) $$\Psi(z) = -4\,\mathrm{Arth}\left(\left[z - \sqrt{(z^2-1)}\right]\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right), \quad z \,\overline{\in}\, [-1, 1]\,;$$

$$I(x) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{(1-x^2)}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right], \quad x \in [-1, 1]\,.$$

4)

(77) $$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left[1 + \sqrt{(1-t^2)}\right]}{t-z}\,\mathrm{d}t\,, \quad z \,\overline{\in}\, [-1, 1]\,;$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left[1 + \sqrt{(1-t^2)}\right]}{t-x}\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [-1, 1]\,.$$

Найдем изображающую функцию этих интегралов вторым способом при помощи формулы (58). В данном случае $f_1(\cos\Theta) = \ln|\cos\Theta|$, $f_1'(\cos\Theta) = 1/\cos\Theta$, $f_2(\cos\Theta) = \mathrm{Arth}\,(\sin\Theta)$. Продолжая $f_1'(\cos\Theta)$ и $f_2(\cos\Theta)$ в комплексную область $|\zeta| \leqq 1$ и подставляя найденные значения в формулу (58) получим изображающую функцию в виде

(78) $$F(\zeta) = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,\zeta + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\zeta} \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}\,.$$

эта функция аналитична в круге $|\zeta| \leqq 1$ и поэтому удовлетворяет соотношениям

(19). Подставим в соотношения (19) значения функции (78); тогда, после несложных преобразований, вводя функцию

$$(79)\qquad N(u) = \int_0^u \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} \frac{d\tau}{\tau},$$

будем иметь точные значения искомых интегралов

$$(80)\qquad \Phi(z) = -\arcsin\frac{1}{z} + \frac{1}{\pi} N\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1];$$

$$I(x) = -\frac{1}{\pi} N(x), \quad x \in [-1, 1].$$

5)

$$(81)\qquad \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{(1-t^2)} \arcsin t}{t-z} dt, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1],$$

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{(1-t^2)} \arcsin t}{t-x} dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Рассматривая плотность этих интегралов как функцию переменной Θ : $: f(\cos\Theta) = (\pi/2 - \Theta) \sin\Theta$, легко усмотреть, что она представима в виде (60), где в данном случае $f_1(\cos\Theta) = \pi/2$, $f_2(\cos\Theta) = -\Theta$, $f_3(\cos\Theta) = \sin\Theta$, причем $f_3(\cos\Theta)$ нечетна по Θ. Поэтому естественно найти изображающую функцию третьим способом, по формуле (63). Эта формула, после подстановки входящих в неё величин, дает изображающую функцию в виде

$$(82)\qquad F(\zeta) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right) \int_0^{\zeta} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Эта функция аналитична в круге $|\zeta| \leqq 1$ и, следовательно, для неё справедливы равенства (19). При помощи этих равенств находим точные значения интегралов (81):

$$(83)\quad \Phi(z) = \frac{2}{\pi} \sqrt{(z^2-1)}\, N[z - \sqrt{(z^2-1)}] - \frac{2}{\pi}, \quad z \,\bar{\in}\, [-1, 1],$$

$$I(x) = \frac{4}{\pi} \sqrt{(1-x^2)} \left[L\left(\frac{\pi}{2}\right) - L(\tfrac{1}{2} \arccos x) + L\left(\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} \arccos x\right)\right] - \frac{2}{\pi},$$

$$x \in [-1, 1],$$

где $L(u)$ — функция Лобачевского

$$L(u) = -\int_0^u \ln\cos\varphi \, d\varphi, \quad u \in [0, \tfrac{1}{2}\pi]$$

а $N(u)$ — функция, определяемая равенством (79).

Рассмотренные примеры показывают насколько просто и эффективно можно найти иногда точные значения интегралов (1)—(4), если применить изложенный нами метод.

10. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ТОЧНЫХ МЕТОДОВ

Очевидно, изложенные здесь методы не дают еще возможности выявить всю совокупность интегралов (1)—(4), вычисляемых точно. Однако, этого можно достигнуть, создавя новые точные методы вычисления интегралов (1)—(4) и развивая далее методы, изложенные в данной работе. Развивать последнее, очевидно, следует по пути распространения теорем 1—3 на другие классы определяющих функций и прежде всего это необходимо сделать для случая, когда определяющая функция имеет существенно особые точки и алгебраически точки ветвления. Широкие возможности для точного вычисления интегралов (1)—(4), по-видимому, даст полное решение вопроса об интегрировании и дифференцировании по параметру и предельном переходе под знаком интегралов (1)—(4). Например, точные значения второго и четвертого интегралов (35) можно было бы получить, переходя в равенствах (67), (68) к пределу при $\alpha \to \pi/2$. Необходимо также выявить все случаи, когда подинтегральные функции интегралов (1)—(4) имеют первообразную.

Литература

[1] *Гахов Ф. Д.:* Краевые задачи. Физматгиз 1963.

[2] *Мусхелишвили Н. И.:* Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз 1962.

[3] *Рыжик И. М., Грандштейн И. С.:* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат 1951.

[4] *Пыхтеев Г. Н.:* Об одном точном методе вычисления некоторых интегралов с ядром типа Коши. Докл. АН СССР 1961, т. 140, № 3.

[5] *Привалов И. И.:* Граничные свойства аналитических функций. Гостехиздат 1950.

[6] *Голузин Г. М.:* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат 1952.

[7] *Хведелидзе Б. В.:* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. Труды Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР, т. XXIII, 1956, 3—158.

[8] *Маркушевич А. И.:* Теория аналитических функций. Гостехиздат 1950.

Výtah

METODY VÝPOČTU INTEGRÁLŮ CAUCHYOVA TYPU PO NEUZAVŘENÉ KŘIVCE V EXPLICITNÍM TVARU

G. N. Pychtějev

V článku je vyložena následující metoda k výpočtu integrálů (1)–(4). Uvnitř kruhu v rovině ζ se hledá tak zvaná představující funkce $F(\zeta)$ integrálů (1)–(4). S její pomocí lze integrály (1)–(4) vypočíst podle vzorců (15)–(16), jejichž tvar závisí na třídě, v níž hledáme představující funkci. V článku jsou vyšetřeny tři případy: 1) představující funkce $F(\zeta)$ je holomorfní v kruhu, 2) $F(\zeta)$ je meromorfní funkce, 3) $F(\zeta)$ je logaritmus meromorfní nebo holomorfní funkce. K sestrojení představující funkce jsou podány čtyři různé metody. Některé konkrétní integrály tvaru (1)–(4) jsou vypočteny v uzavřeném tvaru.

Summary

EXACT METHODS FOR EVALUATION OF CAUCHY TYPE INTEGRALS ON AN UNCLOSED CONTOUR

G. N. Pyhteev

In the paper the following methods for evaluation of the integrals (1)–(4) are suggested. Inside the circle in the ζ-plane, the so-called representing function of the integrals (1)–(4) $F(\zeta)$ is found. Then the integrals (1)–(4) are evaluated by the formulas (15)–(16), whose form depends on the class in which the representing function is obtained. Three cases are considered in the paper: 1) the representing function $F(\zeta)$ is analytic in the circle, 2) $F(\zeta)$ is meromorphic, 3) $F(\zeta)$ is the logarithm of a meromorphic or analytic function.

For the construction of the representing function $F(\zeta)$ four different methods are given.

Some concrete integrals of the form (1)–(4) have been evaluated exactly.

Адрес автора: Г. Н. Пыхтеев, Институт гидродинамикм Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск 72, СССР.