Juraj Virsik

Holonomní vazba a pohybově rovnice v Minkowského mechanice

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 4, 321–350

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102973

HOLONOMNÍ VAZBA A POHYBOVÉ ROVNICE V MINKOWSKÉHO MECHANICE

JURAJ VIRSIK

(Došlo dne 5. února 1964.)

Metodami tensorového počtu je odvozena pohybová rovnice a z ní plynoucí mechanické principy pro pohyb částice vázané holonomní vazbou ve speciální teorii relativity.

Budeme studovat pohyb částice na varietě v Minkowského prostoročasu dané rovnicí

$$\omega(x, y, z, t) = 0 . \tag{0.1}$$

Vyšetřování pohybu několika částic vázaných několika vazbami způsobem, jakým se to dělá v klasické mechanice, naráží na potíže, chceme-li zavést metriku ve fázovém prostoru. Omezíme se tedy na případ jediné částice a jediné vazby dané rovnicí (0.1), která za určitých předpokladů je lokálně representována trojrozměrnou varietou v Minkowského prostoročasu. Za výchozí rovnici budeme pokládat rovnici pro pohyb (nevázané) hmotné částice v mechanice speciální teorie relativity

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\mu(\tau)\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right) = P^\alpha , \tag{0.2}$$

kde funkce $x^\alpha(\tau)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ určují hledanou světočáru částice, $\mu(\tau)$ je její vlastní hmota a P^α $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ je vektor síly působící na částici. Parametrem τ je označován vlastní čas uvažované částice.

Pro studium pohybu částice vázané holonomní vazbou použijeme jako výchozího postulátu „základní princip“, který lze vyslovit analogicky jako v klasické mechanice: Složka síly kolmá k vazbě se nezúčastňuje pohybu. Kolmost k příslušné varietě se zde rozumí ovšem ve smyslu indefinitní Minkowského metriky.

Myšlenka, použít tohoto postulátu jako výchozího pro studium vázaného pohybu ve speciální teorii relativity, pochází od prof. F. NOŽIČKY, jehož článek „Fundamentální principy mechaniky a jejich ekvivalence“ (viz seznam literatury) mně sloužil také jako podklad pro newtonovský přístup k problémům zde vyšetřovaným. Ukázalo se, že tensorová metoda použitá v citované práci se dá po formální stránce s výhodou aplikovat i na případ speciální teorie relativity.

V celé práci se přidržuji einsteinovské sumační konvence ve formulích obsahujících tensory. Přitom řecké indexy (α, β, ...) probíhají množinu hodnot (1, 2, 3, 0) a latinské (a, b, ...) množinu hodnot (1, 2, 3). Bod o souřadnicích x^α resp. η^a značím stručně $[x^\alpha]$ resp. $[\eta^a]$. Symbolem R^n (n přirozené) je označován aritmetický prostor n-tic reálných čísel s přirozenou topologií.

Poznamenejme ještě, že pro lepší srozumitelnost článku jsou v prvních dvou odstavcích uvedena některá známá fakta z geometrie pseudoeuklidovských prostorů a jejich fyzikální interpretace.

1. NĚKTERÉ VLASTNOSTI NADPLOCHY VE ČTYŘROZMĚRNÉM PSEUDOEUKLIDOVSKÉM PROSTORU S INDEXEM 1

Nechť x^α značí ortogonální systém souřadnic pseudoeuklidovského prostoru M_4 s indexem 1 a nechť v tomto souřadném systému má metrický tensor tvar

$$(1.1)\qquad g_{\alpha\beta} \begin{cases} = 1 & \text{pro } \alpha = \beta \neq 0 \\ = -c^2 & \text{pro } \alpha = \beta = 0 \\ = 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad \text{resp.} \quad g^{\alpha\beta} \begin{cases} = 1 & \text{pro } \alpha = \beta \neq 0\,, \\ = -\dfrac{1}{c^2} & \text{pro } \alpha = \beta = 0\,, \\ = 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta\,, \end{cases}$$

přičemž $c > 0$ je daná konstanta. Veličiny $g_{\alpha\beta}$ jsou s veličinami $g^{\alpha\beta}$ vázány relací

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha\,.$$

Platí-li pro nějaký vektor v^α

$$g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0 \quad \text{resp.} \quad g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta > 0 \quad \text{resp.} \quad g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta < 0\,,$$

pak řekneme, že vektor v^α je isotropní, resp. má reálnou délku, resp. má imaginární délku[1]).

Definice 1. *Buďtež dány funkce*

$$(1.2)\qquad x^\alpha = x^\alpha(\eta^a) \equiv x^\alpha(\eta^1, \eta^2, \eta^3)\,,$$

definované v oblasti $\mathcal{O}$ trojrozměrného aritmetického prostoru R^3.

a) *Nechť funkce (1.2) mají spojité parciální derivace až do druhého řádu včetně v oblasti $\mathcal{O}$.*

---

[1]) Názvů „vektor s reálnou délkou", resp. „vektor s imaginární délkou" zde užívám pouze ve smyslu angl. „spacelike" resp. „timelike vector" („пространственноподобный" resp. „времениподобный вектор").

b) *Nechť matice z elementů*

$$B^\alpha_a \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a}$$

tj. matice

$$\begin{pmatrix} B^1_1, & B^2_1, & B^3_1, & B^0_1 \\ B^1_2, & B^2_2, & B^3_2, & B^0_2 \\ B^1_3, & B^2_3, & B^3_3, & B^0_3 \end{pmatrix}.$$

má hodnost 3 *v každém bodě* $[\eta^a] \in \mathcal{O}$.

Potom říkáme, že rovnicemi (1.2) *je parametricky popsána regulární nadplocha* (*trojrozměrná lokální varieta*) *v* M_4. *Oblast* $\mathcal{O}$ *nazýváme jejím definičním oborem. V dalším budeme značit tuto nadplochu symbolem* Ω, *tj. tímto symbolem označíme množinu bodů* $[x^\alpha(\eta^a)] \in M_4$, *kde* $[\eta^a] \in \mathcal{O}$.

Veličiny B^α_a $(a = 1, 2, 3)$ tvoří v libovolném bodě $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$ nadplochy Ω tři lineárně nezávislé vektory. Určují tedy nadrovinu v M_4, která je tečnou nadrovinou nadplochy Ω v bodě $\underset{0}{\boldsymbol{M}}$.

Z diferenciální geometrie je známo, že elementy

$$\hat{g}_{ab} \equiv B^\alpha_a B^\beta_b g_{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

je dán prvý metrický tensor regulární nadplochy Ω. Dále je rovnicemi

$$N_\beta B^\beta_b = 0 \quad (b = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

v každém bodě uvažované nadplochy definován směr normály (jednorozměrný vektorový prostor).

Poznámka 1. Z teorie pseudoeuklidovských prostorů s indexem 1 připomeňme tento známý fakt: Má-li vektor imaginární délku, pak v nadrovině totálně kolmé k tomuto vektoru leží vesměs vektory o délce reálné. Má-li vektor délku reálnou, pak v nadrovině totálně kolmé k tomuto vektoru existuje alespoň jeden směr vektorů o imaginární délce.

Definice 2. *Říkáme, že regulární nadplocha* Ω *definovaná v oblasti* $\mathcal{O}$ *je typu* R, *když v každém jejím bodě platí: Je-li* N_β *řešením rovnice* (1.4), *pak je*

$$g^{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta > 0\,.$$

Předpokládejme nadále, že Ω je regulární nadplocha typu R. Geometricky znamená tento předpoklad toto: V tečné nadrovině nadplochy v libovolném jejím bodě existuje ortogonální base vektorů taková, že dva vektory base mají délku reálnou a jeden délku imaginární. Speciálně tedy není žádná z tečných nadrovin isotropní, tj. platí v celém $\mathcal{O}$

$$\det(\hat{g}_{ab}) \neq 0\,. \tag{1.5}$$

Proto můžeme definovat kontravariantní složky $\hat{g}^{ab}$ prvého metrického tensoru nadplochy rovnicemi

$$\hat{g}^{ab}\hat{g}_{bc} = \delta^a_c .$$

Hodnoty $\hat{g}_{ab}$ resp. $\hat{g}^{ab}$ vzaté v daném bodě nadplochy Ω určují nedegenerovanou pseudoeuklidovskou metriku tečné nadroviny nadplochy Ω v tomto bodě. Z řešení rovnice (1.4) si vybereme to, pro které platí

$$g^{\alpha\beta}N_\alpha N_\beta = 1 . \tag{1.6}$$

Takto definovaný vektor N_α, resp. v kontravariantních složkách

$$N^\alpha = g^{\alpha\beta}N_\beta$$

(určený jednoznačně až na orientaci) je vektorem normály nadplochy Ω v příslušném bodě. Vektory B^α_a, N^α tvoří v libovolném bodě nadplochy basi prostoru M_4. Předpokládejme, že parametrisace nadplochy byla vybrána tak, že v žádném bodě nadplochy žádný z vektorů B^α_a není isotropní. Libovolný vektor P^α definovaný v bodě nadplochy můžeme pak rozložit ve tvaru

$$P^\alpha = B^\alpha_a u^a + N^\alpha v , \tag{1.7}$$

přičemž

$$u^a = P^\beta B^a_\beta , \tag{1.7a}$$

$$v = P^\beta N_\beta , \tag{1.7b}$$

kde rovnicemi

$$B^b_\beta B^\beta_a = \delta^b_a , \quad B^b_\beta N^\beta = 0 \tag{1.8}$$

jsou, za našich předpokladů jednoznačně, určeny veličiny B^b_β v každém bodě nadplochy. Platí pro ně tyto vztahy

$$B^b_\beta = g_{\alpha\beta}B^\alpha_a\hat{g}^{ab} , \tag{1.9a}$$

$$B^\beta_a B^a_\alpha = \delta^\beta_\alpha - N_\alpha N^\beta . \tag{1.9b}$$

Vektor

$$\partial_b B^\alpha_a = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\eta^a\,\partial\eta^b}\ ^2)$$

lze (při pevných a, b) psát jako lineární kombinaci

$$\partial_b B^\alpha_a = B^\alpha_c\hat{\Gamma}^c_{ab} + N^\alpha\hat{b}_{ab} . \tag{1.10}$$

[2]) Zde i v dalším značíme stručně $\partial_b f \equiv \partial f/\partial\eta^b$.

V tomto vztahu je $\hat{b}_{ab}$ druhý metrický tensor nadplochy Ω a

$$\hat{\Gamma}^c_{ab} = \tfrac{1}{2}\hat{g}^{cd}(\partial_a\hat{g}_{db} + \partial_b\hat{g}_{ad} - \partial_d\hat{g}_{ab})$$

jsou složky metrické konexe nadplochy Ω v příslušném jejím bodě.

Definice 3. *Buďtež dány funkce*

$$x^\alpha = x^\alpha(u)\,, \quad u \in (u_1, u_2) \tag{1.11}$$

se spojitými derivacemi aspoň druhého řádu v intervalu (u_1, u_2). *Nechť* dx^α/du $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ *nejsou současně rovny nule pro žádné* $u \in (u_1, u_2)$. *Pak říkáme, že rovnicemi* (1.11) *je dána regulární křivka v* M_4.

Mějme opět regulární nadplochu Ω typu R s parametrickým popisem (1.2). Buďtež dány funkce $\eta^a(u)$, které vyhovují těmto předpokladům:

a) funkce $\eta^a(u)$ $(a = 1, 2, 3)$ mají spojité derivace do druhého řádu včetně v intervalu (u_1, u_2),

b) derivace $d\eta^a/du$ $(a = 1, 2, 3)$ nejsou současně rovny nule pro žádné $u \in (u_1, u_2)$,

c) pro každé $u \in (u_1, u_2)$ platí $[\eta^a(u)] \in \mathcal{O} \subset R^3$.

Za těchto předpokladů je pak rovnicemi

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(u))\,, \quad u \in (u_1, u_2) \tag{1.12}$$

popsána v M_4 regulární křivka, která leží na nadploše Ω. Vektor

$$\frac{dx^\alpha}{du} = B^\alpha_a \frac{d\eta^a}{du}$$

je tečným vektorem této křivky ležícím ovšem v tečné nadrovině nadplochy v uvažovaném bodě. Nechť v bodě $\underset{0}{u} \in (u_1, u_2)$ platí pro naši křivku

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du}\bigg|_{u=\underset{0}{u}} < 0\,.$$

Potom pro všechna u z nějakého okolí bodu $\underset{0}{u} \in (u_1, u_2)$ bude mít tečný vektor křivky imaginární délku (vzhledem ke spojitosti uvažovaných funkcí). Pro jednoduchost předpokládejme, že pro všechna $u \in (u_1, u_2)$ platí

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} < 0\,. \tag{1.13}$$

Potom můžeme na této křivce zavést nový parametr τ předpisem

$$\tau(u) = \int_{\underset{0}{u}}^{u} \sqrt{\left(-\frac{1}{c^2}\, g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du}\right)}\, du = \tag{1.14}$$

$$= \int_{\underset{0}{u}}^{u} \sqrt{\left(-\frac{1}{c^2}\, \hat{g}_{ab} \frac{d\eta^a}{du} \frac{d\eta^b}{du}\right)}\, du\,, \quad u \in (u_1, u_2)\,.$$

Funkce $\tau(u)$ zobrazuje prostě interval (u_1, u_2) na nějaký interval (τ_1, τ_2). Můžeme tedy psát

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{du},$$

z čehož snadno ověříme, že platí

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \hat{g}_{ab}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b = -c^2 \quad (1.15)$$ [3])

v intervalu (τ_1, τ_2).

Podle (1.10) platí

$$\begin{aligned}\ddot{x}^\alpha &= B^\alpha_a\ddot{\eta}^a + (\partial_b B^\alpha_a)\,\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b = B^\alpha_a\ddot{\eta}^a + \{B^\alpha_c\hat{\Gamma}^c_{ab} + N^\alpha\hat{b}_{ab}\}\,\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b = \\ &= B^\alpha_c\{\ddot{\eta}^c + \hat{\Gamma}^c_{ab}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b\} + N^\alpha\hat{b}_{ab}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b\end{aligned} \quad (1.16)$$

a tedy

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = B^\alpha_c\frac{D}{d\tau}\dot{\eta}^c + N^\alpha\hat{b}, \quad (1.16a)$$

přičemž definujeme $\hat{b} = \hat{b}_{ab}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b$ a symbol $D/d\tau$ značí absolutní derivaci. Tím jsme rozložili vektor $d^2x^\alpha/d\tau^2$ definovaný v bodě nadplochy na složky ve směru tečné nadroviny a ve směru normály.

Vedle parametrického popisu regulární nadplochy typu R bude pro další úvahy účelné uvést také tzv. implicitní definici regulární nadplochy v M_4.

Nechť je dána funkce

$$\omega(x^\alpha) \equiv \omega(x^1, x^2, x^3, x^0)$$

se spojitými derivacemi až do druhého řádu včetně v oblasti $\Lambda \subset M_4$. Nechť pro $[x^\alpha] \in \Lambda$ vektor o složkách

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}$$

není nulový. Nechť existuje bod $[\underset{0}{x}^\alpha] \in \Lambda$ takový, že $\omega(\underset{0}{x}^\alpha) = 0$. Pak, jak je známo z diferenciální geometrie, množina bodů $[x^\alpha] \in \Lambda$, pro něž platí

$$\omega(x^\alpha) = 0, \quad (1.17)$$

tvoří lokálně regulární nadplochu ve smyslu definice 1. Hodnoty

$$\omega_\alpha = \frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}$$

---

[3]) Zde i v dalším značme stručně $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, $\ddot{x}^\alpha = d^2x^\alpha/d\tau^2$ a podobně také $\dot{\eta}^a = d\eta^a/d\tau$, $\ddot{\eta}^a = d^2\eta^a/d\tau^2$.

jsou kovariantními složkami vektoru ležícího ve směru normály k nadploše. Tato nadplocha bude tedy typu R právě tehdy, bude-li platit v libovolném jejím bodě

$$g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta > 0 \,. \tag{1.18}$$

Mějme nyní regulární křivku popsanou rovnicemi (1.11) a předpokládejme, že leží na nadploše o rovnici (1.17). To znamená, že platí

$$u \in (u_1, u_2) \Rightarrow [x^\alpha(u)] \in \Lambda$$

a

$$\omega(x^\alpha(u)) = 0 \,.$$

Pak, jak je známo, existují funkce $\eta^a(u)$ definované na dostatečně malém intervalu tak, že rovnicemi (1.12) je popsána regulární křivka ve smyslu hořejší definice, ležící na nadploše.

Níže využijeme těchto geometrických poznatků v vyšetřování některých lokálních vlastností světočáry hmotného bodu vázaného holonomní vazbou. Dříve však uvedeme ještě toto, téměř samozřejmé, lemma.

Lemma 1. *Nechť funkce*

$$h(y^1, \ldots, y^n)$$

má spojité první parciální derivace na otevřené množině $\mathscr{W} \subset R^n$ a nechť zde platí

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial y^i}\right)^2 \neq 0 \,.$$

Označme $\mathscr{W}_0$ množinu bodů $y \equiv [y^1, \ldots, y^n] \in \mathscr{W}$ vyhovujících rovnici

$$h(y^1, \ldots, y^n) = 0 \,.$$

Nechť $\mathscr{W}_0 \neq 0$.

Mějme dále funkce

$$f_i(y^1, \ldots, y^n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se spojitými prvními derivacemi v okolí množiny $\mathscr{W}_0$ a nechť pro $y \in \mathscr{W}_0$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y^i} f_i = 0 \,. \tag{1.19}$$

Nechť $y_0 \equiv [y_0^1, \ldots, y_0^n] \in \mathscr{W}_0$. Potom v okolí bodu y_0 existuje jediná integrální křivka systému autonomních diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}\tau} = f_i(y^1, \ldots, y^n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

daná funkcemi $y^i = y^i(\tau)$ *se spojitou první derivací pro dosti malá* $\tau > 0$ *a splňující podmínky*

$$y^i(0) = \lim_{\tau \to 0+} y^i(\tau) = y_0^i\,, \quad h(y^1(\tau), \ldots, y^n(\tau)) = 0\,.$$

Důkaz: Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\partial h/\partial y^n \neq 0$ v bodě $y_0 \in \mathscr{W}_0$ a tedy i v nějakém okolí $\mathscr{U}(y_0) \subset \mathscr{W}$. Podle věty o implicitních funkcích, pro y^A $(A = 1, 2, \ldots, n-1)$ dosti blízká k y_0^A je podmínka

$$h(y^1, \ldots, y^n) = 0$$

ekvivalentní podmínce

$$y^n = y^n(y^1, \ldots, y^{n-1})\,,$$

přičemž funkce

$$\frac{\partial y^n}{\partial y^A} = -\frac{\partial h/\partial y^A}{\partial h/\partial y^n}$$

jsou spojité. Systém diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}y^A}{\mathrm{d}\tau} = f_A(y^1, \ldots, y^{n-1}, y^n(y^1, \ldots, y^{n-1})) \tag{1.20}$$

má lokálně jediné řešení $y^A = y^A(\tau)$, pro které $\lim_{\tau \to 0+} y^A(\tau) = y_0^A$. Položme

$$y^n(\tau) = y^n(y^1(\tau), \ldots, y^{n-1}(\tau))\,.$$

Pak pro dosti malá $\tau > 0$ platí zřejmě

$$h(y^1(\tau), \ldots, y^n(\tau)) = 0$$

a k rovnicím (1.20) přistupuje ještě rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y^n}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{A=1}^{n-1} \frac{\partial y^n}{\partial y^A} \frac{\mathrm{d}y^A}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{A=1}^{n-1} \frac{\partial y^n}{\partial y^A} f_A = -\frac{\sum_{A=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial y^A} f_A}{\frac{\partial h}{\partial y^n}} = f_n\,.$$

Tím je lemma dokázáno.

2. HOLONOMNÍ VAZBA V M_4

Pseudoeuklidovský prostor M_4 s indexem 1 vyšetřovaný v předešlém odstavci — jak známo — je modelem prostoročasu ve speciální teorii telativity. Uvedené matematické pojmy mají pak následující fyzikální význam. Souřadnice

$$\begin{aligned} x^1 &= x\,, \\ x^2 &= y\,, \\ x^3 &= z\,, \\ x^0 &= t \end{aligned}$$

tvoří systém prostorových (x^1, x^2, x^3) souřadnic a časové (x^0) souřadnice, neboli systém časoprostorových souřadnic pozorovatele spojeného s inerciální soustavou. Konstanta c v (1.1) značí pak rychlost světla. Světočára hmotné částice je křivkou v M_4 s popisem

$$
\begin{aligned}
x &= x(t) = x^1(t)\,,\\
y &= y(t) = x^2(t)\,,\\
z &= z(t) = x^3(t)\,,\\
t &= t\,, \quad t \in (t_1, t_2)\,.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Předpokládejme v dalším, že tato křivka je regulární křivkou ve smyslu definice 3. Pro tuto křivku pak platí

$$t \in (t_1, t_2) \Rightarrow g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} < 0\,,$$

tj.

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 < c^2\,. \tag{2.2}$$

Budeme zkoumat holonomní vazbu

$$\omega(x^\alpha) = \omega(x, y, z, t) = 0\,. \tag{2.3}$$

Omezme se provždy na vyšetřování pouze takových vazeb, pro něž (2.3) je rovnicí regulární nadplochy Ω v nějaké oblasti $\Lambda \subset M_4$.

Věta 1. *K tomu, aby libovolným bodem $\boldsymbol{M} \in \Omega$ procházela světočára hmotné částice ležící (lokálně) na nadploše Ω je nutné a stačí, aby v každém bodě nadplochy byla splněna podmínka*

$$\mathbf{A}\omega \equiv \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 > 0\,, \tag{2.4}$$

tj. aby Ω byla typu R. *Vazbu (2.3) pak nazveme přípustnou.*

Důkaz: Prochází-li libovolným bodem nadplochy světočára hmotné částice, pak v tečné nadrovině nadplochy v libovolném bodě $\boldsymbol{M} \in \Omega$ leží vektor o imaginární délce. V nadrovině kolmé na tento vektor leží tudíž vesměs vektory o délce reálné. Mezi nimi je také vektor normály v bodě $\boldsymbol{M}$, proto Ω je typu R. Obráceně, bude-li Ω typu R, pak v tečné nadrovině nadplochy v libovolném jejím bodě leží vektor o imaginární délce. Tento vektor lze zřejmě vzíti za tečný vektor nějaké křivky v tomto bodě, která bude lokálně světočárou jisté hmotné částice ležící na nadploše Ω (viz poznámka 1.). Rovnost (2.4) je pak jenom rozepsáním podmínky (1.18).

Přípustnosti holonomní vazby lze dát ještě druhý fyzikální význam. Nežli k tomu přikročíme, podáme jednu, geometricky méně jednoduchou zato však názornější interpretaci vyšetřované vazby.

Zvolme libovolně, ale pevně časoprostorový systém souřadnic $\{x^\alpha\}$ v M_4. Označme symbolem T „časovou osu", tj. jednodimensionální vektorový podprostor prostoru M_4 s popisem $x^a = 0$ $(a = 1, 2, 3)$. Faktorový prostor M_4/T je pak přirozeným způsobem opatřen strukturou trojdimensionálního euklidovského prostoru, který je opět přirozeným způsobem isomorfní se souřadnou nadrovinou s popisem $x^0 = 0$. Označme tento faktorový prostor symbolem E_3^T. Zřejmě, jsou-li v^α $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ složky vektorového pole na nějaké oblasti v M_4, pak veličiny v^a $(a = 1, 2, 3)$ určují složky vektorového pole v E_3^T závislého (obecně včetně svého definičního oboru) na parametru x^0.

Prostor E_3^T ovšem závisí podstatně na volbě časoprostorového systému, přesněji na volbě „časové osy". Jak je vidět, prostor E_3^T zde hraje roli prostoru (ve smyslu fyzikálním) příslušného zvolenému pozorovateli.

Nechť (2.3) je rovnicí regulární nadplochy Ω v oblasti $\Lambda \subset N_4$ a nechť platí

$$\mathbf{A}^*\omega \equiv \left[\frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial\omega}{\partial z}, 0\right] \neq \bar{0} \tag{2.5}$$

ve všech bodech nadplochy Ω. Zde $\bar{0}$ značí nulový vektor v M_4 a „vektor" $\mathbf{A}^*\omega$ je ovšem závislý na volbě časoprostorového systému. Můžeme také říkat, že rovnicí (2.3) je v nějakém okolí $\mathscr{U}$ libovolnéhu bodu $\mathbf{M} \in \Omega$ dána pohybující se (pulsující, měnící svůj tvar) regulární plocha v E_3^T. Toto okolí $\mathscr{U}$ nechť je pevně zvoleno.

Mějme nyní nějaký (geometrický) bod $\mathbf{M}_0(t) \in E_3^T$ „ležící v nějakém časovém intervalu $\mathscr{I}$ na této ploše". Jinými slovy, nechť „hladké" funkce

$$x(t)\,,\; y(t),\; z(t)$$

určující trajektorii bodu $\mathbf{M}_0(t)$ v E_3^T vyhovují vztahu

$$\omega(x(t), y(t), z(t), t) = 0 \tag{2.6}$$

pro $t \in \mathscr{I}$, přičemž pro tato t platí

$$[x(t), y(t), z(t), t] \in \mathscr{U}\,.$$

Derivováním vztahu (2.6) dostáváme

$$t \in \mathscr{I} \Rightarrow -\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.7}$$

Předpokládejme nyní, že bod $\mathbf{M}_0(t)$ je pro $t \in \mathscr{I}$ pevně spojen s pohybující se plochou v E_3^T, tj. je touto plochou unášen aniž by se po ní posouval. Stručně budeme říkat, že geometrický bod $\mathbf{M}_0$ je lokálně unášen plochou v E_3^T. Matematicky znamená tato podmínka, že vektor okamžité rychlosti bodu $\mathbf{M}_0(t)$ leží ve směru normály pohybující se plochy v E_3^T, neboli

$$(2.8) \qquad t \in \mathscr{I} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = k \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = k \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = k \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Dosazením z (2.8) do (2.7) spočítáme k:

$$k = -\frac{\partial \omega}{\partial t} |\mathbf{A}^* \omega|^{-2}.$$

Označíme-li pak v^2 čtverec velikosti okamžité rychlosti bodu $\mathbf{M}_0(t)$, platí

$$(2.9) \qquad t \in \mathscr{I} \Rightarrow v^2(t) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 |\mathbf{A}^* \omega|^{-2}.$$

Věta 2. *Mějme v M_4 dán pevný časoprostorový systém souřadnic $\{x^\alpha\}$. Je-li (2.3) rovnicí přípustné vazby, pak okamžitá rychlost libovolného pohybujícího se geometrického bodu $\mathbf{M}_0(t) \in E_3^T$ lokálně unášeného příslušnou regulární plochou v E_3^T je menší nežli rychlost světla.*

Důkaz: Předně z definice přípustné vazby a z (2.4) plyne (2.5). Dále z (2.4) a z (2.9) plyne $v^2 < c^2$.

Věta 3. *Mějme opět v M_4 pevný časoprostorový systém $\{x^\alpha\}$. Nechť (2.3) je rovnicí regulární nadplochy Ω v $\Lambda \subset M_4$ a nechť platí (2.5) ve všech bodech Ω. Je-li okamžitá rychlost libovolného bodu lokálně unášeného příslušnou plochou v E_3^T menší nežli rychlost světla, pak je (2.3) rovnicí přípustné vazby.*

Důkaz: Podle výše řečeného platí v libovolném bodě $\mathbf{M} \in \Omega$ (2.9). Je-li tudíž $v < c$, plyne odtud okamžitě (2.4).

Nechť nyní (2.3) je rovnicí regulární nadplochy Ω v $\Lambda \subset M_0$. Snadno lze vidět, platí-li (2.5) třeba v jediném časoprostorovém systému a jsou-li v tomto systému splněny i ostatní předpoklady věty 3, pak platí (2.5) ve všech časoprostorových souřadných systémech. Pohybuje-li se tedy regulární plocha v E_3^T spojeném s některou inerciální soustavou rychlostí menší nežli rychlost světla, jeví se ve všech inerciálních soustavách jakožto pohybující se *regulární* plocha v příslušném E_3^T rychlostí menší nežli rychlost světla (vše ovšem lokálně).

Celkem můžeme výsledky věty 2 a 3 shrnout stručně takto: Přípustné vazby jsou (lokálně) realisovatelné právě všemi regulárními pohybujícími se „hmotnými" plochami v E_3^T.

Poznámka 2. Nechť zase (2.3) je rovnicí regulární nadplochy Ω v oblasti Λ. Nechť v bodě $\boldsymbol{M} \in \Omega$ platí $\mathbf{A}\omega = 0$. Pak platí (2.5) ve kterémkoliv časoprostorovém systému a z (2.9) dostáváme, že okamžitá rychlost geometrického bodu lokálně unášeného příslušnou regulární plochou v E_3^T je rovna rychlosti světla ve všech časoprostorových systémech. Nakonec platí-li v bodě $\boldsymbol{M}$ nerovnost $\mathbf{A}\omega < 0$, pak tečná nadrovina nadplochy Ω v bodě $\boldsymbol{M}$ nese positivně definitní metriku. Existuje tedy časoprostorový systém souřadný takový, že z jeho hlediska jsou události této nadroviny současné a události na Ω dostatečně blízké $\boldsymbol{M}$ „skoro současné".

3. SILOVÉ POLE V MINKOWSKÉHO PROSTOROČASU A ZÁKLADNÍ PRINCIP

Prostor M_4 s pevně zvoleným systémem časoprostorových souřadnic lze přirozeným způsobem ztotožnit s aritmetickým prostorem R^4. V tomto smyslu budeme pak psát například $M_4 \times R^4 = R^8$. Předpokládejme, že časoprostorový systém je pevně dán, z odvozených formulí však bude okamžitě patrno, že mají vektorový resp. tensorový charakter a nezávisí tudíž na zvoleném systému.

Jak už bylo řečeno v úvodu, vyjdeme z pohybové rovnice (0.2). V této rovnici vektor P^α značí sílu působící na částici. Ve speciální teorii relativity se často vynechává striktní definice síly nezávislé na pohybových rovnicích, nebo se dokonce síla působící na hmotnou částici definuje *a posteriori* a to právě vztahem (0.2). Za předpokladu konstantnosti funkce $\mu(\tau)$ se pak odvozuje z (0.2), že vektor P^α je (ve smyslu Minkowského metriky) kolmý na světočáru hmotné částice. Abychom naše úvahy mohli vésti podobným způsobem jako v klasické mechanice, použijeme přístupu obráceného, tj. silové pole dané vektorem P^α definujeme *a priori*, nezávisle na rovnici (0.2). Předpoklady, které vyslovíme v definici silového pole jsou na jedné straně, pokud je mi známo, splněny u všech konkrétních případů „makroskopických sil", na druhé straně jsou postačující k tomu, abychom mohli provést analýzu rovnic (0.2) v matematicky uzavřeném tvaru. Ukážeme také, že z těchto požadavků plyne konstantnost vlastní hmoty μ. Nejsou zde tedy zahrnuty některé případy „mikroskopických silových polí" jejichž působením se vlastní hmota částice mění.

Definice 4. *V Minkowského prostoročasu M_4 budiž definováno pole vektorů*

$$P^\alpha(x^\beta, \overset{*}{x}{}^\beta) \tag{3.1}$$

takto:

1) *Nechť $\mathscr{G}$ je nějaká oblast v M_4.*

2) *Označme znakem $\mathscr{H}_0$ množinu bodů $[\overset{*}{x}{}^\alpha]$ z R^4, pro něž platí*

$$g_{\alpha\beta}\overset{*}{x}{}^\alpha\overset{*}{x}{}^\beta = -c^2 . \tag{3.2}$$

Nechť $\mathscr{H}$ je jistá otevřená množina v R^4 obsahující $\mathscr{H}_0$, tj. $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$.

3) *Nechť funkce* $P^\alpha(x^\beta, \overset{*}{x}{}^\beta)$ *mají spojité všechny parciální derivace prvého řádu na otevřené množině* $\mathcal{G} \times \mathcal{H} \subset R^8$.

4) *Nechť pro funkce* (3.1) *platí*

$$(3.3) \qquad [x^\alpha] \in \mathcal{G}\,, \quad [\overset{*}{x}{}^\alpha] \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g_{\alpha\beta} P^\alpha \overset{*}{x}{}^\beta \equiv P^1 \overset{*}{x}{}^1 + P^2 \overset{*}{x}{}^2 + P^3 \overset{*}{x}{}^3 - c^2 P^0 \overset{*}{x}{}^0 = 0\,.$$

Pak říkáme, že funkcemi (3.1) *je dáno silové pole na oblasti* $\mathcal{G} \subset M_4$.

Nechť rovnicemi

$$(3.4) \qquad x^\alpha = x^\alpha(u)\,, \quad u \in (u_1, u_2)$$

je popsána světočára hmotné částice, přičemž platí

$$u \in (u_1, u_2) \Rightarrow [x^\alpha(u)] \in \mathcal{G}\,.$$

Zavedeme-li na této světočáře parametr τ rovností (1.14) („vlastní čas" hmotné částice), můžeme místo (3.4) psát

$$(3.5) \qquad \tau \in (\tau_1, \tau_2)\,, \quad x^\alpha = x^\alpha(\tau)\,.$$

Pak platí (1.15), tj.

$$(3.6) \qquad \tau \in (\tau_1, \tau_2) \Rightarrow g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -c^2\,.$$

V intervalu (τ_1, τ_2) mějme definovanou hladkou funkci $\mu(\tau)$. Tato funkce přiřazena světočáře (nezávisle na volně časoprostorového souřadného systému) vyjádřuje klidovou hmotu hmotné částice. Pohybové rovnice jsou dány tímto známým zákonem:

Platí-li mezi světočárou (3.5) a polem (3.1) vztah

$$(3.7) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,[\mu(\tau)\,\dot{x}^\alpha(\tau)] = P^\alpha(x^\beta(\tau), \dot{x}^\beta(\tau))$$

v intervalu (τ_1, τ_2), pak říkáme, že hmotná částice se pohybuje v silovém poli daném funkcemi (3.1).

Derivováním vztahu (3.6) dostaneme

$$(3.8) \qquad g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \ddot{x}^\alpha = 0\,.$$

Na druhé straně z rovnic (3.7) plyne

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\,\dot{x}^\alpha + \mu \ddot{x}^\alpha = P^\alpha$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\tau}\,g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \mu g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = g_{\alpha\beta} P^\alpha \dot{x}^\beta$$

a odtud konečně podle (3.3), (3.6) a (3.8)

$$\tau \in (\tau_1, \tau_2) \Rightarrow \frac{d\mu}{d\tau} = 0 .$$

Je tedy klidová hmota hmotné částice pohybující se v takto definovaném silovém poli konstantní (viz také [3], kap. VI, § 4). Proto mají-li funkce μ, x^α s výše popsaným fyzikálním významem vyhovovat rovnici (3.7), je nutně μ konstantní a rovnici (3.7) můžeme psát ve tvaru

$$\mu \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = P^\alpha(x^\beta, \dot{x}^\beta) . \tag{3.9}$$

Vyjděme nyní naopak z rovnice (3.9), v níž $\mu \neq 0$ je nějaká konstanta (z fyzikálních důvodů dokonce kladná) a dokážeme, že existuje lokálně (při daných počátečních podmínkách jediné) její řešení $x^\alpha(\tau)$, které popisuje světočáru hmotné částice. Toto tvrzení však plyne okamžitě z lemmatu 1, v němž jsme položili ($n = 8$)

$$h(x^\alpha, \overset{*}{x}{}^\alpha) = g_{\alpha\beta} \overset{*}{x}{}^\alpha \overset{*}{x}{}^\beta + c^2 .$$

Dostáváme tedy tento výsledek: *Vybereme-li libovolně hodnoty* $\underset{0}{x}{}^\alpha \in \mathscr{G}$, $\underset{0}{\overset{*}{x}}{}^\alpha \in \mathscr{H}_0$, *prochází bodem* $[\underset{0}{x}{}^\alpha, \underset{0}{\overset{*}{x}}{}^\alpha] \in R^8$ *lokálně jediná integrální křivka systému* (3.9). *Je-li tato křivka popsána funkcemi* $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, *pak tyto funkce mají pro* $0 < \tau < \tau_0$ *spojité derivace druhého řádu a platí*

$$\tau \in (0, \tau_0) \Rightarrow [x^\alpha(\tau)] \in \mathscr{G} , \quad [\dot{x}^\alpha(\tau)] \in \mathscr{H}_0$$

a

$$\lim_{\tau \to 0+} x^\alpha(\tau) = \underset{0}{x}{}^\alpha , \quad \lim_{\sigma \to 0+} \dot{x}^\alpha(\tau) = \underset{0}{\overset{*}{x}}{}^\alpha .$$

Tato křivka má tedy tečné vektory o imaginární délce a může být v intervalu $\langle 0, \tau_0)$ považována za světočáru hmotné částice. Vlastní čas zavedený rovností (1.14) je, až na aditivní konstantu, proměnná τ vystupující v rovnici (3.9).

Nyní přistoupíme k vyšetřování pohybových rovnic hmotné částice vázané holonomní vazbou. Mějme tedy vazbu (2.3) representovanou regulární nadplochou Ω typu R zadanou parametricky funkcemi (1.2) na oblasti $\mathcal{O} \subset R^3$. Nechť dále funkcemi (3.1) je dáno silové pole na oblasti $\mathscr{G}$, přičemž předpokládejme $\Omega \subset \mathscr{G}$. Vlastnosti vázaného pohybu budeme odvozovat z tohoto základního principu:

Pohybuje-li se hmotná částice vázaná vazbou (2.3) *v silovém poli daném funkcemi* P^α, *pak mezi její světočárou*

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(\tau)) \tag{3.10}$$

a tímto silovým polem platí vztah

$$\mu \frac{d^2}{d\tau^2} [x^\alpha(\eta^a(\tau))]|_T = P^\alpha(x^\beta(\eta^b(\tau)), \frac{d}{d\tau} x^\beta(\eta^b(\tau)))|_T , \tag{3.11}$$

kde znak $|_T$ *značí složku vektoru ve směru tečném k nadploše, tj. průmět (podle normály) do tečné nadroviny.* Jinými slovy, pohybová rovnice (3.9) je splněna pouze ve směru tečném k nadploše Ω, anebo „složka síly kolmá k vazbě se nezúčastňuje pohybu“.

Naším nejbližším úkolem bude dokázat, že k rovnicím (3.11) existuje při vhodných počátečních podmínkách lokálně jediná integrální křivka, jíž je dána světočára hmotné částice ležící na padploše Ω. K důkazu použijeme opět lemmatu 1, napřed však musíme upravit rovnice (3.11) na tvar explicitně rozřešený vzhledem k druhým derivacím hledaných funkcí $\eta^a(\tau)$. Zavedeme předně toto stručné označení

$$\hat{P}^\alpha(\eta^a, \overset{*}{\eta}^a) \equiv P^\alpha(x^\beta(\eta^a), B^\beta_c(\eta^a)\, \overset{*}{\eta}^c)\,.$$

Definujme nyní zobrazení Φ množiny $\mathcal{O} \times R^3$ bodů $[\eta^a, \overset{*}{\eta}^a]$ do množiny R^8 bodů $[x^\alpha, \overset{*}{x}^\alpha]$ takto: Bodu $[\eta^a, \overset{*}{\eta}^a] \in \mathcal{O} \times R^3$ přiřadíme bod

$$\Phi([\eta^a, \overset{*}{\eta}^a]) = [x^\alpha(\eta^a), B^\alpha_b(\eta^a)\, \overset{*}{\eta}^b]\,.$$

Toto je zřejmě spojité zobrazení a vzorem otevřené množiny $\mathcal{G} \times \mathcal{H} \subset R^8$ při tomto zobrazení je nějaká otevřená množina $\mathcal{W} \subset \mathcal{O} \times R^3$. Funkce

$$\hat{P}^\alpha(\eta^a, \overset{*}{\eta}^a) = P^\alpha(\Phi([\eta^a, \overset{*}{\eta}^a]))$$

mají na množině $\mathcal{W}$ spojité první parciální derivace. Rovnice (3.11) pak můžeme napsat, s přihlédnutím ke vztahům (1.16a) a (1.7), ve tvaru

$$\mu B^\alpha_c \frac{D}{d\tau}\, \dot{\eta}^c = B^\alpha_c \hat{P}^\beta B^c_\beta\,,$$

což je ekvivalentní, vzhledem k lineární nezávislosti vektorů B^α_c, systému rovnic

$$\mu \frac{D}{d\tau}\, \dot{\eta}^c(\tau) = \hat{P}^\beta(\eta^a(\tau), \dot{\eta}^a(\tau))\,.\, B^c_\beta(\eta^a(\tau))\,. \tag{3.12}$$

Chceme, aby řešení této rovnice splňovalo podmínku

$$\hat{g}_{ab}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b + c^2 = 0\,,$$

tj. aby podél řešení platilo

$$[\eta^a(\tau), \dot{\eta}^a(\tau)] \in \mathcal{W}_0\,, \tag{3.13}$$

kde znakem $\mathcal{W}_0$ jsme označili množinu bodů $[\eta^a, \overset{*}{\eta}^a] \in \mathcal{O} \times R^3$, pro něž platí

$$[\eta^a] \in \mathcal{O}\,,$$
$$\hat{g}_{bc}(\eta^a)\, \overset{*}{\eta}^b \overset{*}{\eta}^c + c^2 = 0\,.$$

Zřejmě jest $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$, protože platí dokonce

$$\Phi(\mathcal{W}_0) \subset \Omega \times \mathcal{H}_0\,.$$

Z této implikace a vztahu (3.3) dostáváme identitu

$$[\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a] \in \mathscr{W}_0 \Rightarrow g_{\alpha\beta} \hat{P}^\alpha B^\beta_c \overset{*}{\eta}{}^c = 0 . \tag{3.14}$$

Přepíšeme-li ještě systém (3.12) ve tvaru

$$\ddot{\eta}^c = - \hat{\Gamma}^c_{ab} \dot{\eta}^a \dot{\eta}^b + \frac{1}{\mu} P^\beta B^c_\beta , \tag{3.15}$$

můžeme pro něj už použít lemmatu 1. Nyní máme ($n = 6$)

$$h(\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a) = \hat{g}_{bc}(\eta^a)\, \overset{*}{\eta}{}^b \overset{*}{\eta}{}^c + c^2 .$$

Předpoklady lemmatu se ověří už snadno; ověřme explicitně splnění podmínky (1.19). Nechť tedy $[\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a] \in \mathscr{W}_0$. Pak postupně dostáváme

$$\partial_i \hat{g}_{ab} \overset{*}{\eta}{}^a \overset{*}{\eta}{}^b \overset{*}{\eta}{}^i + 2\hat{g}_{ib} \overset{*}{\eta}{}^b (-\hat{\Gamma}^i_{ad} \eta^a \eta^d) + \frac{2}{\mu} \hat{g}_{ib} \hat{P}^\beta B^i_\beta \overset{*}{\eta}{}^b =$$

$$= \partial_i \hat{g}_{ab} \eta^a \overset{*}{\eta}{}^b \overset{*}{\eta}{}^i - \hat{g}_{ib} \overset{*}{\eta}{}^b \overset{*}{\eta}{}^a \overset{*}{\eta}{}^d \, \hat{g}^{ie} (\partial_a \hat{g}_{ed} + \partial_d \hat{g}_{ae} - \partial_e \hat{g}_{ad}) + \frac{2}{\mu} \hat{P}^\beta B^i_\beta \hat{g}_{ib} \overset{*}{\eta}{}^b =$$

$$= \frac{2}{\mu} \hat{P}^\beta B^i_\beta \hat{g}_{ib} \eta^b .$$

Zde poslední člen upravíme ještě pomocí (1.9a) a (3.14)

$$\frac{2}{\mu} \hat{P}^\beta B^i_\beta \hat{g}_{ib} \overset{*}{\eta}{}^b = \frac{2}{\mu} g_{\alpha\beta} \hat{P}^\beta B^\alpha_a \overset{*}{\eta}{}^a = 0 .$$

Tvrzení lemmatu pak můžeme vyslovit takto: Vybereme-li libovolně bod $[\eta^a_0, \overset{*}{\eta}{}^a_0] \in \mathscr{W}_0$, prochází tímto bodem lokálně jediná integrální křivka systému (3.15) resp. (3.12). Je-li tato křivka popsána funkcemi $\eta^a(\tau)$, pak $\eta^a(\tau)$ mají pro $0 < \tau < \tau_0$ spojité derivace druhého řádu a platí

$$\lim_{\tau \to 0+} \eta^a(\tau) = \eta^a_0 , \quad \lim_{\tau \to 0+} \dot{\eta}^a(\tau) = \overset{*}{\eta}{}^a_0 ,$$

jakož i vztah (1.15).

Máme tedy tento výsledek: *Libovolným bodem* **M** *nadplochy* Ω *prochází (lokální) řešení pohybové rovnice* (3.12), *které popisuje světočáru* (3.10) *hmotné částice. Tato světočára leží na nadploše* Ω *a je určena jednoznačně libovolným směrem o imaginární délce ležícím v tečné nadrovině nadplochy* Ω *v bodě* **M**. Parametr τ lze přitom považovat za „vlastní čas" této částice.

Příklad. Silové pole příslušné elektromagnetickému poli je dáno funkcemi[4])

$$P^\beta_{(e)}(x^\alpha, \overset{*}{x}{}^\alpha) = e g^{\gamma\beta} F_{\gamma\delta}(x^\alpha)\, \overset{*}{x}{}^\delta , \tag{3.16}$$

---

[4]) Viz např. [1], § 25.

kde e je elektrický náboj uvažované hmotné částice a $F_{\gamma\delta}(x^\alpha)$ je antisymetrický tensor elektromagnetického pole. Budeme předpokládat, že tyto funkce jsou dostatečně hladké na oblasti $\mathcal{G}$ a ukážeme, že funkcemi (3.16) je na oblasti $\mathcal{G}$ dáno silové pole ve smyslu definice 4 (závislé ovšem na parametru e). Stačí ověřit vztah (3.3). Klademe-li $\mathcal{H} = R^4$, máme (dokonce pro $[\overset{*}{x}{}^\alpha] \in \mathcal{G}$, $[\overset{*}{x}{}^\alpha] \in R^4$)

$$g_{\alpha\beta} P^\beta_{(e)} \overset{*}{x}{}^\alpha = e g_{\alpha\beta} g^{\gamma\beta} F_{\gamma\delta} x^\delta x^\alpha = e F_{\gamma\delta} \overset{*}{x}{}^\gamma \overset{*}{x}{}^\delta = 0$$

vzhledem k antisymetričnosti tensoru $F_{\gamma\delta}$.

4. NĚKTERÉ PRINCIPY MECHANIKY

V tomto odstavci odvodíme některé důsledky plynoucí z rovnice (3.12) pro pohyb hmotné částice vázané holonomní vazbou v silovém poli. Tyto rovnice budou po formální stránce podobné některým diferenciálním principům klasické mechaniky. Ukazuje se, že lze s výhodou využít geometrických vlastností časoprostoru M_4. Použití tensorového počtu umožňuje přitom postupovat stejně jako v klasické mechanice (viz [2]).

Vraťme se do situace z předešlého odstavce. Máme danou vazbu (2.3) representovanou regulární nadplochou Ω typu R zadanou parametricky funkcemi (1.2) na oblasti $\mathcal{O} \subset R^3$. Dále je funkcemi (3.1) dáno silové pole na oblasti $\mathcal{G} \subset M_4$ a předpokládejme $\Omega \subset \mathcal{G}$. Zadat křivku na nadploše Ω znamená tedy zadat vhodně funkce $\eta^a(\tau)$. Omezíme se na vyšetřování takových funkcí $\eta^a(\tau)$, které jsou v uvažovaných intervalech dvakrát spojitě diferencovatelné a pro něž platí $[\eta^a(\tau)] \in \mathcal{O}$. Pohybové rovnice (3.12) pro světočáru hmotné částice o klidové hmotě $\mu \neq 0$ můžeme psát ve tvaru

$$\ddot{\eta}^c = -\hat{\Gamma}^c_{ab}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b + \frac{1}{\mu} P^\beta B^c_\beta . \tag{3.15}$$

Protože už nemůže dojít k nedorozuměním, vynecháváme zde i v dalším stříšku nad vektorem P^α. Vyhovují-li funkce

$$\eta^c = \eta^c(\tau), \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2) \tag{4.1}$$

v tomto intervalu rovnici (3.15), pak vyhovují také rovnici

$$B^\alpha_c \ddot{\eta}^c + \partial_b B^\alpha_a \dot{\eta}^a \dot{\eta}^b = -B^\alpha_c \hat{\Gamma}^c_{ab} \dot{\eta}^a \dot{\eta}^b + \frac{1}{\mu} B^c_\beta B^\alpha_c P^\beta + \partial_b B^\alpha_a \dot{\eta}^a \dot{\eta}^b . \tag{4.2}$$

Podle (1.7a) a (1.16) můžeme tyto rovnice přepsat na tvar

$$\mu \ddot{x}^\alpha = P^\alpha + \mu \dot{\eta}^a \dot{\eta}^b (\partial_b B^\alpha_a - \hat{\Gamma}^c_{ab} B^\alpha_c) - N^\alpha N_\beta P^\beta$$

a konečně podle (1.10) na tvar

$$\mu \ddot{x}^\alpha = P^\alpha + N^\alpha(\mu \hat{b} - P^\beta N_\beta) . \tag{4.3}$$

Je vidět, že rovnice (4.3) jsou po formální stránce analogické Lagrangeovým rovnicím I. druhu. Skutečné srovnání s klasickou teorií provedeme v příštím odstavci.

Naopak, nechť funkce

$$x^\alpha(\tau) = x^\alpha(\eta^a(\tau)), \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2) \tag{4.4}$$

vyhovují v intervalu (τ_1, τ_2) rovnicím (4.3). Pak vyhovují také rovnicím (4.2), tj.

$$B^\alpha_c \left[\ddot{\eta}^c + \hat{\Gamma}^c_{ab}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b - \frac{1}{\mu} B^c_\beta P^\beta \right] = 0$$

a odtud vzhledem k lineární nezávislosti vektorů B^α_c plynou rovnice (3.15) resp. (3.12). Platí tedy

Věta 4. *K tomu, aby existovalo okolí vodu τ_0 v němž funkce (4.4) popisují světočáru hmotné částice o hmotě $\mu \neq 0$ vázané vazbou (2.3) a pohybující se v silovém poli (3.1), je nutné a stačí, aby platilo*

$$g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha(\tau_0)\, \dot{x}^\beta(\tau_0) = -c^2$$

a aby funkce (4.4) vyhovovaly v nějakém okolí bodu τ_0 rovnicím (4.3).

Zbývající část důkazu plyne snadno z úvah v předešlém odstavci.

Označme

$$E(\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a) \equiv \hat{g}_{ab}\overset{*}{\eta}{}^a\overset{*}{\eta}{}^b$$

funkci definovanou pro $[\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a] \in \mathcal{O} \times R^3$. Pak platí

$$\frac{\partial E}{\partial \eta^c} = \partial_c \hat{g}_{ab}\overset{*}{\eta}{}^a\overset{*}{\eta}{}^b,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}{}^c} = 2\hat{g}_{ac}\overset{*}{\eta}{}^a.$$

Pro funkce (4.1) platí v intervalu (τ_1, τ_2) (formálně dosazujeme $\dot{\eta}^a$ za $\overset{*}{\eta}{}^a$)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial \dot{\eta}^c} &= 2\partial_b\hat{g}_{ac}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b + 2\hat{g}_{ac}\ddot{\eta}^a = \\
&= 2\partial_b\hat{g}_{ac}\dot{\eta}^a\dot{\eta}^b + 2\hat{g}_{ac}\left(\frac{D}{\mathrm{d}\tau}\dot{\eta}^a\right) - \hat{g}_{ac}\hat{g}^{al}(\partial_d\hat{g}_{lb} + \partial_b\hat{g}_{ld} - \partial_l\hat{g}_{bd})\,\dot{\eta}^b\dot{\eta}^d = \\
&= 2\hat{g}_{ac}\left(\frac{D}{\mathrm{d}\tau}\dot{\eta}^a\right) + \dot{\eta}^b\dot{\eta}^d(2\partial_b\hat{g}_{cd} - \partial_d\hat{g}_{cb} - \partial_b\hat{g}_{cd} + \partial_c\hat{g}_{bd}) = \\
&= 2\hat{g}_{ac}\left(\frac{D}{\mathrm{d}\tau}\dot{\eta}^a\right) + \dot{\eta}^b\dot{\eta}^d\,\partial_c\hat{g}_{bd} = 2\hat{g}_{ac}\left(\frac{D}{\mathrm{d}\tau}\dot{\eta}^a\right) + \frac{\partial E}{\partial \eta^c}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Vyhovují-li tedy funkce (4.1) pohybové rovnici (3.12), pak platí pro tyto funkce v témže intervalu

$$(4.6) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}{}^c} - \frac{\partial E}{\partial \eta^c} = \frac{2}{\mu}\,\hat{g}_{ac}\,P^\beta B^a_\beta\,.$$

Tuto rovnici můžeme vzhledem k identitě

$$\hat{g}_{ac}P^\beta B^a_\beta = g_{\alpha\gamma}B^\alpha_c B^\gamma_a B^a_\beta P^\beta = g_{\alpha\beta}B^\alpha_c P^\beta - g_{\alpha\gamma}B^\alpha_c N^\gamma N_\beta P^\beta = g_{\alpha\beta}B^\alpha_c P^\beta$$

napsat ve tvaru

$$(4.7) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}{}^c} - \frac{\partial E}{\partial \eta^c} = \frac{2}{\mu}\,g_{\alpha\beta}B^\alpha_c P^\beta\,.$$

Rovnice (4.7) jsou opět po formální stránce analogické Lagrangeovým rovnicím II. druhu v klasické mechanice.

Nechť naopak funkce (4.1) vyhovují v intervalu (τ_1, τ_2) rovnicím (4.7). Pak nutně platí také (4.6) a po dosazení

$$2\hat{g}_{ac}\left[\mu\,\frac{D}{\mathrm{d}\tau}(\dot{\eta}^c) - P^\beta B^a_\beta\right] = 0\,,$$

z čehož vzhledem k (1.5) plyne (3.12) v intervalu (τ_1, τ_2). Platí tedy

Věta 5. *K tomu, aby existovalo okolí bodu* τ_0 *v němž funkce* (4.4) *popisují světočáru hmotné částice o hmotě* $\mu \neq 0$ *vázané vazbou* (2.3) *a pohybující se v silovém poli* (3.1), *je nutné a stačí, aby platilo*

$$g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha(\tau_0)\,\dot{x}^\beta(\tau_0) = -c^2$$

a aby funkce (4.1) *vyhovovaly v nějakém okolí bodu* τ_0 *rovnicím* (4.7).

Nechť funkce (3.1) jsou identicky rovny nule. Jedná se pak o pohyb hmotné částice vázané vazbou (2.3) bez působení sil. Rovnice (3.12) přejdou přitom v rovnice pro geodetickou křivku nadplochy Ω

$$(4.8) \qquad \frac{D}{\mathrm{d}\tau}(\dot{\eta}^c) = 0\,.$$

Tedy v případě, že nepůsobí žádná síla na hmotnou částici vázanou vazbou (2.3), je světočára této hmotné částice geodetickou křivkou na nadploše Ω. Rovnice (4.7) pak mají tvar

$$(4.9) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}{}^c} - \frac{\partial E}{\partial \eta^c} = 0\,.$$

Všimněme si ještě rovnic, k nimž lze dospět, užijeme-li postupu jímž se odvozují Hamiltonovy kanonické rovnice v klasické mechanice. Nechť funkce (4.1) vyhovují pohybovým rovnicím (3.12) v intervalu (τ_1, τ_2). Definujme zobrazení $[\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a] \to$ $\to [\eta^a, p_a]$ množiny $\mathcal{O} \times R^3$ na $\mathcal{O} \times R^3$ předpisem

(4.10a)
$$\eta^a = \eta^a\,,$$
$$p_a = 2\hat{g}_{ac}(\eta^a)\,\overset{*}{\eta}{}^c = \frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}{}^a}\,.$$

Toto zobrazení je zřejmě prosté a zobrazení k němu inversní je dáno předpisem

(4.10b)
$$\eta^a = \eta^a\,,$$
$$\eta^a = \tfrac{1}{2}\hat{g}^{ac}(\eta^a)\,p_c\,.$$

Funkcemi (4.1) jsou definovány jednoznačně funkce $p_a(\tau)$ pomocí (4.10a), klademe-li $\overset{*}{\eta}{}^a(\tau) = \dot{\eta}^a(\tau)$. Definujme nyní na oblasti $\mathcal{O} \times R^3$ funkci $[\eta^a, p_a] \to R^1$ předpisem

(4.11)
$$H(\eta^a, p_a) = E(\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a)\,,$$

kde hodnoty p_a a $\overset{*}{\eta}{}^a$ jsou vázány spolu relacemi (4.10a) resp. (4.10b). Jest tedy

(4.12)
$$H(\eta^a, p_a) = \tfrac{1}{4}\hat{g}^{ab}(\eta^a)\,p_a p_b\,.$$

Dále platí

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}{}^b} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\eta}{}^b}{\partial p_a} = 2\hat{g}_{bc}\overset{*}{\eta}{}^c \cdot \tfrac{1}{2}\hat{g}^{ba} = \overset{*}{\eta}{}^a$$

a podél funkcí (4.1) vyhovujících rovnicím (3.12) a tudíž také (4.7) platí podle (4.12)

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^a} = \frac{\partial E}{\partial \eta^a} + \frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}{}^b}\frac{\partial \overset{*}{\eta}{}^b}{\partial \eta^a} = \frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}\tau} - \frac{2}{\mu}\,g_{\alpha\beta}B^\alpha_a P^\beta + \tfrac{1}{2}p_b(\partial_a \hat{g}^{bc})\,p_c =$$
$$= \frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}\tau} - \frac{2}{\mu}\,g_{\alpha\beta}B^\alpha_a P^\beta + 2\,\frac{\partial H}{\partial \eta^a}\,,$$

tj.

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^a} = -\,\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}\tau} + \frac{2}{\mu}\,g_{\alpha\beta}B^\alpha_a P^\beta\,.$$

Věta 6. *K tomu, aby existovalo okolí bodu τ_0 v němž funkce* (4.4) *popisují světočáru hmotné částice o hmotě $\mu \neq 0$ vázané vazbou* (2.3) *a pohybující se v silovém poli* (3.1), *je nutné a stačí, aby platilo*

a) *funkce $\eta^a(\tau)$ a $p_a(\tau)$ vyhovují v nějakém okolí bodu τ_0 rovnicím*

(4.13a)
$$\frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_a}(\eta^a, p_a)\,,$$

(4.13b)
$$\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}\tau} = -\,\frac{\partial H}{\partial \eta^a}(\eta^a, p_a) + \frac{2}{\mu}\,g_{\alpha\beta}B^\alpha_a(\eta^a)\,\bar{P}^\beta(\eta^a, p_a)\,,$$

kde souvislost mezi $\dot{\eta}^a$ *a* p_a *je dána vztahy* (4.10a), (4.10b), *funkce* H *je definována předpisem* (4.11) *a funkce* $\bar{P}^\beta$ *předpisem*

$$\bar{P}^\beta(\eta^a, p_a) = \hat{P}^\beta(\eta^a, \overset{*}{\eta}^a),$$

b)

$$H(\eta^a(\tau_0), p_a(\tau_0)) = -c^2.$$

Důkaz: Zbývá ještě dokázat postačitelnost. Nechť tedy funkce $\eta^a(\tau)$, $p_a(\tau)$, vyhovují požadavkům a), b) v intervalu (τ_1, τ_2), $\tau_0 \in (\tau_1, \tau_2)$. Rovnice (4,13a) jsou pouze vyjádřením transformačních relací (4.10a), resp. (4.10b). Z rovnic (4.13b) dostaneme po dosazení podle (4.10a) a (4.10b)

$$- \frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}\tau} = - \frac{2}{\mu} g_{\alpha\beta} B^\alpha_a P^\beta + \frac{\partial E}{\partial \eta^a} + \frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}^b} \cdot \frac{\partial \overset{*}{\eta}^b}{\partial \eta^a}. \tag{4.14.}$$

Ale

$$\frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}^b} \frac{\partial \overset{*}{\eta}^b}{\partial \eta^a} = \frac{1}{2} p_b(\partial_a \hat{g}^{bc})\, p_c = 2(\partial_a \hat{g}^{bc})\, \hat{g}_{dc} \hat{g}_{eb} \overset{*}{\eta}^d \overset{*}{\eta}^e$$

a derivováním vztahu

$$\hat{g}^{bc} \hat{g}_{dc} = \delta^b_d$$

dostaneme

$$(\partial_a \hat{g}^{bc})\, \hat{g}_{dc} = - (\partial_a \hat{g}_{dc})\, \hat{g}^{bc}$$

a tedy

$$\frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}^b} \frac{\partial \overset{*}{\eta}^b}{\partial \eta^a} = -2(\partial_a \hat{g}_{dc})\, \overset{*}{\eta}^d \overset{*}{\eta}^c = -2 \frac{\partial E}{\partial \eta^a}.$$

Dosazením do (4.14) máme pak

$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\partial E}{\partial \overset{*}{\eta}^a} \right) = - \frac{2}{\mu} g_{\alpha\beta} B^\alpha_a P^\beta - \frac{\partial E}{\partial \eta^a},$$

což je rovnice (4.7). Pro funkce (4.1) plyne dále podle (4.11) a požadavku b)

$$E(\eta^a(\tau_0), \dot{\eta}(\tau_0)) = -c^2$$

a odtud podle věty 5 už dostáváme tvrzení věty.

Rovnice (4.13a) a (4.13b) jsou opět po formální stránce podobné Hamiltonovým kanonickým rovnicím klasické mechaniky.

5. SROVNÁNÍ S KLASICKOU TEORIÍ

V tomto odstavci porovnáme odvozené Lagrangeovy rovnice s klasickými rovnicemi Newtonovy mechaniky čímž prověříme také oprávněnost ve třetím odstavci vysloveného „základního principu" pro pohyb vázaného hmotného bodu v Minkowského mechanice.

Za tím účelem budeme nejdřív precisovat pojem Newtonova silového pole v daném systému časoprostorových souřadnic a ukážeme jeho souvislost se silovým polem Minkowského mechaniky zavedeným definicí 4.

V dalším nechť

$$\begin{aligned} x^1 &= x\,, \\ x^2 &= y\,, \\ x^3 &= z\,, \\ x^0 &= t \end{aligned}$$

je libovolný, avšak pevně zvolený systém časoprostorových souřadnic pozorovatele spojeného s nějakou inerciální soustavou. Je tedy pevně dána časová osa T a souřadný systém v E_3^T.

Definice 5. *Buďte dány funkve*

(5.1) $$Q^K(x^i, t, \xi^i)\,, \quad K = 1, 2, 3$$

definované takto:

1) *Nechť $\Gamma \subset E_3^T$ je nějaká oblast bodů $[x^i]$.*

2) *Nechť $\mathscr{K} \subset R^3$ je euklidovská koule o poloměru c, tj. oblast bodů $[\xi^i]$, které vyhovují nerovnosti*

$$\sum_{i=1}^{3} (\xi^i)^2 < c^2\,.$$

3) *Nechť $\mathscr{I} \subset T$ je nějaký (neprázdný) otevřený interval.*

4) *Nechť funkce (5.1) mají spojité parciální derivace aspoň prvého řádu na oblasti $\Gamma \times \mathscr{I} \times \mathscr{K}$.*

Pak říkáme, že funkcemi (5.1) je dáno Newtonovo silové pole na oblasti $\Gamma \times \mathscr{I} \subset \subset E_3^T \times T$ (příslušné danému inerciálnímu pozorovateli).

Uvažujme světočáru

(5.2) $$x^\alpha = x^\alpha(\tau)\,, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2)$$

hmotné částice o klidové hmotě $\mu \neq 0$. V našem časoprostorovém systému ji lze popsat funkcemi

(5.3) $$x^K = x^K(t)\,, \quad t \in (t_1, t_2)\,,$$

přičemž platí

$$v^2(t) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right)^2 < c^2$$

a funkce (5.3) mají spojité derivace aspoň druhého řádu v (t_1, t_2). Předpokládejme, že funkcemi (5.1) je dáno Newtonovo silové pole v oblasti $\Gamma \times \mathscr{I}$ a pro funkce (5.3) platí

$$(t_1, t_2) \subset \mathscr{I} \quad \text{a} \quad t \in (t_1, t_2) \Rightarrow [x^i(t)] \in \Gamma\,.$$

Pro pohyb hmotného bodu v Newtonově silovém poli platí, jak známo, mezi funkcemi (5.1) a (5.3) rovnice

(5.4) $$t \in (t_1, t_2) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(t)\,\frac{\mathrm{d}x^K}{\mathrm{d}t}\right) = Q^K\left(x^i(t), t, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right),$$

kde

(5.4a) $$m(t) = \frac{\mu}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)}}$$

je relativní hmota příslušné hmotné částice v uvažovaném časoprostorovém systému. Vztah (5.4) lze však odvodit z obecných pohybových rovnic (3.7), přiřadíme-li vhodně Newtonovu silovému poli silové pole Minkowského mechaniky ve smyslu definice 4.

Lemma 2. *Nechť je funkcemi (5.1) dáno Newtonovo silové pole na oblasti $\Gamma \times \mathscr{I}$. Potom funkcemi P^β takto definovanými*

(5.5) $$P^K(x^\alpha, \overset{*}{x}{}^\alpha) = \overset{*}{x}{}^0 Q^K\left(x^i, x^0, \frac{\overset{*}{x}{}^i}{\overset{*}{x}{}^0}\right),$$

$$P^0(x^\alpha, x^\alpha) = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{3} \overset{*}{x}{}^\alpha Q^i\ {}^{5)}$$

je dáno Minkowského silové pole na oblasti $\mathscr{G} = \Gamma \times \mathscr{I}$ ve smyslu definice 4.

Důkaz: Platí

$$\frac{\overset{*}{x}{}^i}{\overset{*}{x}{}^0} \in \mathscr{K} \Leftrightarrow g_{\alpha\beta}\overset{*}{x}{}^\alpha\overset{*}{x}{}^\beta < 0\,.$$

Jsou tedy funkce (5.5) definovány (se spojitými derivacemi prvého řádu) na množině $\mathscr{G} \times \mathscr{H}_1$, kde $\mathscr{H}_1 \subset R^4$ je množina bodů $[\overset{*}{x}{}^\alpha]$, pro něž platí

$$g_{\alpha\beta}\overset{*}{x}{}^\alpha\overset{*}{x}{}^\beta < 0\,.$$

---

[5]) Hodnoty funkcí Q^i se berou v těchže bodech jako v předchozím řádku.

Dále platí $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}_1$ a pro

$$[x^\alpha, \overset{*}{x}{}^\alpha] \in \mathscr{G} \times \mathscr{H}_1$$

jest

$$g_{\alpha\beta} P^\alpha \overset{*}{x}{}^\beta = \overset{*}{x}{}^0 \sum_{i=1}^{3} \overset{*}{x}{}^i Q^i - c^2 \left(\frac{1}{c^2} \overset{*}{x}{}^0 \sum_{i=1}^{3} \overset{*}{x}{}^i \, Q^i \right) = 0 \, .$$

Tím je lemma dokázáno.

Ukážeme, že toto (apriorní) *přiřazení Minkowského silového pole danému Newtonovu silovému poli je fyzikální v tom smyslu, že předpokládané pohybové rovnice* (5.4) *lze odvodit při tomto přiřazení ze základních pohybových rovnic* (3.7).

Mějme tedy ve smyslu lemmatu 2 dáno toto přiřazení. Nechť je funkcemi (5.2) resp. v našem časoprostorovém systému funkcemi (5.3) popsána světočára hmotné částice o klidové hmotě $\mu \neq 0$. Transformace parametru t v parametr τ je dána prostým zobrazením intervalu (t_1, t_2) na (τ_1, τ_2) (viz (1.14))

$$\tau(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)} \, \mathrm{d}t \, , \tag{5.6}$$

kde $t_0 \in (t_1, t_2)$ je libovolná pevná hodnota. Z rovnic (3.7) pro světočáru popsanou funkcemi (5.2) pak dostaneme

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\mathrm{d}x^K}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \right) = \dot{t} \, Q^K \left(\left(x^i(t), t, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) \right)$$

pro $K = 1, 2, 3$, neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m(t) \frac{\mathrm{d}x^K}{\mathrm{d}t} \right) \dot{t} = \dot{t} \, Q^K \, ,$$

což jsou rovnice (5.4).

Korespondencí (5.5) *je umožněn přechod z Newtonova do Minkowského modelu dynamiky hmotného bodu.* Poznamenejme ještě, že zde načrtnutý *Minkowského model je širší nežli Newtonův; nelze totiž každému Minkowského silovému poli přiřadit v každém systému časoprostorových souřadnic rozumně* (ve smyslu ekvivalence pohybových rovnic) *Newtonovo silové pole.*

Při naší korespondenci silových polí dává poslední z rovnic (3.12)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} (m(t)) = \frac{1}{c^2} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \, Q^i \right) \dot{t} \, ,$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[m(t) \, c^2 \right] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \, Q^i \, . \tag{5.7}$$

Výraz

$$E(t) = c^2\, m(t)$$

je energií uvažované hmotné částice a rovnice (5.7) vyjadřuje známou souvislost mezi energií a prací silového pole.

Uvažujme nyní vazbu

$$\omega(x, y, z, t) = 0 .$$

Nechť je tato vazba representována regulární nadplochou Ω v M_4 typu R. Předpokládejme dále, že platí

$$\Omega \subset \Gamma \times \mathscr{I} .$$

Světočára (5.2) resp. (5.3) je pak určena rovnicí (3.11), které použijeme ve tvaru (4.3). První tři z těchto rovnic můžeme po dosazení podle (5.5) psát ve tvaru

$$\text{(5.8)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m(t)\,\frac{\mathrm{d}x^K}{\mathrm{d}t}\right) = Q^K\left(x^i(t), t, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) + \lambda(t)\,\frac{\partial\omega}{\partial x^K} ,$$

kde

$$\text{(5.9)} \qquad \lambda(t) = \frac{1}{\dot{x}^0\omega}\left(\mu\hat{b} - \frac{P^\alpha\omega_\alpha}{\omega}\right),$$

přičemž

$$\omega = g^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta$$

a funkce na pravé straně v (5.9) jsou vzaty v bodech světočáry. V případě malých rychlostí, tj. je-li $m(t)$ prakticky konstantní funkce jsou rovnice (5.8) známými Lagrangeovými rovnicemi I. druhu. V tomto lze vidět fyzikální opodstatnění „základního principu“, který byl vysloven ve třetím odstavci.

Zbývající čtvrtou rovnici ve (4.3) lze napsat ve tvaru

$$\text{(5.10)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E(t)\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\, Q^i + \nu(t)\,\frac{\partial\omega}{\partial t} ,$$

kde

$$\nu(t) = -\frac{1}{c^2}\,\lambda(t) .$$

Uvažujme nyní tento speciální případ. Nechť funkce (5.1) a tedy i (5.5) jsou identicky rovny nule. Je-li vazba (2.3) v daném inerciálním systému skleronomní (tj. $\partial\omega/\partial t = 0$ např. v $\Gamma \times \mathscr{I}$), pak rovnice (5.8) jsou v uvedeném přiblížení rovnicemi geodetické křivky na (pohybující se) ploše v E_3^T příslušné vazbě (2.3). Rovnice (5.10) je pak vyjádřením zákona zachování energie. Je to vlastnost skleronomní vazby známá z klasické teorie.

Zcela analogicky by se daly odvodit z rovnic (4.7) rovnice, které pro malé rychlosti přejdou v klasické Lagrangeovy rovnice II. druhu.

6. PŘÍKLAD

Jako ilustraci uvedeme explicitní tvar některých odvozených vztahů a rovnic pro konkrétně zadanou vazbu a silové pole.

Nechť holonomní vazba je dána rovnicí

$$\omega(x^\alpha) \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2(x^0)^2 - R^2 = 0\,, \tag{6.1}$$

kde $R > 0$ je jistá konstanta. Tuto vazbu lze zřejmě representovat (pro $x^0 > 0$) regulární nadplochou Ω s parametrickým popisem

$$\begin{aligned} x^1 &= \eta^1\,, \\ x^2 &= \eta^2\,, \\ x^3 &= \eta^3\,, \\ x^0 &= \frac{1}{c}\sqrt{[(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 - R^2]} \equiv \frac{q}{c} \end{aligned}$$

pro

$$(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 > R^2\,,$$

kde jsme položili

$$q = \sqrt{[(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 - R^2]}\,.$$

Platí

$$\mathbf{A}\omega = 4[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2(x^0)^2] = 4[R^2 + \omega(x^\alpha)]\,.$$

Je tedy rovnicí (6.1) dána přípustná vazba. V bodech uvažované nadplochy dostáváme pro veličiny B^α_a, $\hat{g}_{ab}$ a $g = \det(\hat{g}_{ab})$ přímým výpočtem tyto hodnoty

$$B^\alpha_a = \begin{cases} \delta^\alpha_a & \text{pro} \quad \alpha > 0\,, \\ \dfrac{\eta^a}{cq} & \text{pro} \quad \alpha = 0\,, \end{cases}$$

$$\hat{g}_{ab} = \delta_{ab} - \frac{\eta_a \eta_b}{q^2}\,^{6)}\,,$$

$$g = -\frac{R^2}{q^2}\,.$$

Odtud vypočítáme

$$\hat{g}_{ab} = \delta^{ab} - \frac{\eta^a \eta^b}{R^2}$$

a pomocí formule (1.9a)

$$B^c_\beta = \begin{cases} \delta^c_\beta - \dfrac{\eta_\beta \eta^c}{R^2} & \text{pro} \quad \beta > 0\,, \\ \dfrac{cq}{R^2}\,\eta^c & \text{pro} \quad \beta = 0\,. \end{cases}$$

---

[6]) Zde i v dalším klademe pro snadnější zápis formulí $\eta_a = \eta^a$.

Pro složky konexe pak máme

$$\hat{\Gamma}^c_{ab} = \frac{1}{R^2 q^2} (q^2 \delta_{ab} \eta^c - \eta_a \eta_b \eta^c) .$$

Vztah (1.10) pro $\alpha = 1$ má tvar

$$0 = \frac{\delta^1_c}{R^2 q^2} (q^2 \delta_{ab} \eta^c - \eta_a \eta_b \eta^c) - \frac{\eta^1}{R} \hat{b}_{ab} ,$$

z čehož vypočítáme

$$\hat{b}_{ab} = \frac{1}{R q^2} (q^2 \delta_{ab} - \eta_a \eta_b) .$$

Posléze ze vztahů (1.4) a (1.6) dostáváme

$$N_a = N^a = - \frac{\eta^a}{R} , \quad N_0 = \frac{cq}{R} , \quad N^0 = - \frac{q}{cR} = - \frac{x^0}{R} .$$

Ježto nám jde pouze o lokální vlastnosti nadplochy, můžeme se v tomto příkladě omezit pouze na ty body nadplochy Ω, v nichž neplatí žádná ze tří rovnic

$$g_{\alpha\beta} B^\alpha_a B^\beta_a \equiv q^2 - (\eta^a)^2 = 0 .$$

Na této části nadplochy Ω pak bude náš parametrický systém „fyzikální" v tom smyslu, že žádný z tečných vektorů B^α_a $(a = 1, 2, 3)$ nebude isotropní.

Nyní už můžeme napsat rovnici (4.8) pro pohyb hmotné částice vázané uvažovanou vazbou bez působení sil

$$\frac{D}{d\tau} (\dot{\eta}^c) \equiv \ddot{\eta}^c + \frac{1}{R^2 q^2} (q^2 \delta_{ab} \dot{\eta}^a \dot{\eta}^b \eta^c - \eta_a \dot{\eta}^a \eta_b \dot{\eta}^b \eta^c) = 0 ,$$

t.j.

$$\ddot{\eta}^c = \frac{\eta^c}{R^2 q^2} \{ (\sum_{i=1}^{3} \eta^i \dot{\eta}^i)^2 - \sum_{i=1}^{3} q^2 (\dot{\eta}^i)^2 \} .$$

Předpokládejme nyní působení silového pole např. elektromagnetického vyšetřovaného v 3. odstavci a daného formulí

(3.16) $$P^\beta(x^\alpha, \overset{*}{x}{}^\alpha) \doteq e g^{\gamma\beta} F_{\gamma\delta}(x^\alpha) \overset{*}{x}{}^\delta .$$

Zřejmě lze předpokládat, že toto silové pole je definováno v okolí nadplochy Ω. Dále jest

$$\hat{P}^\beta(\eta^a, \overset{*}{\eta}{}^a) = e g^{\gamma\beta} \left[F_{\gamma b}(x^\alpha(\eta_a)) \overset{*}{\eta}_b + F_{\gamma 0}(x^\alpha(\eta^a)) \frac{\eta_b \overset{*}{\eta}{}^b}{cq} \right]$$

a pohybová rovnice (3.12) má tudíž tvar

$$\ddot{\eta}^c = \frac{\eta^c}{R^2 q^2} \{ (\dot{\eta}^a \eta_a)^2 - q^2 \delta_{ab} \eta^a \eta^b \} + \frac{e}{\mu} \Big\{ F_{db} \dot{\eta}^b \delta^{cd} + F_{d0} \frac{\dot{\eta}^a \eta_a}{cq} \delta^{cd} -$$
$$- F_{db} \frac{\dot{\eta}^b \eta^d \eta^c}{R^2} - F_{d0} \frac{\dot{\eta}^a \eta_a \eta^d \eta^c}{cq R^2} - F_{0b} \frac{q \dot{\eta}^b \eta^c}{cR^2} - F_{00} \frac{\dot{\eta}^a \eta_a \eta^c}{c^2 R^2} \Big\} .$$

Další úpravou, nebo přímo dosazením do rovnic (4.3), dostáváme rovnice, jež lze nazvat Lagrangeovými rovnicemi prvního druhu

$$\mu \ddot{x}^\alpha = e g^{\gamma\alpha} F_{\gamma\delta} \dot{x}^\delta - \frac{x^\alpha}{R}\left(\mu \hat{b} + \frac{e}{R} F_{\beta\delta}\, x^\beta \dot{x}^\delta\right),$$

kde

$$\hat{b} \equiv \hat{b}_{ab}\dot{\eta}^a \dot{\eta}^b = \frac{c^2(x^0)^2 \sum_{i=1}^{3} (\dot{x}^i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} x^i \dot{x}^i\right)^2}{Rc^2(x^0)^2}.$$

Zcela obdobně bychom dostali explicitní tvar Lagrangeových rovnic druhého druhu a Hamiltonových rovnic pro náš konkrétní příklad dosazením do vztahů (4.7) resp. (4.13a) a (4.13b).

Literatura

[1] *В. А. Фок:* Теория пространства времени и тяготения, Москва 1955.

[2] *F. Nožička:* Fundamentální principy mechaniky a jejich ekvivalence, Aplikace matematiky 4 (1959), 243—277.

[3] *J. L. Synge:* Relativity, The Special Theory, Amsterdam 1956.

Резюме

ГОЛОНОМНАЯ СВЯЗЬ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ МИНКОВСКОГО

ЮРАЙ ВИРСИК (Juraj Virsik)

При помощи методов тензорного исчисления изучается в статье движение частицы на многообразии, определенном уравнением $\omega(x, y, z, t) = 0$, представляющим голономную связь в пространстве-времени Минковского. Исследование движения нескольких частиц, подчиненных нескольким связям способом, который применяется в классической механике, наталкивается на затруднения при попытках ввести подходящую метрику в фазовое пространство. Поэтому рассматривается только случай одной частицы.

При выводе уравнений движения исходится из уравнений движения свободной частицы в специальной теории относительности

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\mu(\tau)\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right) = P^\alpha, \tag{*}$$

где функции $x^\alpha(\tau)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ определяют искомую мировую линию частицы,

τ обозначает ее собственное время, $\mu(\tau)$ ее собственную массу и P^α ($\alpha = 1, 2, 3, 0$) — вектор силы, действующей на частицу. Для частицы, подчиненной голономной связи, высказывается постулат, который можно сформулировать так же, как в классической механике: ,,Составляющая силы, перпендикулярная к многообразию, не принимает участия в движении, т.е. векторное уравнение (*) выполняется в случае голомной связи только в направлении, касательном к многообразию". (Перпендикулярность здесь понимается, конечно, в смысле индефинитной метрики Минковского.) Из математической формулировки высказанного принципа выводятся три группы дифференциальных уравнений, которые, с формальной точки зрения, подобны уравнениям Лагранжа первого и второго рода и уравнениям Гамильтона классической механики.

Особый интерес обращается на математически точное определение понятий голономная связь и силовое поле специальной теории относительности. Поэтому, прежде чем приступить к выводу уравнений движения, рассматриваются гиперповерхности в пространстве-времени Минковского и приводится стриктное абстрактное определение — a priori данного силового поля в механике Минковского. Таким способом определенное силовое поле обладает следующим свойством: ,,физическое" решение уравнения (*) существует тогда и только тогда, если μ постоянная; отсюда уже вытекает ,,перпендикулярность силы к мировой линии".

Так же доказывается ,,физическая" разрешимость выведенных уравненний движения, подчиненого связи. Насколько автору известно, приведенное абстрактное определение заключает все макроскопические силовые поля, рассматриваемые в специальной теории относительности.

Далее изучается отношение этого абстрактного определения к понятию ньютоновского силового поля в фиксированной системе Лоренца. Показывается, что полученные уравнения движения частицы, подчиненой связи, для малых скоростей переходят в уравнения движения классической механики. В конце приводится пример с вычислением для конкретной ситуации.

Все результаты имеют, конечно, чисто локальный характер.

Summary

HOLONOMIC CONSTRAINT AND EQUATIONS OF MOTION IN MINKOWSKIAN MECHANICS

JURAJ VIRSIK

In this paper the motion of a particle on a manifold given by the equation $\omega(x, y, z, t) = 0$ (representing a holonomic constraint in Minkowskian space-time) is studied with the help of the methods of tensor calculus. The study of the motion

of several particles under further constraints, similar to that used in classical mechanics, meets with difficulties when one tries to introduce metrics into the phase space. Therefore the case of only one particle is considered.

To derive the equations of motion, the starting point is the equation of motion of a free particle in the mechanics of the special theory of relativity

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\mu(\tau)\,\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right) = P^\alpha\,,$$

where the functions $x^\alpha(\tau)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ describe the world line of the particle to be determined, the parameter τ is its proper time, $\mu(\tau)$ its proper mass and P^α $(\alpha = 1, 2, 3, 0)$ are the components of the vector of force acting on the particle. A basic postulate concerning the constrained motion of a particle, formulated as in classical physics, is given: "The component of the force orthogonal to the manifold does not take part in the motion, i.e. the vector equation (*) holds, in the case of holonomic constraint, only in the direction tangential to the manifold. (Here orthogonality is understood of course in the sense of indefinite Minkowskian metrics). Three groups of differential equations are derived from the mathematical formulation of this principle. They are similar, from the formal point of view, to the Lagrange equations of the first and second order and the Hamiltonian equations of classical mechanics.

Mathematically precise definitions are attempted of the notions of holonomic constraint and field of force in the special theory of relativity. The derivation proper of the equations of motion is therefore preceded by parts dealing with hypersurfaces in Minkowskian space-time. A strict a priori abstract definition of a field of force in Minkowskian mechanics is given. It is shown that the thus defined field of force possesses the following property: A "physical" solution of the equation (*) exists if and only if μ is constant; this implies "the orthogonality of the force to the world line". The "physical" solvability of the derived differential equations of constrained motion is also demonstrated. To the author's knowledge, the given abstract definition includes all the macroscopic fields of force considered in the special theory of relativity.

Next the relation of this abstract definition to the notion of the Newtonian field of force in a fixed Lorenz system is discussed. It is shown that the thus obtained equations of motion of a particle under holonomic constraint in the case of small velocities approximate the equations of constrained motion of classical mechanics. An example with calculations of a definite problem is added.

All the results are of course of purely local character.

Adresa autora: Juraj Virsik, Kabinet matematiky SAV, Obrancov mieru 41, Bratislava.