

Aplikace matematiky

V. L. Katkov

Решение локальных задач метеорологии численными методами

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 3, 242–245

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102957>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

РЕШЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ МЕТЕОРОЛОГИИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

В. Л. КАТКОВ (V. L. KATKOV)

(к теме с)

Локальными задачами метеорологии мы будем называть задачи, связанные с описанием движений малого масштаба, возникающими, как правило, вследствие неоднородного нагревания земной поверхности. В работе описывается конечно-разностная схема решения этих задач, устойчивая при любом отношении шагов по времени к шагам по пространству. В качестве иллюстрации приводится численное решение задачи о свободной конвекции.

§ 1. Для описания интересующих нас движений служит следующая система уравнений [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x + wu_z &= (vu_z)_z + \kappa u_{xx} + lv - \beta g \int_z^\infty \Theta_x dz, \\ v_t + uv_x + wv_z &= (vv_z)_z + \kappa v_{xx} - lv, \\ \Theta_t + u\Theta_x + w\Theta_z &= (v\Theta_z)_z + \kappa\Theta_{xx} - \Gamma w, \\ q_t + uq_x + wq_z &= (vq_z)_z + \kappa q_{xx} - \alpha q, \\ u_x + w_z &= 0, \end{aligned}$$

где u, v, w — составляющие скорости по осям x, y, z (ось x выбрана по горизонтали, z — по вертикали), Θ — отклонение потенциальной температуры от своего стандартного распределения в покоящейся атмосфере, q — удельная влажность, остальные обозначения общепринятые.

Краевые условия для каждой задачи будут различными. Для свободной конвекции, например, они имеют вид: при $z = 0$ (поверхность земли) $u = v = w = 0$, $q = q_0(x)$, $\Theta = \Theta_0(x)$, а на остальных границах поставлены условия затухания решения.

Для решения системы (1.1) используется метод дробных шагов [2], [5].

Система (1.1) разбивается на две подсистемы, в каждой из которых содержатся производные только по одной пространственной переменной. Например, первое уравнение (1.1) расчленяется на два

$$(1.2) \quad \frac{1}{2}u_t + uu_x = \kappa u_{xx} + lv - \beta g \int_z^\infty \Theta_x dz, \quad \frac{1}{2}u_t + wu_z = (vu_z)_z.$$

Счет проводится последовательно: на первом полушаге по времени решается первая подсистема, на втором — вторая подсистема.

Вводится прямоугольная сетка, так что $t_j = j \Delta t$, $x_k = k \Delta x$, $z_n = n \Delta z$ и каждое уравнение аппроксимируется неявным конечноразностным уравнением. Первое уравнение (1.2), например, примет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{j+\frac{1}{2}} - u_k^j}{\Delta t} + u_k^j \left[(1 - \alpha_k) \frac{u_k^{j+\frac{1}{2}} - u_{k-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \alpha_k \frac{u_{k+1}^{j+\frac{1}{2}} - u_k^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right] = \\ = \kappa \frac{u_{k+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2u_k^{j+\frac{1}{2}} + u_{k-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + f_k^j, \end{aligned}$$

$\alpha_k = 0$, если $u_k^j \geq 0$ и $\alpha_k = 1$ в противном случае. После введения обозначений $\eta_k = u_k^j \Delta t / \Delta x$, $\sigma = \kappa \Delta t / \Delta x^2$ уравнение переписывается в виде

$$(1.3) \quad (\sigma - \alpha_k \eta_k) u_{k+1} - [2\sigma + 1 + (1 - 2\alpha_k) \eta_k] u_k + [\sigma + (1 - \alpha_k) \eta_k] u_{k-1} = -u_k^j - \Delta t f_k^j,$$

индекс $j + \frac{1}{2}$ в левой части опущен. Уравнения типа (1.3) выписываются на каждом полушаге и их счет (с учетом краевых условий) выполняется последовательными одномерными прогонками [3], [4].

Можно доказать, что построенная разностная схема аппроксимирует исходные уравнения с первым порядком точности. Докажем устойчивость счета на примере линеаризованной системы уравнений. С этой целью вычислим норму оператора шага уравнения (1.3). Пусть \mathbf{X}^j — вектор с компонентами $(u_1^j, u_2^j, \dots, u_N^j)$, тогда (1.3) можно записать в виде

$$A \mathbf{X}^{j+\frac{1}{2}} = -\mathbf{X}^j - \Delta t \mathbf{F}^j.$$

Здесь A — якобиева матрица

$$A = \begin{pmatrix} -a, & b, & 0, 0, \dots, 0, & 0 \\ c, & -a, & b, 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & c, & -a, b, \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, 0, \dots, c, & -a \end{pmatrix},$$

где $a = 2\sigma + 1 + (1 - 2\alpha)\eta$, $b = \sigma - \alpha\eta$, $c = \sigma + (1 - \alpha)\eta$; вследствие линейризации α и η от индекса k не зависят, а краевые условия включены в вектор F . Для минимального по модулю собственного числа матрицы A справедливо неравенство

$$(1.4) \quad |\lambda| \geq 1 + 2\sigma + |\eta| - 2\sqrt{\sigma(\sigma + |\eta|)} = 1 + (\sqrt{\sigma + |\eta|} - \sqrt{\sigma})^2.$$

Поскольку оператор шага есть A^{-1} , то норма этого оператора в силу (1.4) не превосходит 1. На следующем полушаге мы получим аналогичное неравенство для нормы оператора второго полушага. Так как норма оператора полного шага не превосходит произведения норм операторов отдельных дробных шагов, то эта норма меньше 1. Устойчивость тем самым доказана. Хотя это доказательство проведено только для линейризованной системы, практические расчеты показывают, что счет остается устойчивым и для нелинейных уравнений (1.1).

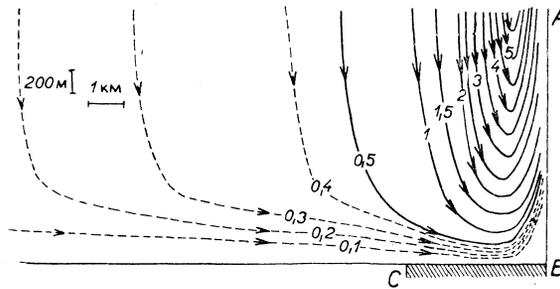


Рис. 1.

§ 2. По этой схеме были сосчитаны бриз, свободная конвекция, задача о трансформации воздушной массы и ряд других. В расчетах использовалась прямоугольная сетка с $\Delta x = 3$ км. Шаг по оси z был переменным от 25 м у поверхности земли до 100 м на высоте 2 км. Вычисления проводились с различными шагами по времени от 5 до 20 мин., при этом счет оставался устойчивым, а картина течения менялась незначительно.

Решение отыскивалось методом установления при $t \rightarrow \infty$. В качестве начального условия бралось нулевое решение. Картина течения устанавливалась примерно через 3 часа от начала процесса. Счет на машине Вычислительного центра СО АН СССР не превышал 30 мин. (для сетки, состоящей из 37×37 точек).

На рис. 1 приведены линии тока, цифрами отмечены значения функции тока в тысячах $m^2/сек$. Четко заметно формирование мощного восходящего потока над островом BC (в силу симметрии относительно плоскости AB изображена только половина течения). Рис. 2 дает представление о поле изотерм (цифры на

изотермах — значения температуры в градусах). Интересно отметить существование теплого ядра над островом. Наконец, на рис. 3 изображено поле влажности (в г/кг); заметна тенденция к переносу влаги вверх над островом. Этим объясняется, повидимому, известный из наблюдений факт формирования облаков над островами в море.

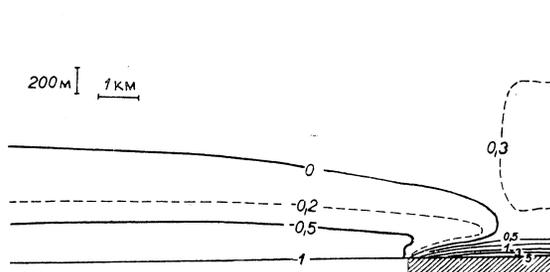


Рис. 2.

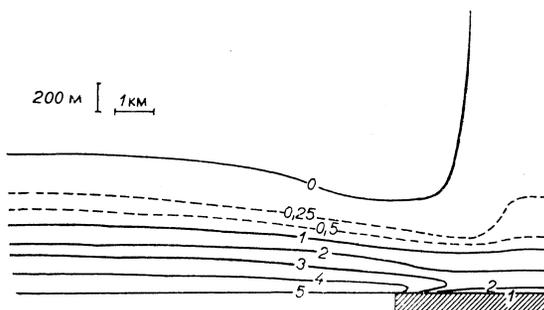


Рис. 3.

Литература

- [1] Гандин Л. С., Лайхтман Д. Л., Матвеев Л. Т., Юдин М. И.: Основы динамической метеорологии, Гидрометеиздат, Л., 1955.
- [2] Яненко Н. Н.: Об экономических неявных схемах (метод дробных шагов), ДАН СССР, \ 134, № 5, 1961.
- [3] Марчук Г. И.: Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, М., 1961.
- [4] Годунов С. К., Рябенкий В. С.: Введение в теорию разностных схем, Физматгиз, М., 1962.
- [5] Марчук Г. И.: Теоретическая модель прогноза погоды, ДАН СССР, 155, № 5, 1964.

В. Л. Катков, Вычислительный центр Сибирского отделения АН СССР, Новосибирск 72, СССР.