Vladimír Fiřt

Kmitání konstrukcí s pruty proměnného průřezu. I

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 1, 15–30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102931

KMITÁNÍ KONSTRUKCÍ S PRUTY PROMĚNNÉHO PRŮŘEZU. I

VLADIMÍR FIŘT

(Došlo dne 10. března 1964.)

V článku jsou nalezena přesná obecná řešení homogenní a nehomogenní diferenciální rovnice platné pro příčně kmitající pružný prut proměnného průřezu a je použito těchto řešení k vyšetření vlastního kmitání a vynuceného kmitání pružně uloženého nosníku od harmonického a náhlého příčného zatížení.

ÚVOD

V dynamice strojů a v dynamice stavebních konstrukcí jsou důkladně propracovány metody k vyšetřování vlastního a vynuceného kmitání různě uložených pružných prutů konstantního průřezu a soustav vytvořených z těchto prutů [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Jen v ojedinělých případech (např. pro výpočet vlastních kmitočtů krakorce nebo tyče proměnného průřezu s volnými konci) bylo nalezeno exaktní řešení pro zvláštní průběh tuhosti a hmoty po délce prutu [4]. V ostatních případech bylo použito jen přibližných metod [4], [6], [7], [8], [9], [10], [11].

V této práci a v její II. části,)[1] která bude uveřejněna v jednom z příštích čísel tohoto časopisu, je použito přesných řešení diferenciální rovnice s proměnnými koeficienty k vyšetřování vlastního a vynuceného kmitání složitějších konstrukcí, v nichž se pruty proměnného průřezu vyskytují. Tato řešení jsou nalezena převedením diferenciální rovnice 4. řádu s proměnnými koeficienty na rovnici s konstantními koeficienty.

Vhodnou volbou počátku os souřadných a konstant u funkcí, použitých k vyjádření průběhu momentu setrvačnosti po délce prutu, lze dosáhnout dokonalého vystižení značně obecných monotonních změn ohybových tuhostí prutů, které se u skutečných strojních a stavebních konstrukcí často vyskytují.

Uvažovaný průběh osové síly po délce prutu poměrně dobře vystihuje skutečné poměry u stran polygonů, kterými nahrazujeme mostní oblouky, jejichž výška vzrůstá od vrcholu k patkám [10], [11].

[1]) Výtah z obou částí práce byl autorem přednesen na Československé konferenci o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích (EQUADIFF) konané 5. 9.—11. 9. 1962 v Praze.

K vystižení obecného průběhu rozložení hmoty po délce prutu může být použito kromě uvedených funkcí v tomto článku také náhradní hmoty, o jejímž určení bude pojednáno v II. části této práce. V ní budou také odvozeny vztahy vhodné k vyšetřování vlastního a vynuceného kmitání složitějších konstrukcí.

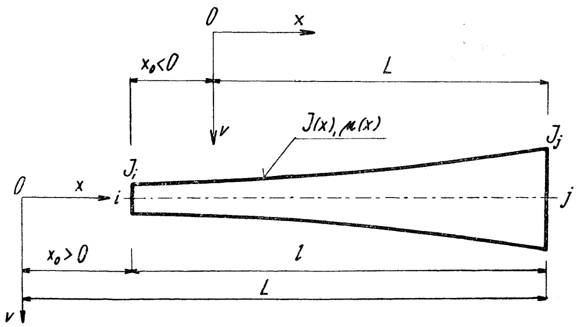
1. PŘÍČNÉ KMITÁNÍ OSOVĚ NEZATÍŽENÉHO PRUTU

V tomto odstavci uvažujeme harmonické příčné kmitání ustálené osově nezatíženého přímého prutu proměnného průřezu (obr. 1), pro který platí tato diferenciální rovnice

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\,\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right] - \mu(x)\,\omega^2\,v(x) = p(x)\,, \tag{1.1}$$

kde je:

$v(x)$ – amplituda výchylky,
$EJ(x)$ – ohybová tuhost prutu,
$\mu(x)$ – hmota na jednotku délky,
ω – kruhová frekvence,
$p(x)$ – amplituda harmonicky proměnného zatížení.



Obr. 1.

Homogenní rovnici odpovídající rovnici (1.1) pišme ve tvaru

$$J(x)\,v^{IV}(x) + 2J'(x)\,v'''(x) + J''(x)\,v''(x) - \frac{\mu(x)}{E}\,\omega^2\,v(x) = 0\,. \tag{1.2}$$

Vyjádřeme $J(x)$ a $\mu(x)$ funkcemi

$$J(x) = J_i\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^n, \quad \mu(x) = \mu_i\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{n-4}, \tag{1.3}$$

kde

$$a = \frac{1 - x_0/L\sqrt[n]{(J_j/J_i)}}{1 - x_0/L}\,, \quad b = \frac{\sqrt[n]{(J_j/J_i)} - 1}{1 - x_0/L}\,, \tag{1.4}$$

n je reálné číslo a J_i, J_j jsou momenty setrvačnosti krajních průřezů prutu, které jsou ve vzdálenostech x_0 a L od počátku O (obr. 1).[2])

Po dosazení (1.3) do (1.2) a po dělení výrazem $J_i(a + bx/L)^{n-4}$ dostáváme

$$\left(a + b\frac{x}{L}\right)^4 v^{\mathrm{IV}}(x) + 2n\frac{b}{L}\left(a + b\frac{x}{L}\right)^3 v'''(x) + \tag{1.5}$$

$$+ n(n-1)\frac{b^2}{L^2}\left(a + b\frac{x}{L}\right)^2 v''(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 v(x) = 0\,,$$

kde

$$\lambda = l\sqrt[4]{\left(\frac{\mu_i\omega^2}{EJ_i}\right)}\,, \tag{1.6}$$

l je délka prutu a μ_i je velikost hmoty $\mu(x)$ v krajním průřezu i.

Poznámka. Ve zvláštním případě, když $J(x) = a_1(x/L)^n$ a $\mu(x) = a_2(x/L)^{n-4}$, dostaneme místo (1.5) Eulerovu rovnici.

Substitucí

$$a + b\frac{x}{L} = e^z \tag{1.7}$$

převedeme rovnici (1.5) na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty obdobně jako rovnici Eulerova typu (viz [12], str. 259–261)

$$\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}z^4} + (2n-6)\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}z^3} + (n^2 - 7n + 11)\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} - (n^2 - 5n + 6)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} - \tag{1.8}$$

$$- \left(\frac{L}{b}\frac{\lambda}{l}\right)^4 v = 0\,.$$

Určíme nyní obecné řešení nehomogenní rovnice (1.1) za předpokladu, že $J(x)$ a $\mu(x)$ jsou dány výrazy (1.3) a že $p(x)$ se po délce prutu nemění ($p(x) = p_0$). V daném případě rovnice (1.1) po úpravě zní

$$\left(a + b\frac{x}{L}\right)^4 v^{\mathrm{IV}}(x) + 2n\frac{b}{L}\left(a + b\frac{x}{L}\right)^3 v'''(x) + n(n-1)\frac{b^2}{L^2}\left(a + b\frac{x}{L}\right)^2 v''(x) - \tag{1.9}$$

$$- \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 v(x) = \frac{p_0}{EJ_i}\left(a + b\frac{x}{L}\right)^{4-n}.$$

Uvažujeme-li jen jednoduché kořeny α_s, $s = 1, 2, 3, 4$, charakteristické rovnice pří-

[2]) Číslo n a poměr x_0/L zvolíme tak, aby výrazy (1.3) vyjadřovaly co nejlépe skutečnou změnu průřezu prutu.

slušné k (1.8) a předpokládáme-li, že číslo $4 - n$ není jejím kořenem, dostáváme obecný integrál rovnice (1.9) použitím substituce (1.7) ve tvaru

$$v(x) = \sum_{s=1}^{4} C_s \left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{\alpha_s} + \frac{p_0 L^4}{E J_i b^4}\,\frac{\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{4-n}}{2n^2 - 14n + 24 - \left(\frac{L}{b}\frac{\lambda}{l}\right)^4}, \tag{1.10}$$

kde C_s, $s = 1, 2, 3, 4$, jsou integrační konstanty.

V případě, že číslo $4 - n$ je jednoduchým nebo násobným kořenem charakteristické rovnice příslušné k (1.8) nebo v případě, že všechny kořeny α_s této rovnice nejsou jednoduché, určíme obecné řešení rovnice (1.9) způsobem uvedeným v [12] na str. 246–248 a na str. 259–262.

Za předpokladu, že $J(x)$ a $\mu(x)$ jsou vyjádřeny funkcemi

$$J(x) = J_i k_0 e^{\varrho(x/L)}, \quad \mu(x) = \mu_i k_0 e^{\varrho(x/L)}, \tag{1.11}$$

kde

$$k_0 = \left(\frac{J_i}{J_j}\right)^{(x_0/L)/(1-x_0/L)}, \quad \varrho = \frac{1}{1 - x_0/L} \ln \frac{J_j}{J_i}, \tag{1.12}$$

dostáváme po dosazení (1.11) do (1.2) a po malé úpravě rovnici s konstantními koeficienty

$$v^{\mathrm{IV}}(x) + 2r_0\, v'''(x) + r_0^2\, v''(x) - r_0^4 \bar{\lambda}^4\, v(x) = 0, \tag{1.13}$$

kde

$$r_0 = \frac{\varrho}{L}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{r_0} \sqrt[4]{\left(\frac{\mu_i \omega^2}{E J_i}\right)}. \tag{1.14}$$

Označíme-li ($r_0 \neq 0$)

$$\beta = \frac{\alpha}{r_0}, \tag{1.15}$$

dostáváme charakteristickou rovnici

$$\alpha^4 + 2r_0\alpha^3 + r_0^2\alpha^2 - r_0^4\bar{\lambda}^4 = 0 \tag{1.16}$$

ve tvaru

$$\beta^4 + 2\beta^3 + \beta^2 - \bar{\lambda}^4 = 0. \tag{1.17}$$

Kořeny β_s, $s = 1, 2, 3, 4$, rovnice (1.17) se dají vyjádřit explicitními funkcemi argumentu $\bar{\lambda}$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 + 4\bar{\lambda}^2)}], & \beta_2 &= -\tfrac{1}{2}[1 - \sqrt{(1 + 4\bar{\lambda}^2)}], \\ \beta_3 &= -\tfrac{1}{2}[1 + \sqrt{(1 - 4\bar{\lambda}^2)}], & \beta_4 &= -\tfrac{1}{2}[1 - \sqrt{(1 - 4\bar{\lambda}^2)}]. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Při $\bar{\lambda} \neq 0$ a $|\bar{\lambda}| < 0{,}5$ jsou všechny tyto kořeny jednoduché a reálné a obecný integrál rovnice (1.13) má vzhledem k (1.15) tvar

$$v(x) = \sum_{s=1}^{4} C_s e^{r_0 \beta_s x} . \tag{1.19}$$

Při $|\bar{\lambda}| > 0{,}5$ jsou podle (1.18) kořeny β_3 a β_4 čísly komplexně sdruženými a obecné řešení rovnice (1.13) je

$$v(x) = C_1 e^{r_0 \beta_1 x} + C_2 e^{r_0 \beta_2 x} + e^{-\frac{1}{2}x}[C_3 \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{(4\bar{\lambda}^2 - 1)}x + C_4 \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{(4\bar{\lambda}^2 - 1)}x] . \tag{1.20}$$

A konečně při $|\bar{\lambda}| = 0{,}5$ je $\beta_3 = \beta_4 = -\frac{1}{2}$ a obecný integrál rovnice (1.13) zní

$$v(x) = C_1 e^{r_0 \beta_1 x} + C_2 e^{r_0 \beta_2 x} + C_3 e^{-\frac{1}{2} r_0 x} + C_4 e^{-\frac{1}{2} r_0 x} , \tag{1.21}$$

kde $\beta_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})$.

Poznámka. Případ, kdy $\bar{\lambda} = 0$, může nastat jen u nehmotného prutu ($\mu(x) \equiv 0$), a proto zde není uvažován.

Jsou-li $J(x)$ a $\mu(x)$ dány výrazy (1.11) a $p(x) = p_0$, má rovnice (1.1) tvar

$$v^{\mathrm{IV}}(x) + 2r_0 v'''(x) + r_0^2 v''(x) - r_0^4 \bar{\lambda}^4 v(x) = \frac{p_0}{k_0 E J_i} e^{-r_0 x} . \tag{1.22}$$

Za předpokladu, že číslo $-r_0$ není kořenem charakteristické rovnice (1.16), vychází partikulární řešení V rovnice (1.22) v tomto jednoduchém tvaru

$$V = -\frac{p_0 e^{-r_0 x}}{k_0 E J_i r_0^4 \bar{\lambda}^4} . \tag{1.23}$$

Poznámka. Číslo $-r_0$ může být podle (1.15) kořenem rovnice (1.16) jen tehdy když $\beta_1 = \beta_2 = -1$, což odpovídá hodnotě $\bar{\lambda} = 0$, která se u hmotného prutu nevyskytuje.

Položíme-li ve výrazech (1.12) $J_i = J_j$, máme $k_0 = 1$, $\varrho = 0$ ($r_0 = 0$), $J(x) = J_i$, $\mu(x) = \mu_i$ a z (1.22) dostáváme diferenciální rovnici pro příčně kmitající přímý prut konstantní tuhosti s rovnoměrně rozloženou hmotou

$$v^{\mathrm{IV}}(x) - \frac{\mu_i \omega^2}{E J_i} v(x) = \frac{p_0}{E J_i} . \tag{1.24}$$

A rovněž položíme-li ve výrazech (1.4) $J_i = J_j$, máme $a = 1$, $b = 0$, $J(x) = J_i$, $\mu(x) = \mu_i$ a rovnice (1.9) získává tvar (1.24). Je tedy rovnice (1.24) zvláštním případem rovnic (1.9) a (1.22).

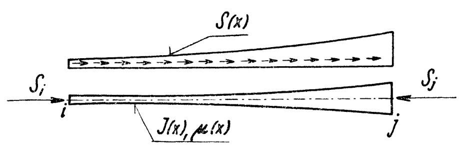
2. PŘÍČNÉ KMITÁNÍ OSOVĚ ZATÍŽENÉHO PRUTU

Diferenciální rovnice pro příčné harmonické kmitání osově zatíženého prutu proměnného průřezu má tvar (obr. 2)

$$(2.1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left[E\,J(x)\,\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right] + \frac{d}{dx}\left[S(x)\,\frac{dv(x)}{dx}\right] - \mu(x)\,\omega^2\,v(x) = p(x)\,,$$

kde $S(x)$ je statická osová síla, která je kladná, je-li tlakem a je záporná, je-li tahem. Při $p(x) \equiv 0$ dostáváme homogenní diferenciální rovnici s proměnnými koeficienty

$$(2.2)\qquad J(x)\,v^{IV}(x) + 2J'(x)\,v'''(x) + \left[J''(x) + \frac{S(x)}{E}\right]v''(x) + \frac{S'(x)}{E}\,v'(x) - \frac{\mu(x)\,\omega^2}{E}\,v(x) = 0\,.$$



Obr. 2.

Mění-li se $J(x)$ a $\mu(x)$ podle (1.3) a osová síla $S(x)$ podle zákona

$$(2.3)\qquad S(x) = S_i\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{n-2},$$

kde S_i je velikost osové síly v průřezu i, získává rovnice (2.2) tvar

$$(2.4)\qquad \left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^4 v^{IV}(x) + 2n\,\frac{b}{L}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^3 v'''(x) + \left[n(n-1)\,\frac{b^2}{L^2} + \frac{S_i}{EJ_i}\right]\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^2 v''(x) + \frac{S_i b}{EJ_i L}\,(n-2)\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)v'(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 v(x) = 0\,,$$

kde parametr λ je dán výrazem (1.6).

Použitím substituce (1.7) převedeme rovnici (2.4) na diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$(2.5)\qquad \frac{d^4v}{dz^4} + (2n-6)\,\frac{d^3v}{dz^3} + \left(n^2 - 7n + 11 + \frac{S_iL^2}{EJ_ib^2}\right)\frac{d^2v}{dz^2} - \left[n^2 - 5n + 6 - (n-3)\,\frac{S_iL^2}{EJ_ib^2}\right]\frac{dv}{dz} - \left(\frac{L\lambda}{bl}\right)^4 v = 0\,.$$

Vztahu (2.5) přísluší charakteristická rovnice

$$(2.6)\qquad \alpha^4 + (2n - 6)\,\alpha^3 + \left(n^2 - 7n + 11 + \frac{S_i L^2}{EJ_i b^2}\right)\alpha^2 - \\ - \left[n^2 - 5n + 6 - (n-3)\frac{S_i L^2}{EJ_i b^2}\right]\alpha - \left(\frac{L\lambda}{bl}\right)^4 = 0\,,$$

jejíž kořeny α_s, $s = 1, 2, 3, 4$, závisí na třech bezrozměrných parametrech

$$n\,,\quad \frac{S_i L^2}{EJ_i b^2}\,,\quad \frac{L\lambda}{bl}\,.$$

Za předpokladu, že $J(x)$, $\mu(x)$ a $S(x)$ jsou dány výrazy (1.3) a (2.3) a $p(x) = p_0$ a za předpokladu, že číslo $4 - n$ není kořenem charakteristické rovnice (2.6), dostáváme použitím vztahu (1.7) partikulární integrál V nehomogenní rovnice (2.1) ve tvaru

$$(2.7)\qquad V = \frac{p_0 L^4}{EJ_i b^2}\,\frac{\left(a + b\dfrac{x}{L}\right)^{4-n}}{2n^2 - 14n + 24 + (4-n)\dfrac{S_i L^2}{EJ_i b^2} - \left(\dfrac{L\lambda}{bl}\right)^4}\,.$$

A obecný integrál rovnice (2.1) při jednoduchých kořenech α_s, $s = 1, 2, 3, 4$, rovnice (2.6) zní

$$(2.8)\qquad v(x) = \sum_{s=1}^{4} C_s\left(a + b\frac{x}{L}\right)^{\alpha_s} + V\,.$$

Obdobně lze určit obecná řešení rovnic (2.1) a (2.2) v případě, že veličiny $J(x)$ a $\mu(x)$ jsou vyjádřeny funkcemi (1.11) a osová síla $S(x)$ je dána výrazem

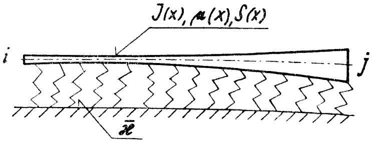
$$(2.9)\qquad S(x) = S_i k_0 e^{\varrho(x/L)}\,.$$

3. PŘÍČNÉ KMITÁNÍ PRUTU NA PRUŽNÉM PODKLADĚ

V tomto odstavci si všimneme osově zatíženého prutu proměnného průřezu, který kmitá na pružném podkladě (obr. 3). Pro harmonické kmitání ustálené takového prutu platí diferenciální rovnice

$$(3.1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left[E\,J(x)\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right] + \frac{d}{dx}\left[S(x)\frac{dv(x)}{dx}\right] - \\ - \left[\mu(x)\,\omega^2 - \bar{\kappa}\right] v(x) = p(x)\,,$$

kde $\bar{\kappa}$ je charakteristika pružného podkladu (síla na jednotku délky při $v = 1$).



Obr. 3.

Předpokládejme, že moment setrvačnosti $J(x)$ je vyjádřen funkcí (1.3) a osová síla $S(x)$ funkcí (2.3). Položíme-li

$$\mu(x) - \frac{\bar{\kappa}}{\omega^2} = c\,\mu_i\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{n-4}, \tag{3.2}$$

kde

$$c = 1 - \frac{\bar{\kappa}}{\mu_i\omega^2}, \tag{3.3}$$

dostáváme z (3.1) rovnici (2.4), v níž parametr λ je dán výrazem

$$\lambda = l\,\sqrt[4]{\left(\frac{c\mu_i\omega^2}{EJ_i}\right)}, \tag{3.4}$$

popřípadě s ohledem na (3.3) tímto výrazem

$$\lambda = l\,\sqrt[4]{\left(\frac{\mu_i\omega^2}{EJ_i} - \frac{\bar{\kappa}}{EJ_i}\right)}. \tag{3.5}$$

Po dosazení (3.3) do (3.2) vychází

$$\mu(x) = \frac{\bar{\kappa}}{\omega^2} + \mu_i\left(1 - \frac{\bar{\kappa}}{\mu_i\omega^2}\right)\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{n-4}. \tag{3.6}$$

Mění-li se tedy hmota podle (3.6) a veličiny $J(x)$, $S(x)$ podle (1.3) a (2.3) a je-li $p(x) = p_0$, můžeme použít pro vynucené harmonické kmitání prutu uloženého na pružném podkladě výsledků z odst. 2, kde pro výpočet hodnoty λ užijeme výrazu (3.5).

Ve zvláštním případě, když $n = 4$ a $S_i = 0$, z (1.3), (2.3) a (3.6) dostáváme

$$J(x) = J_i\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^4, \quad S(x) \equiv 0\,, \quad \mu(x) = \mu_i \tag{3.7}$$

a rovnice (3.1) při $p(x) = p_0$ zní

$$\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^4 v^{\mathrm{IV}}(x) + 8\,\frac{b}{L}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^3 v'''(x) + 12\,\frac{b^2}{L^2}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^2 v''(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 v(x) = p_0\,. \tag{3.8}$$

V tomto zvláštním případě jakož i v případě, když $S_i \neq 0$, lze vyšetřovat kromě vynuceného harmonického kmitání s danou kruhovou frekvencí ω také vlastní kmitání ($p_0 = 0$) prutu na pružném podkladě, protože hmota $\mu(x) = \mu_i$ není vyjádřena v závislosti na hledaných vlastních kruhových frekvencích $\omega_{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Při $a = 1$, $b = 0$ je podle (3.7) $J(x) = J_i$ a z (3.8) dostáváme rovnici

$$v^{\mathrm{IV}}(x) - \left(\frac{\mu_i \omega^2}{EJ_i} - \frac{\bar{\kappa}}{EJ_i}\right) v(x) = p_0 , \tag{3.9}$$

která platí pro osově nezatížený prizmatický prut kmitající na pružném podkladě.

Jsou-li veličiny $J(x)$, $S(x)$ vyjádřeny funkcemi (1.11) a (2.9) a

(3.10)[3]
$$\mu(x) - \frac{\bar{\kappa}}{\omega^2} = d\mu_i e^{\varrho(x/L)} ,$$

kde

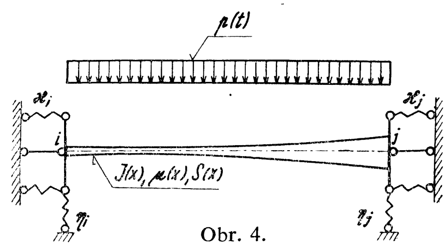
$$d = \left(1 - \frac{\bar{\kappa}}{\mu_i \omega^2}\right) e^{-\varrho(x_0/L)} , \tag{3.11}$$

určíme rovněž snadno obecné řešení rovnice (3.1), neboť v takovém případě jsou všechny její koeficienty konstantami.

4. PŘÍKLAD I

V tomto odstavci vyšetřujeme ustálené vynucené harmonické kmitání osově zatíženého nosníku proměnného průřezu, který je na obou koncích pružně vetknut a pružně podepřen (obr. 4). Uvažujeme změnu $J(x)$, $\mu(x)$ a $S(x)$ po délce prutu podle (1.3) a (2.3) a příčné rovnoměrné dynamické zatížení $p(t)$ měnící se v čase t podle zákona

$$p(t) = p_0 \sin \omega t . \tag{4.1}$$



Obr. 4.

Pro amplitudy koncových momentů $M(x_0)$, $M(L)$ a koncových posouvajících sil $T(x_0)$, $T(L)$ máme tyto výrazy

$$\begin{aligned} M(x_0) &= - EJ_i\, v''(x_0) , \quad M(L) = - EJ_j\, v''(L) , \\ T(x_0) &= - \left[(E\, J(x)\, v''(x))' + S(x)\, v'(x)\right]_{x=x_0} = \\ &= - \left[E\, J(x_0)\, v'''(x_0) + E\, J'(x_0)\, v''(x_0) + S(x_0)\, v'(x_0)\right] , \\ T(L) &= - \left[E\, J(L)\, v'''(L) + E\, J'(L)\, v''(L) + S(L)\, v'(L)\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

a také platí, že

$$\begin{aligned} M(x_0) &= - \kappa_i\, v'(x_0) , \quad M(L) = \kappa_j\, v'(L) , \\ T(x_0) &= \eta_i\, v(x_0) , \quad T(L) = - \eta_j\, v(L) , \end{aligned} \tag{4.3}$$

[3]) Na možnost použití závislostí (3.2) a (3.10) poukázal recensent tohoto článku inž. I. HLAVÁČEK, C. Sc.

kde κ_i, κ_j jsou koeficienty pružného vetknutí a η_i, η_j jsou koeficienty pružných podpor.

Z výrazů (1.3), (1.4) a (2.3) vychází

$$(4.4) \qquad J(x_0) = J_i\,, \qquad J'(x_0) = J_i n \frac{b}{L}\,, \quad J(L) \approx J_j = J_i(a+b)^n\,,$$

$$J'(L) = J_j \frac{nb}{L(a+b)}\,, \quad S(x_0) = S_i\,, \qquad S(L) \approx S_j = S_i(a+b)^{n-2}\,,$$

neboť

$$a + b\frac{x_0}{L} = 1\,.$$

Označíme-li

$$(4.5) \qquad K_i = \frac{\kappa_i L}{EJ_i}\,, \quad K_j = \frac{\kappa_j L}{EJ_j}\,, \quad H_i = \frac{\eta_i L^3}{EJ_i}\,, \quad H_j = \frac{\eta_j L^3}{EJ_j}\,,$$

dostáváme porovnáním (4.2) a (4.3) s přihlédnutím k (4.4) tyto okrajové podmínky

$$(4.6) \qquad Lv''(x_0) - K_i v'(x_0) = 0\,, \quad Lv''(L) + K_j v'(L) = 0\,,$$

$$L^2 v'''(x_0) + nbL\, v''(x_0) + \frac{S_i L^2}{EJ_i} v'(x_0) + \frac{H_i}{L} v(x_0) = 0\,,$$

$$L^2 v'''(L) + \frac{nb}{a+b} L v''(L) + \frac{S_j L^2}{EJ_j} v'(L) - \frac{H_j}{L} v(L) = 0\,.$$

Derivováním funkce $v(x)$ dané výrazem (2.8) a dosazením jejích hodnot a hodnot jejích prvních tří derivací v bodech $x = x_0$ a $x = L$ do (4.6) dostáváme systém čtyř algebraických rovnic lineárních vzhledem k C_s, $s = 1, 2, 3, 4$,

$$(4.7) \qquad \sum_{s=1}^{4} a_{sr} C_s = b_r\,, \quad r = 1, 2, 3, 4\,,$$

kde

$$(4.8) \qquad a_{s1} = \alpha_s[(\alpha_s - 1)\,b - K_i]\,,$$

$$a_{s2} = \alpha_s(a+b)^{\alpha_s - 1}\left[\frac{(\alpha_s - 1)\,b}{a+b} + K_j\right],$$

$$a_{s3} = b\,\alpha_s(\alpha_s - 1)(\alpha_s - 2 + n) + \frac{S_i L^2}{EJ_i}\frac{\alpha_s}{b} + \frac{H_i}{b^2}\,,$$

$$a_{s4} = b\,\alpha_s(\alpha_s - 1)(\alpha_s - 2 + n)(a+b)^{\alpha_s - 3} + \frac{S_j L^2}{EJ_j}\frac{\alpha_s}{b}(a+b)^{\alpha_s - 1} -$$

$$- \frac{H_j}{b^2}(a+b)^{\alpha_s}$$

a

$$(4.9)\qquad b_1 = -\frac{p_0L^3}{EJ_i}\frac{4-n}{Ab^3}\left(3-n-\frac{K_i}{b}\right),$$

$$b_2 = -\frac{p_0L^3}{EJ_i}\frac{4-n}{Ab^3}(a+b)^{2-n}\left(3-n+K_j\frac{a+b}{b}\right),$$

$$b_3 = -\frac{p_0L^3}{EJ_i}\frac{1}{Ab^3}\left[2(4-n)(3-n)+(4-n)\frac{S_iL^2}{EJ_ib^2}+\frac{H_i}{b^3}\right],$$

$$b_4 = -\frac{p_0L^3}{EJ_i}\frac{1}{Ab^3}\left[2(4-n)(3-n)(a+b)^{1-n}+\right.$$

$$\left.+(4-n)\frac{S_jL^2}{EJ_j}\frac{(a+b)^{3-n}}{b^2}-\frac{H_j}{b^3}(a+b)^{4-n}\right],$$

kde

$$(4.10)\qquad A = 2n^2 - 14n + 24 + (4-n)\frac{S_iL^2}{EJ_ib^2} - \left(\frac{L\lambda}{bl}\right)^4.$$

Řešením systému rovnic (4.7) určíme neznámé integrační konstanty C_s, $s = 1, 2, 3, 4$, a jejich dosazením do (2.8) dostaneme rovnici pro amplitudu průhybu vyšetřovaného nosníku od zatížení (4.1).

Systém rovnic (4.7) může obsahovat jak jednoduché reálné kořeny tak i jednoduché komplexní kořeny α_s rovnice (2.6). Jsou-li některé kořeny α_s komplexní, je nutno provést úpravy v koeficientech a_{sr}.

5. PŘÍKLAD II

V tomto odstavci použijeme metody rozkladu podle vlastních funkcí k vyšetřování vynuceného kmitání nosníku na obr. 4 od periodického nebo libovolného neperiodického příčného zatížení $p(x, t)$ a blíže si všimneme účinku náhlého zatížení. Nejdříve však uvedeme několik poznámek k určení vlastních funkcí, které při výpočtu užijeme.

Položíme-li $p_0 = 0$, je podle (4.9) $b_r = 0$, $r = 1, 2, 3, 4$, a z (4.7) dostáváme systém čtyř homogenních rovnic. Z podmínky, že determinant tohoto systému je roven nule, určíme vlastní kruhové frekvence $\omega_{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, a jim odpovídající poměry integračních konstant

$$(5.1)\qquad C_{1(k)}^{(q)} : C_{2(k)}^{(q)} : C_{3(k)}^{(q)} : C_{4(k)}^{(q)},$$

kde $q = 1, 2, \ldots, h(k)$, přičemž $h(k)$ je násobnost vlastního čísla $\omega_{(k)}$.

Případ těch hodnot ω^*, pro něž existují vícenásobné kořeny charakteristické rovnice (2.6), je nutno vyšetřovat zvlášť, neboť rovnice (4.7) platí za předpokladu jednoduchých kořenů rovnice (2.6).

Dále uvažujeme pouze případ, že $h(k) = 1$ pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots$, a že zmíněné hodnoty ω^* nejsou vlastními čísly problému.

Dosadíme-li (5.1) do (2.8) a za hodnoty α_s kořeny charakteristické rovnice (2.6) $\alpha_{s(k)}$, které příslušejí $\omega_{(k)}$, dostáváme po vynechání indexu $q = 1$ vlastní funkce $v_{(k)}(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ve tvaru

$$v_{(k)}(x) = \sum_{s=1}^{4} C_{s(k)} \left(a + b \frac{x}{L} \right)^{\alpha_{s(k)}}, \tag{5.2}$$

neboť při $p_0 = 0$ je podle (2.7) také $V = 0$.

Abychom mohli metody rozkladu podle ortogonálních funkcí (5.2) použít pro libovolné n, je nutno rozložit do řady nikoliv zatížení $p(x, t)$, ale ekvivalentní zatížení $\bar{p}(x, t)$ dané výrazem

$$\bar{p}(x, t) = \left(a + b \frac{x}{L} \right)^{4-n} p(x, t). \tag{5.3}$$

Poznámka. Při použití výrazů (1.17) je $\bar{p}(x, t) = \exp(-r_0 x)\, p(x, t)$.

Tedy

$$\bar{p}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}_k(t)\, v_{(k)}(x), \tag{5.4}$$

kde

$$\bar{p}_k(t) = \frac{\int_{x_0}^{L} \bar{p}(x, t)\, v_{(k)}(x)\, \mathrm{d}x}{\int_{x_0}^{L} v_{(k)}^2(x)\, \mathrm{d}x}. \tag{5.5}$$

Vyjádříme-li rovněž hledaný průhyb $v(x, t)$ řadou

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, v_{(k)}(x), \tag{5.6}$$

dostáváme po dosazení (5.4) a (5.6) do pohybové rovnice

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E\, J(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[S(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] + \mu(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t)$$

a použitím výrazů (1.3), (1.6) a (2.3) a výrazu pro $v_{(k)}^{\mathrm{IV}}(x)$ vyplývajícího z (2.4) tento vztah

$$\mu_i \sum_{k=1}^{\infty} [\ddot{T}_k(t) + \omega_{(k)}^2\, T_k(t)]\, v_{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{p}_k(t)\, v_{(k)}(x). \tag{5.7}$$

Porovnáním členů při stejném k u vztahu (5.7) dostáváme pro funkci $T_k(t)$ rovnici

$$\ddot{T}_k(t) + \omega_{(k)}^2\, T_k(t) = \frac{\bar{p}_k(t)}{\mu_i}. \tag{5.8}$$

Ve zvláštním případě, když zatížení $p(x, t)$ je rovnoměrné a náhlé $p(x, t) = p\,H(t - t_0)$, kde H je Heavisideova funkce, z (5.5) vychází

$$\bar{p}_k(t) = p\,\frac{I_{1(k)}}{I_{0(k)}}\,, \tag{5.9}$$

kde $(a + bx_0/L = 1)$

$$I_{0(k)} = \frac{b}{L}\int_{x_0}^{L} v_{(k)}^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b}{L}\int_{x_0}^{L}\left[C_{1(k)}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{\alpha_{1(k)}} + \right. \tag{5.10}$$

$$\left. + C_{2(k)}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{\alpha_{2(k)}} + C_{3(k)}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{\alpha_{3(k)}} + C_{3(k)}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{\alpha_{4(k)}}\right]^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{C_{1(k)}^2}{2\alpha_{1(k)} + 1}\left[(a + b)^{2\alpha_{1(k)}+1} - 1\right] + \frac{C_{2(k)}^2}{2\alpha_{2(k)} + 1}\left[(a + b)^{2\alpha_{2(k)}+1} - 1\right] +$$

$$+ \frac{C_{3(k)}^2}{2\alpha_{3(k)} + 1}\left[(a + b)^{2\alpha_{3(k)}+1} - 1\right] + \frac{C_{4(k)}^2}{2\alpha_{4(k)} + 1}\left[(a + b)^{2\alpha_{4(k)}+1} - 1\right] +$$

$$+ \frac{2C_{1(k)}C_{2(k)}}{\alpha_{1(k)} + \alpha_{2(k)} + 1}\left[(a + b)^{\alpha_{1(k)}+\alpha_{2(k)}+1} - 1\right] +$$

$$+ \frac{2C_{1(k)}C_{3(k)}}{\alpha_{1(k)} + \alpha_{3(k)} + 1}\left[(a + b)^{\alpha_{1(k)}+\alpha_{3(k)}+1} - 1\right] +$$

$$+ \frac{2C_{1(k)}C_{4(k)}}{\alpha_{1(k)} + \alpha_{4(k)} + 1}\left[(a + b)^{\alpha_{1(k)}+\alpha_{4(k)}+1} - 1\right] +$$

$$+ \frac{2C_{2(k)}C_{3(k)}}{\alpha_{2(k)} + \alpha_{3(k)} + 1}\left[(a + b)^{\alpha_{2(k)}+\alpha_{3(k)}+1} - 1\right] +$$

$$+ \frac{2C_{2(k)}C_{4(k)}}{\alpha_{2(k)} + \alpha_{4(k)} + 1}\left[(a + b)^{\alpha_{2(k)}+\alpha_{4(k)}+1} - 1\right] +$$

$$+ \frac{2C_{3(k)}C_{4(k)}}{\alpha_{3(k)} + \alpha_{4(k)} + 1}\left[(a + b)^{\alpha_{3(k)}+\alpha_{4(k)}+1} - 1\right]$$

a

$$I_{1(k)} = \frac{b}{L}\int_{x_0}^{L}\left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{4-n} v_{(k)}(x)\,\mathrm{d}x = \tag{5.11}$$

$$= \sum_{s=1}^{4}\frac{C_{s(k)}}{\alpha_{s(k)} + 5 - n}\left[(a + b)^{\alpha_{s(k)}+5-n} - 1\right].$$

Dosazením (5.9) do rovnice (5.8) a její integrací dostáváme

$$T_k(t) = A_0 \sin\omega_{(k)}t + B_0 \cos\omega_{(k)}t + \frac{p}{\mu_i\omega_{(k)}^2}\,\frac{I_{1(k)}}{I_{0(k)}}\,, \tag{5.12}$$

kde A_0 a B_0 jsou integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek pohybu nosníku. Máme-li např. v čase $t_0 = 0$ počáteční podmínky

$$v(x, t_0) = 0\,, \quad \dot{v}(x, t_0) = 0\,, \tag{5.13}$$

je podle (5.6) také $T_k(t_0) = 0$, $\dot{T}_k(t_0) = 0$ a z (5.12) vychází

$$A_0 = 0\,, \quad B_0 = -\frac{p}{\mu_i \omega_{(k)}^2} \frac{I_{1(k)}}{I_{0(k)}}\,. \tag{5.14}$$

Dosadíme-li (5.12) do (5.6) a přihlédneme-li k (5.2) a (5.14), dostáváme pro průhyb $v(x, t)$ tento výraz[4])

$$v(x, t) = \frac{p}{\mu_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{1(k)}}{I_{0(k)}} \frac{(1 - \cos \omega_{(k)} t)}{\omega_{(k)}^2} \sum_{s=1}^{4} C_{s(k)} \left(a + b\,\frac{x}{L}\right)^{\alpha_{s(k)}}. \tag{5.15}$$

Literatura

[1] *Kožešník J.*: Dynamika strojů. SNTL, Praha 1958.

[2] *Koloušek V.*: Dynamika stavebních konstrukcí II. SNTL, Praha 1956.

[3] *Nowacki W.*: Dynamika budowli. ARKADY, Warszawa 1961.

[4] *Timoshenko S.*: Vibration Problems in Engineering. D. Van Nostrand Company Inc., New York 1955.

[5] *Чудновский В. Г.*: Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Изд. АН УССР, Киев 1952.

[6] *Смирнов А. Ф.*: Устойчивость и колебания сооружений. Трансжелдориздат, Москва 1958.

[7] *Koloušek V.*: Dynamics of Continuous Structures with Repeated Elements. Sixth Congress of the IABSE, Final Report, Stockholm 1960.

[8] *Koloušek V.*: Recherche dynamique des systèmes constitués par des barres non prismatiques. Rapports du Colloque I, Mesure et interprétation des éffets dynamiques et vibrations des constructions. RILEM, Budapest 1963.

[9] *Krynicky E.*, *Mazurkiewicz Z.*: Free Vibration of a Simply Supported Bar With Linearly Variable Height of Cross Section. Journal of Aplied Mechanics, Semptember 1962.

[10] *Fiřt V.*: Vyšetřování vlastního kmitání obloukových mostů na samočinných počítačích. Sborník z konference „Súčasné problémy železobetonových a predpätých mostóv“ konané 1.—5. října 1962 ve Smolenicích, V SAV, Bratislava 1965.

[11] *Fiřt V.*: Stabilité et vibration propre des ponts et charpentes. Memoires 23, AIPC, Curich 1963.

[12] *Stěpanov V. V.*: Kurs diferenciálních rovnic (překlad z ruštiny). Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952.

[13] *Sobotka Z.*, *Fiřt V.*: Účinky náhlého zatížení nosníků a desek při plastických přetvořeních, referát přednesený na konferenci „Dynamika strojů“ konané 29. 10. až 31. 10. 1963 v Liblicích, Strojnícky časopis, V SAV, 1965.

---

[4]) Účinek náhlého příčného zatížení na osově zatížený nosník konstantního průřezu, který je na obou koncích kloubově uložen, je vyšetřován i s uvažováním plastických deformací materiálu v práci [13].

Резюме

КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ СО СТЕРЖНЯМИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ. I

ВЛАДИМИР ФИРСТ (Vladimír Fiřt)

Дифференциальные уравнения 4-ого порядка с переменными коэффициентами (1.1), (2.1) и (3.1), которые выражают установившиеся гармонические поперечные колебания не нагруженного вдоль оси стержня (рис. 1), нагруженного вдоль оси стержня (рис. 2) и стержня, уложенного на упругом основании (рис. 3), сведены посредством выражений (1.3), (1.11), (2.3), (2.9), (3.2) и (3.10) к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, общее решение которых можно непосредственно установить (отделы 1, 2, 3). Выбрав подходящим образом начало координатных осей и постоянные, содержащиеся в выражениях (1.4) и (1.12), можем выразить значительно общие монотонные изменения сечений стержней, которые у настоящих конструкций машин и построек часто встречаются.

Действие гармонической нагрузки (4.1) на загруженную вдоль оси балку переменного сечения, которая с обоих концов упруго залщемлена и упруго оперта (рис. 4), исследуется посредством общего интеграла (2.8) уравнения (2.1), имеющего место при условии, что момент инерции, масса и осевая сила представлены функциями (1.3) и (2.3) (отд. 4).

Вынужденные колебания той же балки, вызванные произвольной динамической поперечной нагрузкой, исследуются в отд. 5 методом разложения по собственным функциям (5.2). Вместо нагрузки $p(x, t)$ следует разложить в ряд (5.4) эквивалентную нагрузку $\bar{p}(x, t)$, данную выражением (5.3). В случае внезапной равномерной нагрузки p имеет уравнение прогиба вид (5.15).

Во второй части работы, которая будет опубликована в одном из следующих номеров этого журнала, рассматривается общее распределение массы вдоль стержня, и выводятся уравнения, удобные для исследования собственных и вынужденных колебаний более сложных конструкций, содержащих стержни переменного сечения.

Summary

VIBRATION OF STRUCTURES WITH BEAMS OF VARIABLE CROSS SECTION. I

Vladimír Fiřt

The fourth-order equations (1.1), (2.1), (3.1) with variable coefficients, describing the stable harmonic transverse oscillations of, respectively, an axially un-loaded beam (fig. 1), an axially loaded beam (fig. 2), and a beam elastically supported (fig. 3), are transformed via formulas (1.3), (1.11), (2.3), (2.9), (3.2), (3.10) into equations with constant coefficients; the solutions of the latter may be obtained in a straightforward manner (cf. sections 1, 2, 3). By a suitable choice of origin of coordinates and of constants in (1.4) and (1.12) it is possible to treat rather general monotone variations in beam cross section, which often occur in practical beam structures.

The effect of the harmonic load (4.1) on the axially loaded beam of variable cross-section, elastically constrained at both ends, and elastically supported, is studied using the general integral (2.8) of equation (2.1) under the assumption that the moment of inertia, the mass and the axial force are expressed by the functions (1.3) and (2.3) (section 4).

Forced oscillations of such a beam under any transverse dynamic load are examined in section 5, using expansion into eigenfunctions (5.2). In place of the load $p(x, t)$ it is necessary to expand, into the series (5.4), the equivalent load $\bar{p}(x, t)$ in expression (5.3). For an instantaneous uniform load p, the equation of deflection has the form (5.15).

The second part of this paper (to appear in a subsequent number of this journal) considers a general distribution of mass along the beam, and there are obtained equations useful for examining proper and forced oscillations of more complex structures with beams of variable cross-section.

Adresa autora: C. Sc. *Vladimír Fiřt*, Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.