Matúš Kuniak

Grafické určovanie charakteristík obalových skrutkových plôch

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 6, 455–466

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102924

GRAFICKÉ URČOVANIE CHARAKTERISTÍK OBALOVÝCH SKRUTKOVÝCH PLÔCH

MATÚŠ KUNIAK

(Došlo 28. januára 1964.)

Teóriu obalových skrutkových plôch rôznych typov možno uplatniť pri výrobe šnekových zariadení. Príspevok ukazuje a aplikuje jednoduchý spôsob konštruktívneho zvládnutia obalových skrutkových plôch, u ktorých tvoriacimi plochami sú rotačné plochy.

1. Podrobme rozboru skrutkovú plochu, ktorá je vytvorená skrutkovaním obecnej rotačnej plochy okolo osi ${}^1o$ pri danej redukovanej výške závitu v^0. Poloha skrutkujúcej rotačnej plochy φ vzhľadom k ose ${}^1o$ skruktovania je určená ostrým uhlom α osi ${}^2o$ tvoriacej rotačnej plochy s osou ${}^1o$ skrutkového pohybu a vzdialenosťou týchto navzájom mimobežných osí. Výsledná skrutková plocha Φ je obalovou plochou tvoriacej rotačnej plochy φ, ktorá je podrobená skrutkovému pohybu. Takto vytvorená obalová skrutková plocha dotýka sa rotačnej plochy pozdĺž určitej krivky e, ktorú nazývame *charakteristikou* skrutkovej plochy. Túto charakteristiku (tiež tvoriacu krivku) obalovej skrutkovej plochy možno považovať za prienik dvoch súmedzných polôch skrutkujúcej rotačnej plochy φ. Z vlastností charakteristiky e je známe, že v každom jej jednotlivom bode je spoločná tangenciálna rovina pre skrutkovú plochu Φ i tvoriacu rotačnú plochu φ, čo znamená, že v jednotlivom spoločnom dotykovom bode majú obe plochy spoločnú normálu.

Vytvorenie uvažovanej obalovej skrutkovej plochy môžeme interpretovať aj iným spôsobom. Ak považujeme danú tvoriacu rotačnú plochu φ za obalovú plochu guľových splôch o premenlivom polomere r, ktorých stredy ležia na danej osi ${}^2o$ rotačnej plochy, potom môžeme uvažovanú skrutkovú plochu získať ako obálku jednotlivých Archimedových serpentín, vytvorených pri skrutkovom pohybe jednotlivých guľových plôch obalujúcich danú rotačnú plochu. Tento výklad vytvorenia obalovej skrutkovej plochy nám umožní ľahšiu konštrukciu bodov charakteristiky e, o ktorú nám v tomto príspevku ide.

Zvoľme si ľubovolnú guľovú plochu ψ o strede S vpísanú danej rotačnej ploche φ (obr. 1). Ak podrobíme zvolenú jednotlivú tvoriacu guľovú plochu danému skrutkovému pohybu, tak vytvorená skrutková plocha bude obalovou plochou ψ' sústavy guľových plôch – známa pod menom Archimedova serpentína. Charakteristikou tejto skrutkovej plochy je prenik dvoch súmedzných plôch sústavy, čo je hlavná kružnica c guľovej plochy ψ, pozdĺž ktorej sa vytvorená serpentína dotýka tvoriacej guľovej plochy. Charakteristickú kružnicu c získame ako rezovú čiaru na guľovej ploche ψ normálovou rovinou κ idúcou stredom S vzhľadom ku jeho skrutkovici (s).

Dotyková kružnica k guľovej plochy ψ s uvažovanou rotačnou plochou φ pretína hlavnú kružnicu c tejže guľovej plochy v bodoch A, B, ktoré sú bodmi charakteristiky e.

Dotykové prvky medzi plochami φ, ψ a ψ' sú vyjadrené vzťahmi

$$k = \varphi \cap \psi,$$

$$c = \psi \cap \psi';$$

keďže sústava rotačných plôch φ a sústava serpentín ψ' obaľujú tú istú skrutkovú plochu Φ potom ich spoločné body

$$\{A, B\} = \varphi \cap \psi \cap \psi',$$

resp.

$$\{A, B\} = k \cap c$$

sú bodmi charakteristiky $e \in \varphi \cap \Phi$.

Dotykové čiary dvojíc uvažovaných plôch prechádzajú spoločnými bodmi – uzlami dotyku.

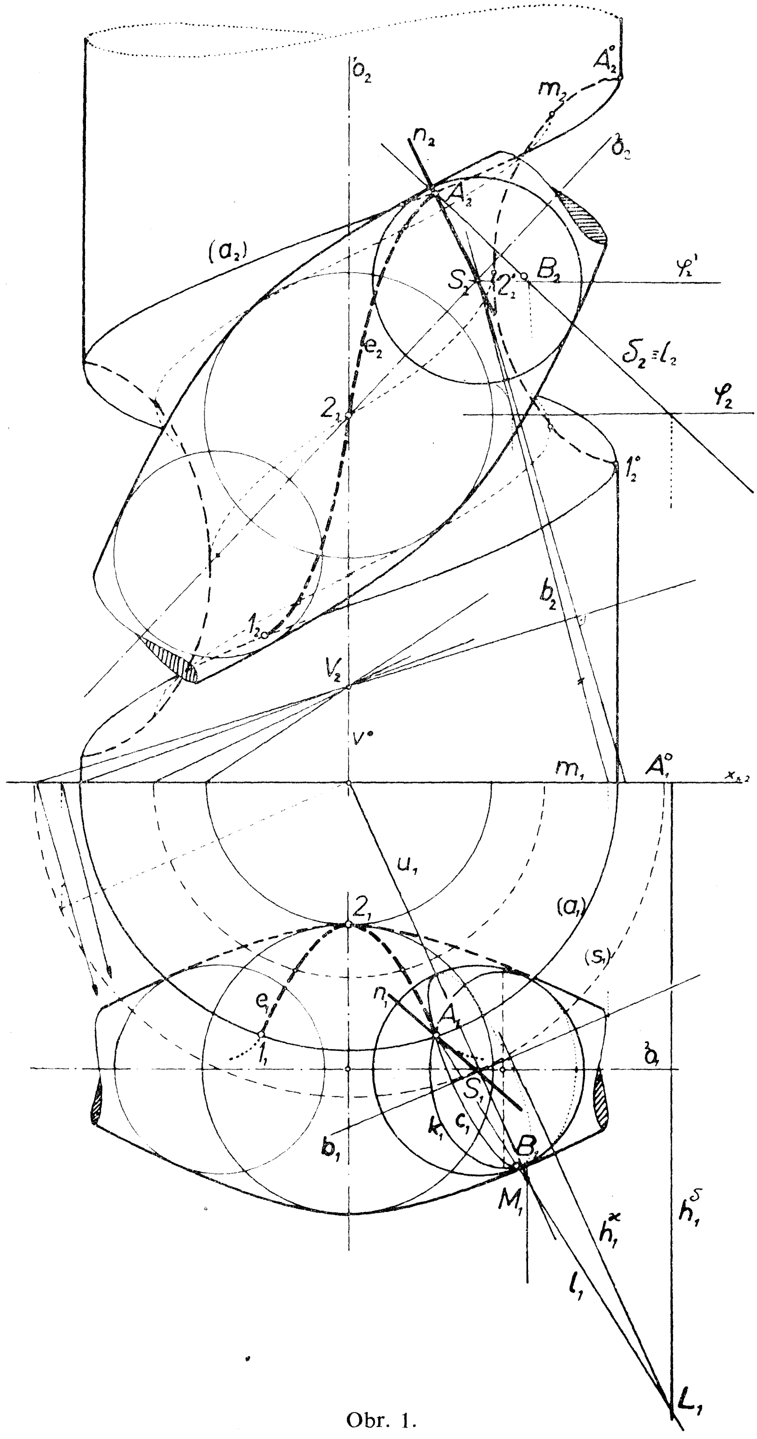
Pre konštrukciu bodov charakteristiky obalovej skrutkovej plochy z uvedených úvah možno uplatniť

Vetu 1. *Body charakteristiky e obalovej skrutkovej plochy Φ o tvoriacej rotačnej ploche φ sú spoločné body dvoch kružníc na jednotlivých guľových plochách ${}^1\psi$ ${}^2\psi$, ${}^3\psi$ ... zvolených zo sústavy guľových plôch obalujúcich tvoriacu rotačnú plochu φ a to hlavnej kružnice c, ktorá vznikne rezom normálovej roviny κ ku skrutkovici (s) stredu S jednotlivej guľovej plochy a dotykovej kružnice k zvolenej guľovej plochy ψ s danou tvoriacou rotačnou plochou φ.*

Dotyková kružnica k leží v rovine δ, hlavná kružnica c v rovine κ. Obe roviny sa pretínajú v priesečnici $l = \delta \cap \kappa$ jej priesečníky A, B s guľovou plochou ψ sú body charakteristiky e. Predošlú vetu môžeme potom písať vo tvare

Vety 2. *Body charakteristiky e obalovej skrutkovej plochy Φ, ktorej tvoriacou plochou je rotačná plocha φ sú spoločné body troch plôch a to jednotlivej guľovej plochy ψ zvolenej zo sústavy guľových plôch obalujúcich tvoriacu rotačnú plochu φ, normálovej roviny κ ku skrutkovici stredu S guľovej plochy, a roviny δ, ktorá je rovinou dotykovej kružnice k guľovej plochy ψ vpísanej danej rotačnej ploche φ; $\{A, B\} = \psi \cap \kappa \cap \delta$.*

Konštruktívna aplikácia druhej vety je ľahšia a presnejšia vyžaduje znalosť zostrojenia priesečnice dvoch rovín a určenie priesečníkov priamky s guľovou plochou.



Obr. 1.

Veta 3. *Spoločná normála n obalovej skrutkovej plochy Φ a tvoriacej rotačnej plochy φ v bode A, charakteristiky e prechádza stredom S tej guľovej plochy ψ vpísanej rotačnej ploche φ, pomocou ktorej bola prevedená konštrukcia bodu A charakteristiky e.*

Z vlastností charakteristiky e obalovej skrutkovej plochy pre dotykovú rovinu v jej bode platí

Veta 4. *Dotyková rovina τ^A v bode A charakteristiky e obalovej skrutkovej plochy Φ o tvoriacej rotačnej ploche φ je dotykovou rovinou ku tej guľovej ploche ψ vpísanej tvoriacej rotačnej ploche φ, pomocou ktorej bola prevedená konštrukcia bodu A charakteristiky e.*

Táto spoločná dotyková rovina τ^A bude obsahovať i dotyčnicu ku skrutkovici bodu A a tiež i dotyčnicu ku charakteristike e v uvažovanom bode.

Určením charakteristiky e uvedenej obalovej skrutkovej plochy môžeme potom ľahko konštrukčne odvodiť iné druhy tvoriacich čiar tejto skrutkovej plochy ako meridián, normálový rez a pod.

Poznámka: Ak uvažujeme len časť vytvorenej obalovej skrutkovej plochy, ohraničenej rotačným válcom súosím s osou skrutkového pohybu, potom len bod A bližší k ose skrutkovania patrí použitej časti charakteristiky e.

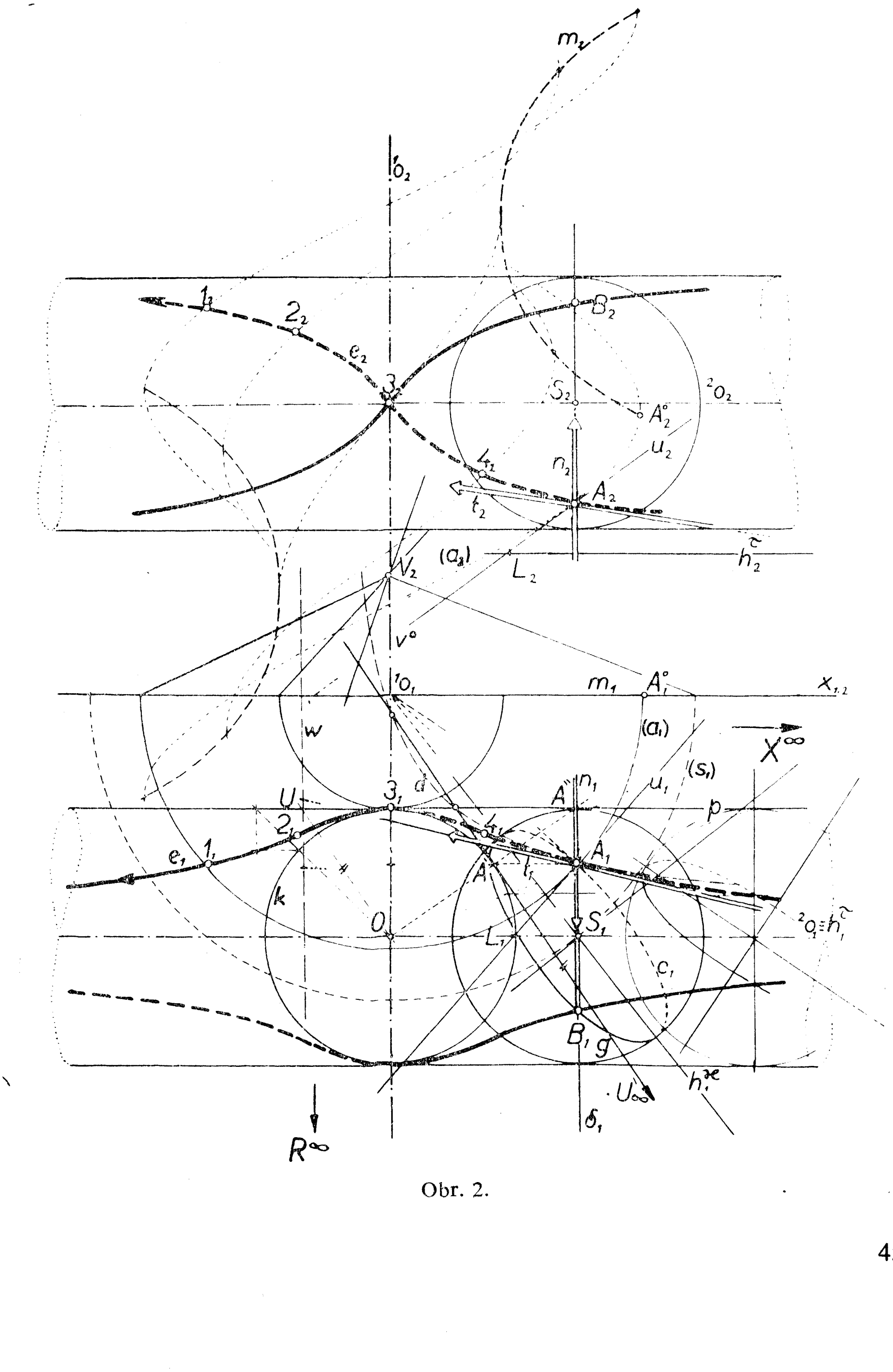
V ďalšom bude podaný rozbor niektorých obalových skrutkových plôch, ktorých tvoriacimi útvarmi sú rotačné plochy 2°.

2. Podrobme skrutkovému pohybu rotačnú valcovú plochu φ, ktorej os ${}^2o$ s osou ${}^1o$ skrutkového pohybu sú navzájom kolmé mimobežné priamky (obr. 2). I v tomto prípade budeme sledovať konštrukciu a rozbor charakteristiky e vytvorenej valcovoskrutkovej plochy Φ. Vytvorenú skrutkovú plochu považujeme za obálku Archimedových serpentín, vytvorených pri skrutkovom pohybe jednotlivých guľových plôch obalujúcich daný rotačný tvoriaci valec. Zo sústavy ∞^1 guľových plôch, ktoré obaľujú valec, uvažujme jednotlivú guľovú plochu ψ o strede S. Na zvolenej guľovej ploche ψ určme dve hlavné kružnice: jedna kružnica c je v normálovej rovine κ vzhľadom ku skrutkovici (s) stredu S guľovej plochy a druhá hlavná kružnica je v normálovej rovine δ vzhľadom ku tvoriacemu valcu φ. Spoločné body A, B získaných dvoch hlavných kružníc jednotlivej guľovej plochy vpísanej rotačnému valcu sú bodmi charakteristiky e vytvorenej obalovej skrutkovej plochy.

O spoločnej normále uvažovaných plôch platí

Veta 5. *Spoločná normála n skrutkovej obalovej plochy Φ o tvoriacej rotačnej valcovej ploche φ v bode A charakteristiky e prechádza spoločným priemerom AB dvoch hlavných kružníc guľovej plochy zvolenej zo sústavy ∞^1 guľových plôch obalujúcich rotačnú valcovú plochu φ, a to tých hlavných kružníc, ktoré vzniknú rezom normálovej roviny κ ku skrutkovici (s) stredu S guľovej plochy a normálovej roviny δ vzhľadom ku tvoriacemu valcu φ prechádzajúcej tiež stredom S zvolenej guľovej plochy.*

Konštrukcia dotyčnice v bode A uvažovanej cahrakteristiky e: Pôdorys dotyčnice t_1 ku priemetu e_1 skúmanej charakteristiky je možné zostrojiť pomocou projektívnych konštrukcií. Priemet e_1 je obrazom prienikovej kvartiky dvoch súmedzných polôh skrutkujúcej rotačnej valcovej plochy φ. Kvadraticky bodový rad na kružnici k premietnime z jej stredu O na nositeľku p. (V našom prípade nositeľka p je obrazom obry-



Obr. 2.

sovej površky valcovej plochy. Vždy tomu tak nie je, to záleží od parametru v^0 skrutkovania.) Oba kvadratické bodové rady na nositeľkách k a p premietnuté z bodov X^∞ resp R^∞ indukujú na odpovedajúcich si lúčoch body krivky e_1. Dotyčnici g v bode A' kružnice k v uvedenej osobitnej transformácii odpovendá hyperbola d, ktorá sa krivky e_1 dotýka v bode A_1. Kvartika e_1 a hyperbola d majú v bode A_1 spoločnú dotyčnicu t_1. Pre dotykovú hyperbolu d sú v obr. 2 zostrojené jej asymptoty, ktoré pre konštrukciu dotyčnice t_1 potrebujeme. Nevlastnému bodu $U'\infty$ lineárneho bodového radu na nositeľke g v danej projektivnosti odpovedá úbežník U, ktorým rovnobežne so smerom R^∞ prechádza asymptota w hyperboly d. Druhá asymptota vo smere X^∞ je priamka ${}^2o_1$. Potom z elementárnych dotyčnicových vlastností hyperboly môžeme dotyčnicu t_1 spoločnú hyperbole d a krivke e_1 ľahko zostrojiť. Dotyčnica t v bode A krivky e je incidentná s dotykovou rovinou τ^A spoločnou pre tvoriacu valcovú plochu φ i vytvorenú obalovú skrutkovú plochu Φ čo použijeme k zobrazeniu nárysu t_2.

Poznámka: Ak os ${}^2o$ tvoriacej rotačnej valcovej plochy φ a s ňou mimobežná os ${}^1o$ skrutkového pohybu svierajú ostrý uhol α, potom konštruktívne určovanie charakteristiky e vytvorenej obalovej skrutkovej plochy je celkom analogické ako bolo uvedené pri obr. 1 resp. 2.

Z vlastnosti krivky e odvodenej pomocou zvláštnych korešpondencií vyplýva

Veta 6. *Charakteristika e obalovej skrutkovej plochy Φ, ktorej tvoriacou plochou je rotačná valcová plocha φ je krivka funkcie tangens resp. jej afinná krivka navinutá na tvoriacu valcovú plochu φ.*

Taktiež potom platí

Veta 7. *Prieniková čiara e dvoch súmedzných polôh skrutkujúcej rotačnej valcovej plochy φ je priestorová kvartika s nevlastným bodom vo smere osi valcovej plochy a s dvoma asymptotami, ktorými sú površky valcovej plochy ležiace v jej osovej rovine rovnobežnej s osou skrutkového pohybu.*

Plochu vytvorenú normálami plochy pozdĺž charakteristiky e definuje

Veta 8. *Všetky normály plochy charakteristiky e obalovej skrutkovej plochy Φ, ktorej tvoriacou plochou je rotačná valcová plocha φ vytvárajú konoid, ktorého riadiacimi útvarmi sú; charakteristika e ako priestorová kvartika, os ${}^2o$ valcovej plochy a nevlastná priamka určená riadiacou rovinou $\delta \perp {}^2o$.*

Rozbor definovaného konoidu (obr. 3) môže byť predmetom osobitného pojednania, ktoré už nezapadá do tématiky tohto článku.

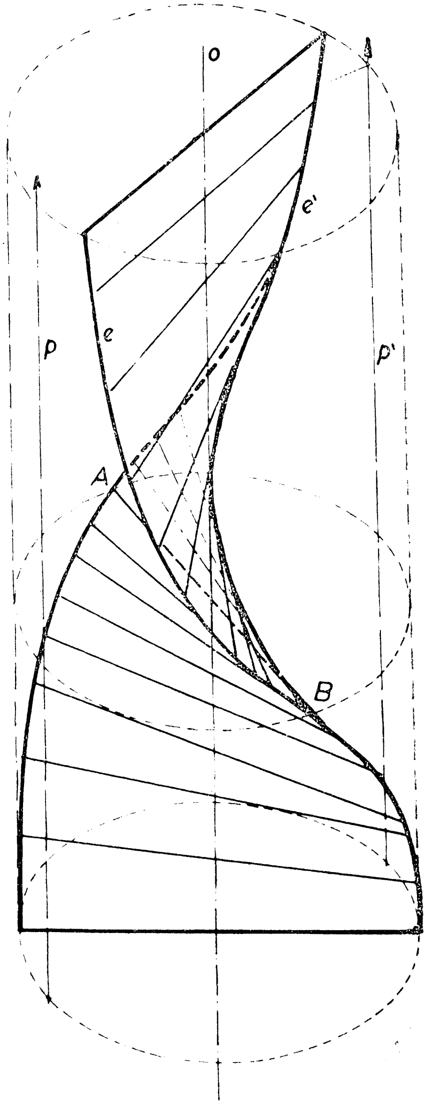
3. Sledujme iný typ obalovej skrutkovej plochy. Tvoriacou plochou nech je v tomto prípade skrutkujúci podlhovastý rotačný elipsoid φ, ktorého poloha vzhľadom k osi ${}^1o$ skrutkového pohybu je daná podľa obr. 4. Kvôli stručnejšiemu vyjadrovaniu pomenujme vytvorenú obalovú skrutkovů plochu Φ elipsoido-skrutkovou plochou.

Analogickou interpretáciou vpísaných guľových plôch, ktoré obalujú tvoriaci rotačný elipsoid, dochádzame ku bodovej konštrukcii charakteristiky e vytvorenej obalovej skrutkovej plochy. Body charakteristiky určuje

Veta 9. *Body charakteristiky e elipsoidoskrutkovej plochy sú spoločné body 3 plôch a to jednotlivej guľovej plochy ψ zvolenej zo sústavy guľových plôch obalujúcich tvoriaci rotačný elipsoid φ normálovej roviny κ ku skrutkovici (s) stredu S, guľovej plochy ψ a roviny δ, ktorá je rovinou dotykovej kružnice k guľovej plochy ψ vpísanej danému rotačnému elipsoidu φ.*

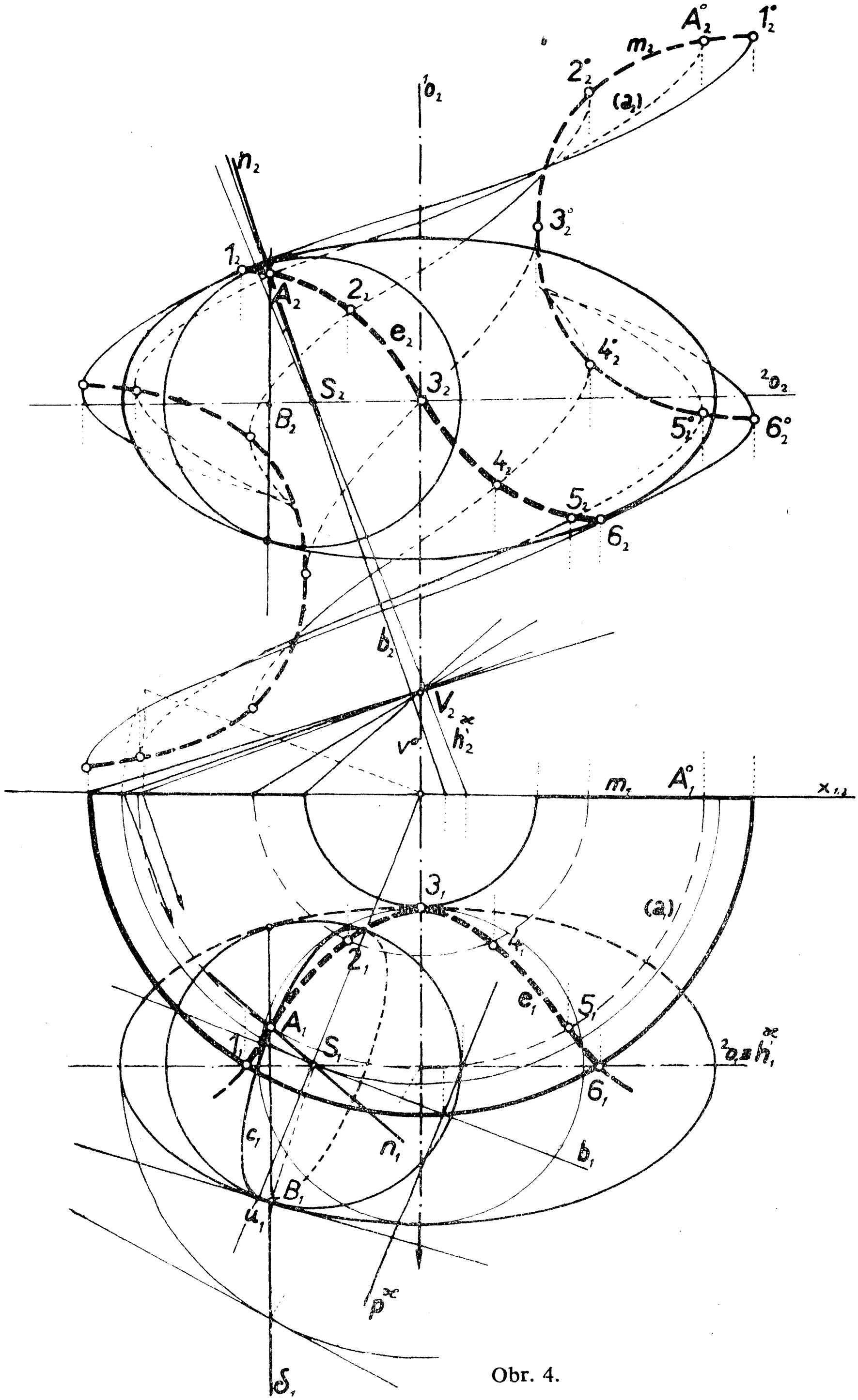
Konštruktívna aplikácia vety 9 je pre zostrojenie potrebnej časti charakteristiky e dosť neprehľadná a zdlhavá. Aj v tomto prípade môžeme priemet e_1 charakteristiky považovať za obraz prienikovej kvartiky dvoch susedných polôh skrutkujúceho elipsoidu a body čiary e_1 zostrojovať pomocou osobitnej transformácie kružnice k nasledovným spôsobom (obr. 5):

Body $A_1 B_1$ obrazu charakteristiky e_1 boli zostrojené uvedenou priestorovou; interpretáciou. Nad vedľajšou osou K_1, L_1 elipsoidu zostrojíme v pôdoryse kružnicu k; na nej určíme body 1, 2 ($A_1 1 \parallel B_1 2 \parallel {}^2o_1$). Spojnica bodov $1\ 2$ pretína priamku $A_1 B_1$ v priesečníku $1' \equiv 2'$, ním prechádza nositeľka $p \parallel {}^2o_1$. Zo stredu $S = 1\,2 \,.\, K_1 L_1$ premietnime kvadratický bodový rad kružnice k na nositeľku p. Oba kvadratické bodové rady premietnuté z bodov X^∞ resp. R^∞ indukujú na odpovedajúcich si lúčoch bovy krivky e_1. Dotyčnicu t_1 v bode A_1 krivky e_1 získame projektívnymi konštrukciami ako v obr. 2. (Dotyčnici ${}^1t$ v bode 1 kružnice k odpovedá v uvedenej transformácii hyperbola, ktorá sa krivky e_1 v bode A_1 dotýka — u, w sú získané asymptoty pre túto dotykovú hyperbolu.)



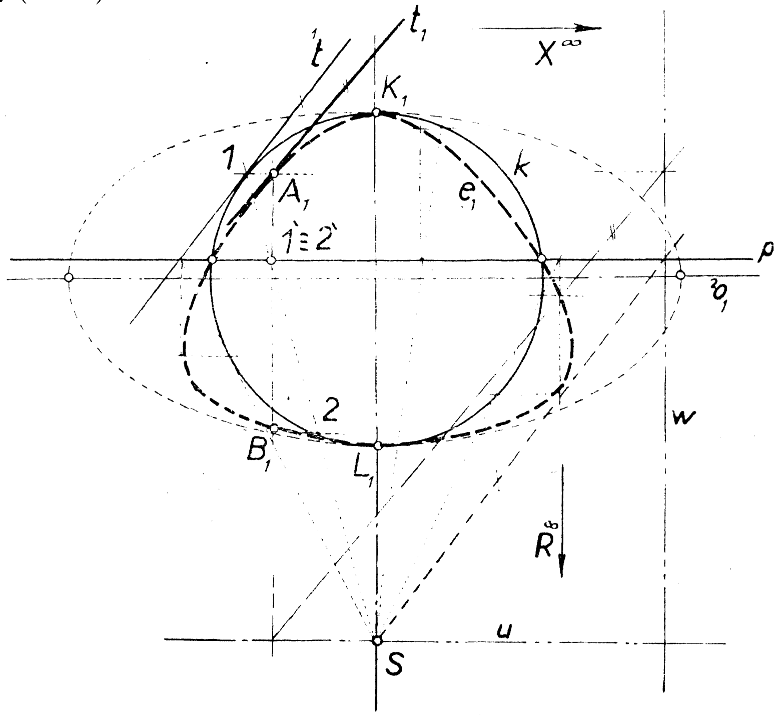
Obr. 3.

4. Podrobme rozboru obalovú skrutkovú plochu Φ, ktorá je vytvorená skrutkovaním anuloidu φ okolo osi o pri danej redukovanej výške závitu v^0. Poloha skrutku-


A_2°
1_2°
m_2
2_2°
(a_2)
$^1o_2$
n_2
3_2°
1_2
A_2
2_2
e_2
4_2°
$^2o_2$
S_2
3_2
B_2
5_2°
6_2°
4_2
5_2
6_2
b_2
V_2
v
$h_2^\varkappa$
m_1
A_1°
$x_{1,2}$
3_1
(a)
2_1
4_1
e_1
5_1
A_1
1_1
S_1
$^2o \equiv h_1^\varkappa$
6_1
c_1
n_1
b_1
B_1
u_1
$p^\varkappa$
δ_1

Obr. 4.

júceho anuloidu vzhľadom k ose o skrutkovania je obecná, t.j. rovina δ stredov polmeridiánových kružníc zviera s osou o skrutkového pohybu ostrý uhol α, pri čom os o skrutkového pohybu a os ${}^2o$ rotácie anuloidu sú navzájom mimobežné priamky (obr. 6).

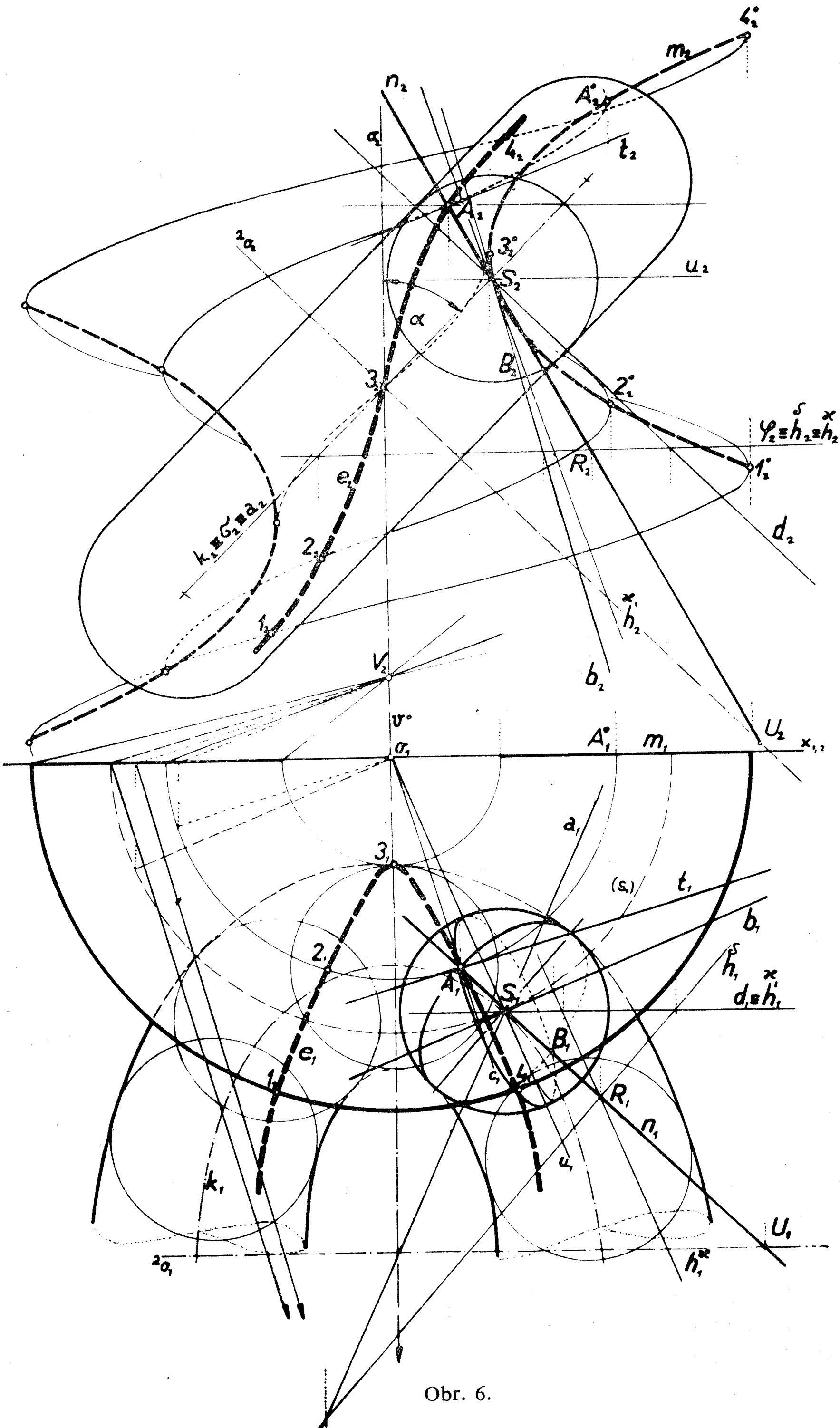


Obr. 5.

Vytvorenie anuloido-skrutkovej plochy Φ môžeme interpretovať ako obálku serpentín vytvorených skrutkovaním guľových plôch zvolených zo sústavy obalujúcich daný anuloid φ. Dotyková kružnica k zvolenej guľovej plochy vpísanej anuloidu leží v rovine δ meridiánovej; potom z predchádzajúcich obecných úvah platí

Veta 10. *Spoločná normála n obalovej skrutkovej plochy Φ a jej tvoriaceho anuloidu φ v spoločnom dotykovom bode prechádza spoločným priemerom AB dvoch hlavných kružníc guľovej plochy, zvolenej zo sústavy ∞^1 guľových plôch obalujúcich daný anuloid a to tých hlavných kružníc, ktoré vzniknú rezom normálovej roviny κ ku skrutkovici (s) stredu S guľovej plochy a meridiánovej roviny δ tvoriaceho anuloidu prechádzajúcej stredom S zvolenej guľovej plochy.*

Charakteristika e anuloido-skrutkovej plochy je priestorová čiara 16°, možno ju považovať za prenik dvoch súmedzných polôh skrutkujúceho anuloidu. V obr. 6 je zobrazená len časť použitej vetve charakteristiky e (konštrukciou získaný bod B patrí k jej parazitnej vetve).



n_2
m_2
t_2
u_2
S_2
B_2
R_2
d_2
b_2
U_2
V_2
e_2
α
$k_2 \equiv \sigma_2 \equiv a_2$
$\varphi_2 \equiv \overset{\delta}{h}_2 \equiv \overset{\varkappa}{h}_2$
$x_{1,2}$
A_1°
m_1
a_1
(s_1)
t_1
b_1
A_1
S_1
B_1
$d_1 \equiv \overset{\varkappa}{h}_1$
R_1
n_1
u_1
e_1
k_1
U_1
$\overset{\varkappa}{h}_1$

Obr. 6.

Uvedený prispevok ukazuje a aplikuje pomerne jednoduchý spôsob konštruktívneho zvládnutia obalových skrutkových plôch. Určením charakteristiky e uvádzaných plôch je možné potom ľahko určiť i iné druhy tvoriacich čiar na obalovej skrutkovej ploche, znalosť ktorých môže nájsť uplatnenie pri technologických a nástrojových variácicách pri výrobe rôznych šnekových zariadení.

Резюме

ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВИНТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОЖУХА

МАТУШ КУНИАК (Matúš Kuniak)

В статье приводится разбор винтовых поверхностей кожуха Φ, образованных при винтовых движениях определенной поверхности вращения φ. Образующая поверхность вращения φ считается кожухом шаровых поверхностей, при помощи которых осуществлена конструкция точек характеристики e результирующей винтовой поверхности кожуха.

Любой шаровой поверхностью ψ с центром S, вписываемой в данную поверхность вращения φ, образуется при винтовом движении спираль Архимеда ψ', для которой большая окружность c шаровой поверхности ψ вяляэтся характеристикой, лежащей в нормальной плоскости κ относительно винтовой линии (s) с центром S рассматриваемой шаровой поверхности ψ. Касающаяся окружность k шаровой поверхности ψ с рассматриваемой поверхностью вращения φ пересекает большую окружность c шаровой поверхности ψ в точках A, B результирующей характеристики e исследуемой винтовой поверхности кожуха Φ.

Простое усвоение конструкции приведенной тематики может быть пригодным при производстве различных червьячных деталей.

Summary

GRAPHICAL DEFINITION OF THE CHARACTERISTICS OF ENVELOPING HELICOIDAL SURFACES

MATÚŠ KUNIAK

The paper presents the analysis of the enveloping helicoidal surfaces Φ which are formed by the halical movement of a surface of rotation φ. This surface φ is taken for the envelope of spherical surfaces by means of which the construction of the

points of the characteristic e of the resultant enveloping helicoidal surface is effected.

Any spherical surface ψ with center S, inscribed into the given surface of rotation φ, will form, under helical movement, an Archimedean spiral ψ' for which the great circle c of the spherical surface ψ is the characteristic lying in the normal plane κ with regard to the helix (s) described by the center S of the given spherical surface ψ. The contact circle k of the spherical surface ψ with the corresponding surface of rotation φ intersects the great circle c of the spherical surface ψ in points A, B of the resultant characteristic e of the examined enveloping spherical surface Φ.

It is possible to apply a simple constructional solution of the above questions to the production of various worm devices.

Adresa autora: Ing. *Matúš Kuniak*, Vysoká škola technická, Zbrojnícka 7, Košice.