Vladimír Petrův

Die Abschätzung des Fehlers der Lösung, welcher beim Einsetzen von Konstanten für die Quotienten O/P und R/P in den Frenetschen Formeln entsteht

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 6, 435–442

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102922

DIE ABSCHÄTZUNG DES FEHLERS DER LÖSUNG, WELCHER BEIM EINSETZEN DER KONSTANTEN FÜR DIE QUOTIENTEN Q/P UND R/P IN DEN FRENETSCHEN FORMELN ENTSTEHT

VLADIMÍR PETRŮV

(Eingelangt am 4. Februar 1964.)

In der Arbeit wird die Differenz zweier Lösungen der vereinfachten Frenetschen Formeln abgeschätzt und zwar im Falle, dass die eine Lösung die Formeln mit den Funktionen q, r und die andere die Formeln mit den Funktionen q_0, r_0 erfüllt.

F. NOŽIČKA hat bewiesen, dass die Weltlinie ein gewisses System von Differentialgleichungen, die sogenannten Frenetschen Formeln, erfüllt[1]). Wenn man statt der Eigenzeit τ ein neues Parameter σ einführt, bekommt man aus den Frenetschen Formeln ein einfacheres System der Differentialgleichungen[2])

$$\frac{dj_1}{d\sigma} = j_2\,, \qquad \frac{dj_2}{d\sigma} = j_1 + qj_3\,, \tag{1}$$

$$\frac{dj_3}{d\sigma} = -qj_2 + rj_4\,, \quad \frac{dj_4}{d\sigma} = -rj_3\,, \ ^3)$$

wo q, r stetige und nichtnegative Funktionen in gewissem Intervall $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ sind. Im Falle, dass $r = 0$ ist, reduziert sich das System (1) auf das System.

$$\frac{dj_1}{d\sigma} = j_2\,, \quad \frac{dj_2}{d\sigma} = j_1 + qj_3\,, \quad \frac{dj_3}{d\sigma} = -qj_3\,. \tag{2}$$

Der Fall, dass die Funktionen q, r Konstanten sind, wurde schon gelöst[2]). Im Falle nichtkonstanter Funktionen q, r kann uns also dieser Fall als erste Approximation dienen, wenn man nur die Konstanten, die man für q und r setzt, passend wählt.

---

[1]) Siehe [1].

[2]) Siehe [2].

[3]) Wir sollten j_1^α, j_2^α, j_3^α, j_4^α schreiben, weil wir uns aber nur mit einer Lösung des Systems beschäftigen werden, lassen wir den Index α aus.

Es handelt sich freilich auch darum, was für ein grosser Fehler in der Lösung entstehen wird. Der Inhalt dieser Arbeit ist die Abschätzung des Fehlers der Lösung, der entsteht, wenn man in System (1) statt der Funktionen q, r die Funktionen q_0 r_0 (resp. im System (2) statt der Funktion q die Funktion q_0) nimmt.

I. Der Fall $r = 0$.

Es soll j_1, j_2, j_3 eine Lösung des Systems (2) und k_1, k_2, k_3 eine Lösung des Systems sein, das aus dem System (2) entsteht, wenn man q_0 statt q schreibt. Diese beiden Lösungen sollen dieselben Anfangsbedingungen für $\sigma = 0$ erfüllen, d. i.

$$j_1(0) = k_1(0)\,, \quad j_2(0) = k_2(0)\,, \quad j_3(0) = k_3(0)\,. \tag{3}$$

Es interessiert uns die Abschätzung der Differenz $j_1 - k_1$.

Wegen (3) bekommt man mittels des Mittelwertsatzes und der ersten der Gleichungen (2): für $\sigma \in J$ gilt

$$j_1(\sigma) - k_1(\sigma) = \sigma(j_2(\bar{\sigma}) - k_2(\bar{\sigma}))\,, \tag{4}$$

wo $0 < \bar{\sigma} < \sigma$ ist.

Schätzen wir ähnlich die Differenz $j_2(\sigma) - k_2(\sigma)$ für $\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle$ ab:

$$j_2(\sigma) - k_2(\sigma) = \sigma(j_1(\sigma') - k_1(\sigma') + q(\sigma')\, j_3(\sigma') - q_0(\sigma')\, k_3(\sigma'))\,,$$

wo $0 < \sigma' < \sigma$ ist, also

$$|j_2(\sigma) - k_2(\sigma)| \leqq$$
$$\leqq \sigma(|j_1(\sigma') - k_1(\sigma')| + |q(\sigma')| \,.\, |j_3(\sigma') - k_3(\sigma')| + |q(\sigma') - q_0(\sigma')| \,.\, |k_3(\sigma')|)\,.$$

Bezeichnen wir

$$C = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} q(\sigma)\,, \quad \varepsilon = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |q(\sigma) - q_0(\sigma)|\,, \quad K_2 = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |k_3(\sigma)|\,.$$

Man hat dann

$$|j_2(\sigma) - k_2(\sigma)| \leqq \sigma(|j_1(\sigma') - k_1(\sigma')| + C|j_3(\sigma') - k_3(\sigma')| + \varepsilon K_2)\,.$$

Wenn man dieselbe Methode nochmals auf die rechte Weite anwendet, bekommt man

$$|j_2(\sigma) - k_2(\sigma)| \leqq$$
$$\leqq \sigma(\sigma'|j_2(\sigma_1'') - k_2(\sigma_1'')| + C\sigma'|q(\sigma_2'')\, j_2(\sigma_2'') - q_0(\sigma_2'')\, k_2(\sigma_2'')| + \varepsilon K_2)\,,$$

wo $0 < \sigma_1'' < \sigma'$, $0 < \sigma_2'' < \sigma'$ ist. Bezeichnen wir noch

$$K_1 = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |k_2(\sigma)|\,,$$

hat man weiter (es ist $0 < \sigma' < \sigma$):

$$|j_2(\sigma) - k_2(\sigma)| \leqq \sigma\varepsilon K_2 + \sigma^2(|j_2(\sigma_1'') - k_2(\sigma_1'')| + C(C|j_2(\sigma_2'') - k_2(\sigma_2'')| + \varepsilon K_1))\,.$$

Bezeichnen wir σ'' den der beiden Punkte σ_1'', σ_2'' in dem der Wert $|j_2 - k_2|$ grösser oder gleich dem Wert in dem anderen Punkte ist; man bekommt so

$$(5) \qquad |j_2(\sigma) - k_2(\sigma)| \leqq \sigma\varepsilon K_2 + \sigma^2\varepsilon C K_1 + \sigma^2(1 + C^2)\,|j_2(\sigma'') - k_2(\sigma'')|\,,$$

wo $0 < \sigma'' < \sigma' < \sigma$ ist. Wir werden jetzt durch Induktion beweisen, dass für jedes $n = 1, 2, \ldots$ es ein σ_n $(0 < \sigma_n < \bar{\sigma})$ so gibt, dass

$$(6) \qquad |j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \varepsilon\sigma^2(K_2 + CK_1\sigma)\sum_{k=0}^{n-1}(1 + C^2)^k\,\sigma^{2k} +$$

$$+ (1 + C^2)^n\,\sigma^{2n+1}|j_2(\sigma_n) - k_2(\sigma_n)|\,.$$

Für $n = 1$ bekommt man (6) gleich aus (4) und (5). Es mag jetzt (6) für den Wert n gelten. Den Ausdruck $|j_2(\sigma_n) - k_2(\sigma_n)|$ schätzen wir mit Hilfe von (5) ab; wenn man nun σ_{n+1} statt σ'' schreibt, sieht man, dass die Ungleichung (6) auch für den Wert $n + 1$ gültig ist.

Nehmen wir jetzt in (6) den Grenzwert für $n \to +\infty$. Aus dem ersten Glied entsteht eine unendliche Reihe, die offenbar für

$$\sigma^2 < \frac{1}{1 + C^2}$$

konvergiert. Wenn man sich auf solche σ beschränkt, dann wird $\lim_{n\to+\infty}(1 + C^2)^n\,\sigma^{2n+1} = 0$; weil die Funktion $|j_2 - k_2|$ auf dem Intervall $\langle 0, \bar{\sigma}\rangle$ beschränkt ist, ist der Grenzwert des zweiten Gliedes in (6) gleich Null. Man bekommt so

$$|j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| = \varepsilon\sigma^2(K_2 + CK_1\sigma)\sum_{k=0}^{+\infty}(1 + C^2)^k\,\sigma^{2k} = \frac{\varepsilon\sigma^2(K_2 + CK_1\sigma)}{1 - (1 + C^2)\,\sigma^2}\,.$$

Wir haben so diesen Satz bewiesen:

Satz 1. *Die Funktionen q, q_0 sollen stetig und nichtnegativ im Interfall $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ sein. Es mag j_1, j_2, j_3 die Lösung des Systems (2) sein, die dieselben Anfangsbedingungen für $\sigma = 0$ wie die Lösung k_1, k_2, k_3 erfüllt, wo k_1, k_2, k_3 die Lösung des Systems das aus dem System (2) entsteht, wenn man darin q_0 statt q schreibt. Es sei*

$$C(\sigma) = \sup_{\bar{\sigma}\in\langle 0,\sigma)} q(\bar{\sigma})\,, \quad \varepsilon(\sigma) = \sup_{\bar{\sigma}\in\langle 0,\sigma)} |q(\bar{\sigma}) - q_0(\bar{\sigma})|\,,$$

$$K_1(\sigma) = \sup_{\bar{\sigma}\in\langle 0,\sigma)} |k_2(\sigma)|\,, \quad K_2(\sigma) = \sup_{\bar{\sigma}\in\langle 0,\sigma)} |k_3(\sigma)|$$

für $\sigma \in J$. Für die $\sigma \in J$, welche die Bedingung

$$(7) \qquad (1 + C^2(\sigma))\,\sigma^2 < 1$$

erfüllen, gilt dann die Abschätzung

$$(8) \qquad |j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \frac{\sigma^2 \varepsilon(\sigma)\,(K_2(\sigma) + \sigma C(\sigma)\, K_1(\sigma))}{1 - \sigma^2(1 + C^2(\sigma))}\,.$$

II. Der Fall $r \neq 0$.

Es soll j_1, j_2, j_3, j_4 die Lösung des Systems (1) und k_1, k_2, k_3, k_4 die Lösung des Systems sein, der aus dem System (1) entsteht, wenn man q_0, r_0 statt q, r schreibt. Die beiden Lösungen sollen dieselben Anfangsbedingungen für $\sigma = 0$ erfüllen, d. i. es soll

$$(9) \qquad j_1(0) = k_1(0)\,, \quad k_2(0) = k_2(0)\,, \quad j_3(0) = k_3(0)\,, \quad j_4(0) = k_4(0)$$

sein. Es interessiert uns wieder die Abschätzung der Differenz $j_1 - k_1$.

Wir werden ganz analog wie im Falle I fortschreiten. Wegen (9) bekommt man nach dem Mittelwertsatz die Gleichung

$$j_1(\sigma) - k_1(\sigma) = \sigma(j_2(\bar{\sigma}) - k_2(\bar{\sigma}))$$

wo $0 < \bar{\sigma} < \sigma$ ist. Bezeichnen wir

$$C = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} q(\sigma)\,, \quad D = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} r(\sigma)\,, \quad K_1 = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |k_2(\sigma)|\,, \quad K_2 = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |k_3(\sigma)|\,,$$

$$K_3 = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |k_4(\sigma)|\,, \quad \varepsilon = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |q(\sigma) - q_0(\sigma)|\,, \quad \eta = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |r(\sigma) - r_0(\sigma)|\,.$$

Es ist dann

$$j_1(\sigma) - k_1(\sigma) = \sigma\,.\,\bar{\sigma}(j_1(\sigma') - k_1(\sigma') + q(\sigma')\, j_3(\sigma') - q_0(\sigma')\, k_3(\sigma'))\,,$$

wo $0 < \sigma' < \bar{\sigma}$ ist, es gilt also

$$(10) \qquad |j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \sigma^2 \varepsilon K_2 + \sigma^2(|j_1(\sigma') - k_1(\sigma')| + C|j_3(\sigma') - k_3(\sigma')|\,.$$

Man kann auf dieselbe Weise die Differenz $j_3(\sigma) - k_3(\sigma)$ für $\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle$ abschätzen: es ist

$$j_3(\sigma) - k_3(\sigma) = \sigma(-q(\sigma')\, j_2(\sigma') + r(\sigma')\, j_4(\sigma') - q_0(\sigma')\, k_2(\sigma') + r_0(\sigma')\, k_4(\sigma'))$$

wo $0 < \sigma' < \sigma$ ist, es gilt also

$$\begin{aligned} |j_3(\sigma) - k_3(\sigma)| &\leqq \sigma(\varepsilon K_1 + \eta K_3) + \sigma(C|j_2(\sigma') - k_2(\sigma')| + D|j_4(\sigma') - k_4(\sigma')| \leqq \\ &\leqq \sigma(\varepsilon K_1 + \eta K_3) + \sigma^2[C(|j_1(\sigma_1'') - k_1(\sigma_1'')| + C|j_3(\sigma_1'') - k_3(\sigma_1'')| + \varepsilon K_2) + \\ &\quad + D(D|j_3(\sigma_2'') - k_3(\sigma_2'')| + \eta K_2)\,, \end{aligned}$$

wo $0 < \sigma_1'' < \sigma'$, $0 < \sigma_2'' < \sigma'$ ist. Man hat so

$$(11) \qquad \begin{aligned} |j_3(\sigma) - k_3(\sigma)| &\leqq \sigma(\varepsilon K_1 + \eta K_3) + \sigma^2(C\varepsilon + D\eta)\, K_2 + \\ &+ \sigma^2[C|j_1(\sigma_1'') - k_1(\sigma_1'')| + (C^2 + D^2)\, |j_3(\sigma'') - k_3(\sigma'')|]\,, \end{aligned}$$

wo $0 < \sigma_1'' < \sigma'$, $0 < \sigma'' < \sigma'$ ist.

Definieren wir die Zahlen A_n, B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ durch die Gleichungen

(12) $$A_1 = 1\,, \quad B_1 = 1\,,$$

(13) $$A_{n+1} = A_n + C^2 B_n\,, \quad B_{n+1} = A_n + (C^2 + D^2)\, B_n\,.$$

Wir werden beweisen, dass gilt: Zu jedem $n = 1, 2, \ldots$ gibt es Zahlen σ_n, σ_n', $0 < \sigma_n < \bar{\sigma}$, $0 < \sigma_n' < \bar{\sigma}$ so, dass

(14) $$|j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \sigma^2 \varepsilon K_2 (1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sigma^{2k}) +$$
$$+ \sigma^3 C(\varepsilon K_1 + \eta K_3 + \sigma(C\varepsilon + D\eta)\, K_2) \sum_{k=1}^{n-1} B_k \sigma^{2(k-1)} +$$
$$+ \sigma^{2n}(A_n |j_1(\sigma_n) - k_1(\sigma_n)| + C B_n |j_3(\sigma_n') - k_3(\sigma_n')|)\,.$$

Beweis durch Induktion nach n: Für $n = 1$ folgt (14) gleich aus (10), wenn man $\sigma_1 = \sigma_1' = \sigma'$ setzt. Es soll also (14) für den Wert n gelten. Die auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke $|j_1(\sigma_n) - k_1(\sigma_n)|$, $|j_3(\sigma_n') - k_3(\sigma_n')|$ kann man mittels (10) und (11) abschätzen. Man bekommt

$$|j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \sigma^2 \varepsilon K_2 (1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sigma^{2k}) + \sigma^3 C(\varepsilon K_1 + \eta K_3 + \sigma(C\varepsilon + D\eta)\, K_2)\,.$$
$$.\sum_{k=1}^{n-1} B_k \sigma^{2(k-1)} + \sigma^{2n+2} \varepsilon K_2 A_n + \sigma^{2n+1} C(\varepsilon K_1 + \eta K_3)\, B_n + \sigma^{2n+2} C(C\varepsilon + D\eta)\, K_2 B_n +$$
$$+ \sigma^{2n+2}[(A_n + C^2 B_n)\, |j_1(\sigma_{n+1}) - k_1(\sigma_{n+1})| + C(A_n + (C^2 + D^2)\, B_n)\,.$$
$$.\,|j_3(\sigma_{n+1}') - k_3(\sigma_{n+1}')|]\,,$$

wo man σ_{n+1} gleich dem der beiden Punkte σ', σ_1'' gesetzt hat, für welches der Wert $|j_1 - k_1|$ grösser oder gleich dem Wert in dem anderen Punkte ist, und σ_{n+1}' wieder dem der Punkte σ', σ'' für welches der Wert $|j_3 - k_3|$ grösser oder gleich dem Wert in dem anderen Punkte ist. Wegen der Gleichungen (13) sieht man, dass die letzte Ungleichung gerade die Ungleichung (14) für den Wert $n + 1$ ist.

Man hat bewiesen,[4]) dass die Zahlen A_n, B_n, die durch die Gleichungen (12), (13) bestimmt sind, die Zahlen

(15) $$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{(n-k-1)/2} \binom{\frac{1}{2}(n + k - 1)}{k} D^{n-k-1} (1 + C^2 + D^2)^k,$$

(16) $$A_n = B_{n+1} - (C^2 + D^2)\, B_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sind.

Konvergiert die Reihe

(17) $$\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sigma^{2(n-1)}\,,$$

---

[4]) Siehe [3].

konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sigma^{2n}$ und es ist

$$\lim_{n \to +\infty} A_n \sigma^{2n} = \lim_{n \to +\infty} B_n \sigma^{2n} = 0 ,$$

das bedeutet, dass der Grenzwert der beiden letzten Glieder in (14) gleich Null ist. (Alle σ_n, σ_n' sind aus dem Intervall $\langle 0, \bar{\sigma} \rangle$ und deswegen sind die Ausdrücke $|j_1(\sigma_n) - k_1(\sigma_n)|$, $|j_3(\sigma_n') - k_3(\sigma_n')|$ sicher mit einer von n unabhängigen Konstanten beschränkt.)

Man kann beweisen, dass die Reihe (17) zu der Summe[4)]

$$\frac{1}{1 - \sigma^2(1 + C^2 + D^2 - D^2\sigma^2)} \tag{18}$$

konvergiert, solange

$$\sigma^2(1 + C^2 + D^2 + D^2\sigma^2) < 1 . \tag{19}$$

Nimmt man also in (14) den Grenzwert für $n \to +\infty$, bekommt man für die σ, die die Ungleichung (19) erfüllen, die Abschätzung

$$|j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \sigma^2 \varepsilon K_2 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} B_{n+1}\sigma^{2n} - (C^2 + D^2) \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sigma^{2n}\right) +$$
$$+ \sigma^3 C(\varepsilon K_1 + \eta K_3 + \sigma(C\varepsilon + D\eta) K_2) \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sigma^{2(n-1)} ,$$

es ist also

$$|j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \tag{20}$$
$$\leqq \frac{\sigma^2 \varepsilon K_2(1 - (C^2 + D^2)\sigma^2) + \sigma^3 C(\varepsilon K_1 + \eta K_3 + \sigma(C\varepsilon + D\eta) K_2)}{1 - \sigma^2(1 + C^2 + D^2 - D^2\sigma^2)} .$$

Wir haben so diesen Satz bewiesen:

Satz 2. *Die Funktionen q, q_0, r, r_0 sollen stetig und nichtnegativ im Intervall $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ sein. Es mag j_1, j_2, j_3, j_4 eine Lösung des Systems* (1) *sein, die dieselben Anfangsbedingungen für $\sigma = 0$ erfüllt wie die Lösung k_1, k_2, k_3 k_4 des Systems, das aus dem System* (1) *entsteht, wenn man q_0 statt q und r_0 statt r schreibt. Es soll $\sigma \in J$ sein. Bezeichnen wir*

$$C = \sup_{\bar{\sigma} \in \langle 0, \sigma)} q(\bar{\sigma}) , \quad D = \sup_{\bar{\sigma} \in \langle 0, \sigma)} r(\bar{\sigma}) , \quad K_1 = \sup_{\bar{\sigma} \in \langle 0, \sigma)} |k_2(\bar{\sigma})| , \quad K_2 = \sup_{\bar{\sigma} \in \langle 0, \sigma)} |k_3(\bar{\sigma})| , \tag{21}$$
$$K_3 = \sup_{\bar{\sigma} \in \langle 0, \sigma)} |k_4(\bar{\sigma})| , \quad \varepsilon = \sup_{\bar{\sigma} \in \langle 0, \sigma)} |q(\bar{\sigma}) - q_0(\bar{\sigma})| , \quad \eta = \sup_{\bar{\sigma} \in \langle 0, \sigma)} |r(\bar{\sigma}) - r_0(\bar{\sigma})| .$$

Wenn

$$\sigma^2(1 + C^2 + D^2 + D^2\sigma^2) < 1 \tag{22}$$

ist, dann gilt

$$(23) \qquad |j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq$$
$$\leqq \frac{\sigma^2 \varepsilon K_2 + \sigma^3 C(\varepsilon K_1 + \eta K_3) + \sigma^4 D(C\eta - D\varepsilon) K_2}{1 - \sigma^2(1 + C^2 + D^2 - D^2\sigma^2)}.$$

Bemerkung: Satz 1 ist ein spezieller Fall des Satzes 2, es genügt $r = r_0 = 0$, d. i. $\eta = D = 0$ im Satze 2 zu nehmen.

Literatur

[1] *František Nožička:* Les formules de Frenet pour la géodesique dans la mécanique de Minkowski. Czechoslovak Math. Journal 13 (88) 1963, 290–321.

[2] *Vladimír Petrův:* Die Lösung der Formeln von Frenet im Falle konstanter Krümmungen. Apl. mat. 9 (1964), 4, 239–272.

[3] *Vladimír Petrův:* Approximative Lösung der Formeln von Frenet im Falle „kleiner" Quotienten Q/P, R/P. Čas. pro pěst. mat. 92 (1965), 2.

Výtah

ODHAD CHYBY ŘEŠENÍ, VZNIKLÉ NAHRAZENÍM PODÍLŮ Q/P, R/P VE FRENETOVÝCH FORMULÍCH KONSTANTAMI

VLADIMÍR PETRŮV

Frenetovy formule byly vyřešeny v případě, že podíly $q = Q/P$, $r = R/P$ jsou konstantní, což v případě nekonstantních podílů Q/P, R/P může sloužiti za první aproximaci; otázka je, jak velké chyby se při tom dopustíme.

V práci je stanoven odhad řešení j_1, j_2, j_3, j_4 systému

$$(*) \qquad \frac{dj_1}{d\sigma} = j_2, \qquad \frac{dj_2}{d\sigma} = j_1 + qj_3,$$
$$\frac{dj_3}{d\sigma} = -qj_2 + rj_4, \quad \frac{dj_4}{d\sigma} = -rj_3$$

a řešení k_1, k_2, k_3, k_4 systému, který vznikne, nahradíme-li v systému $(*)$ funkce q, r jinými funkcemi q_0, r_0. V případě, že funkce q, q_0, r, r_0 jsou spojité a nezáporné v jistém intervalu J, platí pro $\sigma \in J$, jež splňují podmínku

$$\sigma^2(1 + C^2 + D^2 + D^2\sigma^2) < 1$$

odhad

$$|j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \frac{\sigma^2 \varepsilon K_2 + \sigma^3 C(\varepsilon K_1 + \eta K_3) + \sigma^4 D(C\eta - D\varepsilon) K_2}{1 - \sigma^2(1 + C^2 + D^2 - D^2\sigma^2)},$$

kde čísla C, D, K_1, K_2, K_3, ε, η jsou dána rovnicemi (20) (viz text). O řešeních j_1, j_2, j_3, j_4 a k_1, k_2, k_3, k_4 se ovšem předpokládá, že splňují stejné počáteční podmínky pro $\sigma = 0$.

Резюме

ОЦЕНКА ОШИБКИ РЕШЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ЗАМЕНОЙ ЧАСТНЫХ Q/P, R/P В ФОРМУЛАХ ФРЕНЕ ПОСТОЯННЫМИ

ВЛАДИМИР ПЕТРУВ (Vladimír Petrův)

Формулы Френе были решены для частного случая постоянных $q = Q/P$, $r = R/P$. В случае непостоянных q, r могут эти решения служить как первое приближение. Проблему представляет оценка возникающих погрешностей.

В работе определена оценка розности решения j_1, j_2, j_3, j_4 системы

$$(*)\qquad \frac{\mathrm{d}j_1}{\mathrm{d}\sigma} = j_2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}j_2}{\mathrm{d}\sigma} = j_1 + qj_3\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}j_3}{\mathrm{d}\sigma} = -qj_2 + rj_4\,, \qquad \frac{\mathrm{d}j_4}{\mathrm{d}\sigma} = -rj_3\,,$$

и решения k_1, k_2, k_3, k_4 системы, которая возникает заменой в системе (*) функций q, r другими функциями q_0, r_0. В случае непрерывных и неотрицательных фунцкий q, q_0, r, r_0 в некотором интервале I для $\sigma \in I$, удовлетворяющих условию

$$\sigma^2(1 + C^2 + D^2 + D^2\sigma^2) < 1\,,$$

имеет место оценка

$$|j_1(\sigma) - k_1(\sigma)| \leqq \frac{\sigma^2\varepsilon K_2 + \sigma^3 C(\varepsilon K_1 + \eta K_3) + \sigma^4 D(C\eta - D\varepsilon) K_2}{1 - \sigma^2(1 + C^2 + D^2 - D^2\sigma^2)}\,,$$

где C, D, K_1, K_2, K_3, ε, η определена при помощи уравнений (20). О решениях j_1, j_2, j_3, j_4 и k_1, k_2, k_3, k_4 предполодается, что они удовлетворяют тем же начальным условиям для $\sigma = 0$.

Adresa autora: Vladimír Petrův C. Sc., Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university, Malostranské nám. 25, Praha 1.