

Aplikace matematiky

Karel Bucháček

Příspěvek ke geometricky nelineární teorii ploché skořepiny ve tvaru hyperbolického paraboloidu

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 5, 328–340

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102911>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘÍSPĚVEK KE GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ TEORII
 PLOCHÉ SKOŘEPINY VE TVARU HYPERBOLICKÉHO PARABOLOIDU

KAREL BUCHÁČEK

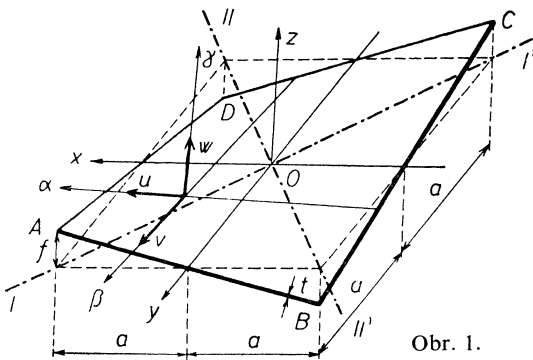
(Došlo dne 11. listopadu 1963.)

Je vyšetřováno přetvoření ploché skořepiny ve tvaru hyperbolického paraboloidu čtvercového půdorysu, podepřené pružnou prostorovou rámovou konstrukcí a zatížená rovnoměrným hydrostatickým tlakem. Prvá část je věnována obecné metodě stanovení přetvoření a napjatosti skořepiny, druhá část se zabývá konkrétním řešením úlohy za předpokladu zjednodušených okrajových podmínek.

A. OBECNÁ TEORIE

1. ZÁKLADNÍ ROVNICE PLOCHÉ SKOŘEPINY VE TVARU HYPERBOLICKÉHO PARABOLOIDU

Střednicová plocha je v parametrickém tvaru dána rovnicemi



Obr. 1.

$$x = a\alpha, \quad y = a\beta, \quad z = a\alpha\beta;$$

$$\kappa = \frac{f}{a}.$$

Naše řešení bude vycházet z geometricky nelineární teorie plochých skořepin, která v případě hyperbolického paraboloidu zatíženého rovnoměrným hydrostatickým tlakem p vede k následujícímu systému dvou diferenciálních rovnic:¹⁾

a) rovnice rovnováhy elementu střednicové plochy ve směru normály

$$(1) \quad D \Delta \Delta w - \Psi_{,22} w_{,11} - \Psi_{,11} w_{,22} + 2\Psi_{,12} (a\kappa + w_{,12}) + pa^4 = 0,^2)$$

¹⁾ Odvození rovnic viz [3].

²⁾ u, v, w – složky vektoru přemístění střednicové plochy – obr. 1,

$f(x, \beta)_{,1} = \partial f(x, \beta) / \partial \alpha, \quad f(x, \beta)_{,2} = \partial f(x, \beta) / \partial \beta.$

b) rovnice kompatibility

$$(2) \quad \frac{1}{Et} \Delta \Delta \Psi = w_{,12}^2 - w_{,11} w_{,22} + 2\alpha \kappa w_{,12},$$

$$\Delta w = w_{,11} + w_{,22}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Vnitřní síly a momenty skořepiny jsou dány vztahy

$$(3) \quad T_{11} = \frac{1}{a^2} \Psi_{,22}, \quad T_{12} = -\frac{1}{a^2} \Psi_{,12}, \quad N_1 = -\frac{D}{a^3} \Delta w_{,1},$$

$$M_{11} = -\frac{D}{a^2} (w_{,11} + \mu w_{,22}), \quad M_{12} = -\frac{D}{a^2} (1 - \mu) w_{,12}. \quad \Leftrightarrow^3)$$

Skořepinu pokládáme za plochou, jestliže platí $(L/R)^2 \ll 1$, L – charakteristický rozměr skořepiny ($L = 2a$), R – minimální poloměr křivosti ($R = a/\kappa$).

Pro náš případ vychází nerovnost $4\kappa^2 \ll 1$.

2. INTEGRACE ROVNICE KOMPATIBILITY

Systém dvou diferenciálních rovnic (1) a (2) začneme řešit od rovnice kompatibility.

Jelikož zatížení i konstrukci předpokládáme symetrickými k osám I–I', II–II', uvažujeme i přetvoření skořepiny takto symetrické. Předpokládejme dále, že průhyb w je aproximován výrazem

$$(4) \quad w = \sum_{i,j=0}^m f_{ij} c_i(\alpha) c_j(\beta) + g_{ij} s_i(\alpha) s_j(\beta),$$

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad g_{ij} = g_{ji},$$

f_{ij}, g_{ij} – jsou dosud neznámí součinitelé ($c_i(\alpha) = \cos \frac{1}{2} i \pi \alpha$, $s_i(\alpha) = \sin \frac{1}{2} i \pi \alpha$).

Obecné řešení rovnice (2) hledejme ve tvaru $\Psi = \Psi^p + \Psi^0$, Ψ^p – partikulární řešení nehomogenní rovnice, Ψ^0 – obecné řešení homogenní rovnice.

Partikulární řešení lze po úpravách vyjádřit takto:

$$(5) \quad \Psi^p = Et \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=0}^m i l (j k - i l) (f_{ij} f_{kl} + g_{ij} g_{kl}).$$

$$\left[\frac{c_{i-k}(\alpha) c_{j-l}(\beta)}{[(i-k)^2 + (j-l)^2]^2} + \frac{c_{i+k}(\alpha) c_{j+l}(\beta)}{[(i+k)^2 + (j+l)^2]^2} \right] -$$

³⁾ \Leftrightarrow – vztah je platný i při záměně $\alpha \Leftrightarrow \beta$, $1 \Leftrightarrow 2$.

$$\begin{aligned}
& - il(jk + il) (f_{ij}f_{kl} - g_{ij}g_{kl}) . \\
& \cdot \left[\frac{c_{i-k}(\alpha) c_{j+l}(\beta)}{[(i-k)^2 + (j+l)^2]^2} + \frac{c_{i+k}(\alpha) c_{j-l}(\beta)}{[(i+k)^2 + (j-l)^2]^2} \right] - \\
& - f_{ij} g_{kl} (kj - il)^2 . \\
& \cdot \left[\frac{s_{i-k}(\alpha) s_{j-l}(\beta)}{[(i-k)^2 + (j-l)^2]^2} + \frac{s_{i+k}(\alpha) s_{j+l}(\beta)}{[(i+k)^2 + (j+l)^2]^2} \right] + \\
& + f_{ij} g_{kl} (kj + il)^2 . \\
& \cdot \left[\frac{s_{i-k}(\alpha) s_{j+l}(\beta)}{[(i-k)^2 + (j+l)^2]^2} + \frac{s_{i+k}(\alpha) s_{j-l}(\beta)}{[(i+k)^2 + (j-l)^2]^2} \right] + \\
& + Et a \alpha \frac{8}{\pi^2} \sum_{i,j=0}^m \frac{ij}{(i^2 + j^2)^2} [f_{ij} s_i(\alpha) s_j(\beta) + g_{ij} c_i(\alpha) c_j(\beta)] .
\end{aligned}$$

Výrazy, jejichž jmenovatelé se pro některé hodnoty i, j, k, l anulují, je třeba položit rovny nule.

Obecné řešení aproximujme biharmonickým výrazem

$$\Psi^0 = Et \left[\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} F_{ij}(\alpha, \beta) + \alpha_{01}(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha_{02}\alpha\beta \right] ,$$

$\alpha_{ij}, \alpha_{01}, \alpha_{02}$ – neurčití součinitelé,

$$\begin{aligned}
F_{1i}(\alpha, \beta) &= \text{ch}_i(\alpha) c_i(\beta) + \text{ch}_i(\beta) c_i(\alpha) , \\
F_{2i}(\alpha, \beta) &= \text{ch}_i(\alpha) \frac{1}{2} i \pi \beta s_i(\beta) + \text{ch}_i(\beta) \frac{1}{2} i \pi \alpha s_i(\alpha) , \\
F_{3i}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} i \pi \alpha \text{sh}_i(\alpha) c_i(\beta) + \frac{1}{2} i \pi \beta \text{sh}_i(\beta) c_i(\alpha) , \\
F_{4i}(\alpha, \beta) &= \text{sh}_i(\alpha) s_i(\beta) + \text{sh}_i(\beta) s_i(\alpha) , \\
F_{5i}(\alpha, \beta) &= \text{sh}_i(\alpha) \frac{1}{2} i \pi \beta c_i(\beta) + \text{sh}_i(\beta) \frac{1}{2} i \pi \alpha c_i(\alpha) , \\
F_{6i}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} i \pi \alpha \text{ch}_i(\alpha) s_i(\beta) + \frac{1}{2} i \pi \beta \text{ch}_i(\beta) s_i(\alpha) , \\
(\text{ch}_i(\alpha) &= \cosh \frac{1}{2} i \pi \alpha, \text{sh}_i(\alpha) = \sinh \frac{1}{2} i \pi \alpha) .
\end{aligned}$$

Jak se lze snadno přesvědčit, napjatost vypočtená z funkce napětí splňuje podmínky symetrie k osám I–I', II–II'

$$\begin{aligned}
T_{11}(\alpha, \beta) &= T_{22}(\beta, \alpha) , \quad T_{11}(\alpha, -\beta) = T_{22}(\beta, -\alpha) , \\
T_{12}(\alpha, \beta) &= T_{12}(\beta, \alpha) , \quad T_{12}(\alpha, -\beta) = T_{12}(\beta, -\alpha) .
\end{aligned}$$

3. VÝPOČET TANGENCIÁLNÍCH SLOŽEK PŘEMÍSTĚNÍ STŘEDNICOVÉ PLOCHY

Tangenciální posuvy střednicové plochy odpovídající obecnému řešení rovnice (2) získáme integrací geometrických rovnic, které v našem případě mají tvar

$$(7) \quad (a) \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{a} u_{,1} + \frac{1}{2a^2} w_{,1}^2,$$

$$(b) \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{a} v_{,2} + \frac{1}{2a^2} w_{,2}^2,$$

$$(c) \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{a} u_{,2} + \frac{1}{a} v_{,1} - 2 \frac{z}{a} w + \frac{1}{a^2} w_{,1} w_{,2}.$$

Za levé strany dosadíme

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{Eta^2} (\Psi_{,22} - \mu \Psi_{,11}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{Eta^2} (\Psi_{,11} - \mu \Psi_{,22}),$$

$$2\varepsilon_{12} = - \frac{2(1 + \mu)}{Eta^2} \Psi_{,12}.$$

Integrací (7a, b) obdržíme, přihlédneme-li k symetrii,

$$(8) \quad u(\alpha, \beta) = \frac{1}{Eta} \int (\Psi(\alpha, \beta)_{,22} - \mu \Psi(\alpha, \beta)_{,11}) d\alpha - \frac{1}{2a} \int w(\alpha, \beta)_{,1}^2 d\alpha + \varphi(\beta),$$

$$v(\alpha, \beta) = \frac{1}{Eta} \int (\Psi(\alpha, \beta)_{,11} - \mu \Psi(\alpha, \beta)_{,22}) d\beta - \frac{1}{2a} \int w(\alpha, \beta)_{,2}^2 d\beta + \varphi(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ – integrační funkce, kterou určíme dosazením (8) do (7c). Po delším výpočtu obdržíme

$$\varphi'(\alpha) + \varphi'(\beta) = - \frac{2}{a} (1 + \mu) \alpha_{02}.$$

Z toho plyne

$$\varphi(\alpha) = - \frac{1 + \mu}{a} \alpha_{02} \alpha.$$

Vzorce pro posuvy u a v po dosazení příslušných funkcí mají tvar

$$(9) \quad u(\alpha, \beta) \frac{a}{\pi} = \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l=0}^m (f_{ij} f_{kl} + g_{ij} g_{kl}) il(il - jk) \cdot$$

$$\cdot [A_{i-k,j-l} s_{i-k}(\alpha) c_{j-l}(\beta) + A_{i+k,j+l} s_{i+k}(\alpha) c_{j+l}(\beta)] +$$

$$+ (f_{ij} f_{kl} - g_{ij} g_{kl}) il(jk + il) \times$$

$$\times [A_{i-k,j+l} s_{i-k}(\alpha) c_{j+l}(\beta) + A_{i+k,j-l} s_{i+k}(\alpha) c_{j-l}(\beta)] -$$

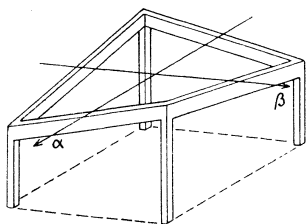
$$\begin{aligned}
& - f_{ij} g_{kl} (kj - il)^2 [A_{i-k, j-l} c_{i-k}(\alpha) s_{j-l}(\beta) + A_{i+k, j+l} c_{i+k}(\alpha) s_{j+l}(\beta)] + \\
& + f_{ij} g_{kl} (kj + il)^2 [A_{i-k, j+l} c_{i-k}(\alpha) s_{j+l}(\beta) + A_{i+k, j-l} c_{i+k}(\alpha) s_{j-l}(\beta)] - \\
& - (f_{ij} f_{kl} + g_{ij} g_{kl}) \frac{ik}{16} \left[\frac{1}{i-k} s_{i-k}(\alpha) c_{j-l}(\beta) - \frac{1}{i+k} s_{i+k}(\alpha) c_{j+l}(\beta) \right] - \\
& - (f_{ij} f_{kl} - g_{ij} g_{kl}) \frac{ik}{16} \left[\frac{1}{i-k} s_{i-k}(\alpha) c_{j+l}(\beta) - \frac{1}{i+k} s_{i+k}(\alpha) c_{j-l}(\beta) \right] - \\
& - f_{ij} g_{kl} \frac{ik}{8} \left[\frac{1}{i+k} c_{i+k}(\alpha) + \frac{1}{i-k} c_{i-k}(\alpha) \right] [s_{j+l}(\beta) - s_{j-l}(\beta)] + \\
& + a\alpha \frac{4}{\pi^2} \sum_{i,j=0}^m ij A_{i,j} [f_{ij} c_i(\alpha) s_j(\beta) - g_{ij} s_i(\alpha) c_j(\beta)] + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \left(\int F_{ij}(\alpha, \beta)_{,22} d\alpha - \mu F_{ij}(\alpha, \beta)_{,1} \right) + \\
& + \frac{2}{\pi} (1 - \mu) \alpha_{01} \alpha - \frac{1}{\pi} (1 + \mu) \alpha_{02} \beta, \quad \Leftrightarrow \\
& A_{p,q} = \frac{1}{p} \frac{q^2 - \mu p^2}{(p^2 + q^2)^2}.
\end{aligned}$$

Výrazy, jejichž jmenovatelé se pro některé hodnoty i, j, k, l anulují, je třeba položit rovny nule, vyjma výraz $1/p \cdot s_p(\alpha)|_{p=0} = \frac{1}{2}\pi\alpha$. Vypočtené posuny splňují podmínky symetrie

$$u(\alpha, \beta) = v(\beta, \alpha), \quad u(\alpha, -\beta) = -v(\beta, -\alpha).$$

4. OKRAJOVÉ PODMÍNKY ROVNICE KOMPATIBILITY

Uvažujme skořepinu podepřenou rámovou konstrukcí dle obr. 2.



Obr. 2.

Vzhledem k symetrii konstrukce stačí stanovit následující okrajové podmínky pro $\alpha = +1$

$$(10) \quad \begin{aligned} u(1, \beta) + u_R(\beta) &= 0, \\ v(1, \beta) + v_R(\beta) &= 0, \end{aligned}$$

$u(1, \beta), v(1, \beta)$ – tangenciální složky posunu okraje střednicové plochy, které získáme z (9); jsou funkcemi parametrů $\alpha_{ij}, f_{ij}, g_{ij}$;

$u_R(\beta), v_R(\beta)$ – složky posunu rámové konstrukce v místě připojení skořepiny; jejich kladný smysl volíme opačně než u složek posuvů skořepiny; jsou rovněž funkcemi parametrů $\alpha_{ij}, f_{ij}, g_{ij}$, jak bude patrné z dalšího.

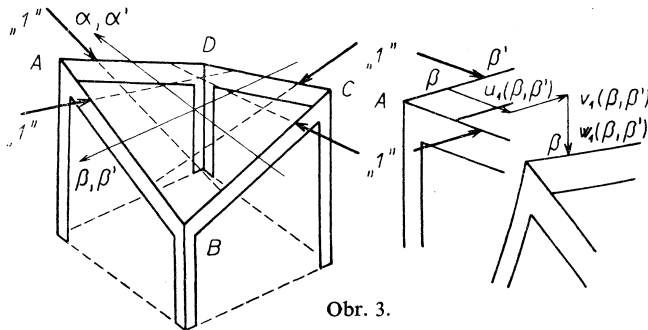
Na rámovou konstrukci působí jednak vnitřní síly od skořepiny a jednak zatížení působící přímo na ni. Posunutí rámu v místě připojení skořepiny můžeme tedy vyjádřit takto:

$$(11) \quad u_R(\beta) = \int_{-1}^{+1} T_{11}(\beta') u_1(\beta, \beta') a d\beta' + \int_{-1}^{+1} T_{12}(\beta') u_2(\beta, \beta') a d\beta' + \\ + \int_{-1}^{+1} \left[N_1(\beta') - \frac{1}{a} M_{12}(\beta')_{,2} \right] u_3(\beta, \beta') a d\beta' + \\ + \int_{-1}^{+1} M_{11}(\beta') u_4(\beta, \beta') a d\beta' + u_0(\beta), \\ v_R(\beta) = \int_{-1}^{+1} T_{11}(\beta') v_1(\beta, \beta') a d\beta' + \int_{-1}^{+1} T_{12}(\beta') v_2(\beta, \beta') a d\beta' + \\ + \int_{-1}^{+1} \left[N_1(\beta') - \frac{1}{a} M_{12}(\beta')_{,2} \right] v_3(\beta, \beta') a d\beta' + \\ + \int_{-1}^{+1} M_{11}(\beta') v_4(\beta, \beta') a d\beta' + v_0(\beta),$$

$u_i(v_i)$ – příčinkové funkce posunutí ve směru $\alpha(\beta)$ pro příslušné síly a momenty; jejich kladný smysl je stejný jako pro složky posunutí rámu;

$u_0(v_0)$ – složky posunutí od zatížení, které působí přímo na rámovou konstrukci (vlastní váha).

Na příklad:



Obr. 3.

Rovnice (10) upravíme tak, že výrazy pro posuny rozdělíme na část odpovídající jednotlivým biharmonickým funkcím řešení $\Psi^0(u_{ij}^0, u_{Rij}^0; v_{ij}^0, v_{Rij}^0)$ a na část odpovídající řešení $\Psi^p(u^p, u_R^p; v^p, v_R^p)$, takže okrajové podmínky můžeme psát ve tvaru

$$(12) \quad \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} [u_{ij}^0(\beta) + u_{Rij}^0(\beta)] + u^p(\beta; f_{ij}, g_{ij}) + u_R^p(\beta; f_{ij}, g_{ij}) = 0, \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} [v_{ij}^0(\beta) + v_{Rij}^0(\beta)] + v^p(\beta; f_{ij}, g_{ij}) + v_R^p(\beta; f_{ij}, g_{ij}) = 0,$$

kde na příklad

$$u(1, \beta) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} u_{ij}^0(\beta) + u^p(\beta; f_{ij}, g_{ij}),$$

$$v_R(\beta) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_{Rij}^0(\beta) + v_R^p(\beta; f_{ij}, g_{ij}).$$

Funkce v rovnicích (10) rozvedeme ve Fourierovy řady a porovnáním součinitelů u goniometrických funkcí obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic pro α_{ij} .

5. ŘEŠENÍ ROVNICE ROVNOVÁHY

Diferenciální rovnici rovnováhy (1) budeme řešit přibližně Galerkinovou metodou, která v našem případě vede k rovnici

(13)

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [D \Delta \Delta w - \Psi_{,22} w_{,11} - \Psi_{,11} w_{,22} + 2\Psi_{,12}(a\kappa + w_{,12}) + pa^4] \delta w \, d\alpha \, d\beta +$$

$$+ 4 \int_{-1}^{+1} \left[\left(N - N_1 + \frac{1}{a} M_{12,2} \right)^* \delta w - (M - M_{11})^* \frac{1}{a} \delta w_{,1} \right] a^3 \, d\beta = 0.$$

Výrazy v kulatých závorkách označené hvězdičkou, položíme-li rovny nule, představují okrajové podmínky rovnice rovnováhy pro okraj $\alpha = +1$.

$N(\beta), M(\beta)$ – jsou taková zatížení rámové přičle, která odpovídají okrajovým hodnotám průhybu daného výrazem (4).

Tyto veličiny můžeme stanovit z následujících rovnic pro přetvoření rámu

$$(14) \quad w_R(\beta) = \int_{-1}^{+1} T_{11}(\beta') w_1(\beta, \beta') a \, d\beta' + \int_{-1}^{+1} T_{12}(\beta') w_2(\beta, \beta') a \, d\beta' +$$

$$+ \int_{-1}^{+1} N(\beta') w_3(\beta, \beta') a \, d\beta' + \int_{-1}^{+1} M(\beta') w_4(\beta, \beta') a \, d\beta' + w_0(\beta),$$

$$\vartheta_R(\beta) = \int_{-1}^{+1} T_{11}(\beta') \vartheta_1(\beta, \beta') a \, d\beta' + \int_{-1}^{+1} T_{12}(\beta') \vartheta_2(\beta, \beta') a \, d\beta' +$$

$$+ \int_{-1}^{+1} N(\beta') \vartheta_3(\beta, \beta') a \, d\beta' + \int_{-1}^{+1} M(\beta') \vartheta_4(\beta, \beta') a \, d\beta' + \vartheta_0(\beta),$$

w_R, ϑ_R – výsledný posun a pootočení rámu,

w_i, ϑ_i – příčinkové funkce posunu a pootočení,

w_0, ϑ_0 – vliv zatížení působícího přímo na rámovou konstrukci.

Mezi příčinkovými funkcemi, užitými v (11) a (14), platí podle Maxwellovy věty o vzájemnosti přetvoření vztahy

$$w_1(\beta, \beta') = u_3(\beta', \beta), \quad w_2(\beta, \beta') = v_3(\beta', \beta), \quad w_4(\beta, \beta') = \vartheta_3(\beta', \beta), \\ \vartheta_1(\beta, \beta') = u_4(\beta', \beta), \quad \vartheta_2(\beta, \beta') = v_4(\beta', \beta), \quad u_2(\beta, \beta') = v_1(\beta', \beta).$$

Předpokládajíc průhyb ve tvaru (4), známe w_R , ϑ_R a můžeme stanovit T_{11} , T_{22} , T_{12} . Funkce $N(\beta')$, $M(\beta')$ rozvedeme ve Fourierovu řadu s neznámými koeficienty a poté provedeme naznačené integrování v obou rovnicích. Funkce proměnné β vyskytující se v rovnicích (14) rozvedeme ve Fourierovu řadu a porovnáním součinitelů u goniometrických funkcí obdržíme systém rovnic pro neznámé koeficienty rozvoje funkcí $N(\beta')$ a $M(\beta')$.

Dosadíme-li příslušné funkce do rovnice (13) a provedeme-li integrování, rozpadne se nám tato na systém nelineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty f_{ij} , g_{ij} . Tím je řešení našeho problému skončeno.

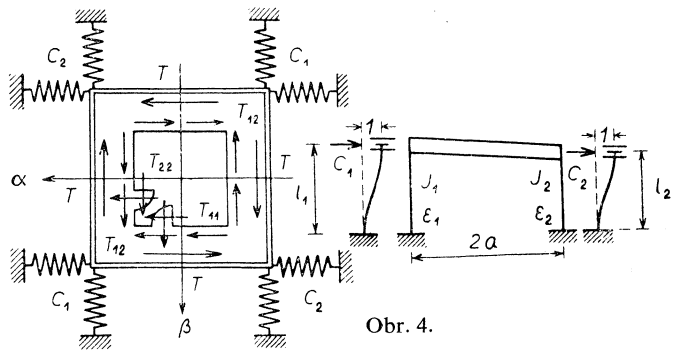
B. KONKRÉTNÍ VÝPOČET

6. IDEALISACE RÁMOVÉ KONSTRUKCE

Jelikož výpočet za zcela obecných předpokladů, jak byl uveden v odd. A, je velmi obtížný, provedeme taková zjednodušení okrajových podmínek, která nám umožní prakticky naši úlohu řešit. Předpokládejme, že skořepina je podepřena rámovou konstrukcí, jejíž rámová příčel je nestlačitelná, ve svislé rovině dokonale ohybově tuhá, ve vodorovné rovině dokonale ohebná a jejíž tuhost na kroucení je nulová. Působení sloupů, které předpokládáme ohybově pružné a nestačitelné, idealisujeme pery podle obr. 4.

Vzorce pro perové konstanty C_1 a C_2

$$C_1 = \frac{12EJ_1}{l_1^3} \frac{1 + \frac{EJ_1}{l_1} \varepsilon_1}{1 + 4 \frac{EJ_1}{l_1} \varepsilon_1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \varepsilon_1, \varepsilon_2 - \text{míry vetknutí sloupců,} \\ J_1, J_2 - \text{momenty setrvačnosti sloupů.} \end{array}$$



Obr. 4.

Okrajové podmínky skořepiny, odpovídající naší idealisované konstrukci, jsou

$$(15) \quad w(1, \beta) = 0, \quad M_{11}(1, \beta) = 0,$$

$$(16) \quad T_{11}(1, \beta) = 0, \quad \Delta(\beta) = v(1, \beta),$$

$\Delta(\beta)$ – posun rámové podpory ve směru osy β .

Průhyb předpokládejme aproximován výrazem

$$(17) \quad w(\alpha, \beta) = f_{11} c_1(\alpha) c_1(\beta) + f_{33} c_3(\alpha) c_3(\beta),^4$$

který splňuje okrajové podmínky (15).

Rámová příčle je zatížena ve své ose smykovými silami, které vyvolají její přetvoření (je-li stlačitelná) a její posun jako celek. Vzorec pro přemístění bodů takto zatížené příčle se dá snadno odvodit; má následující tvar:

$$\Delta(\beta) = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1 + \beta}{EF} a \right) \cdot \frac{\frac{C_2}{a} \int_{-1}^{+1} \Psi(1, \beta)_{,12} d\beta + \frac{C_1 C_2}{EF} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{\beta} \Psi(1, \beta')_{,12} d\beta' d\beta}{C_1 + C_2 + 2a \frac{C_1 C_2}{EF}} -$$

$$- \frac{1 + \beta}{EF} \int_{-1}^{\beta} \Psi(1, \beta')_{,12} d\beta' + \frac{1}{EF} \int_{-1}^{\beta} \int_{\beta'}^{\beta} \Psi(1, \beta'')_{,12} d\beta'' d\beta',$$

F – průřezová plocha příčle.

Zanedbáme-li vliv stlačitelnosti ($EF \rightarrow \infty$), pak předchozí vzorec se zjednoduší na tvar

$$(18) \quad \Delta = -\frac{T}{2C}, \quad C = \frac{1}{2}(C_1 + C_2), \quad T = -\frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \Psi(1, \beta)_{,12} d\beta.$$

Jestliže $C \rightarrow 0$, pak s ohledem na rovnováhu příčle musí platit $T \rightarrow 0$. Výraz pro Δ (18) se stává neurčitým a okrajovou podmínku (16) nahradíme podmínkou $v(1, \beta) = k$, kde k je neznámá konstanta, kterou určíme z rovnice $T = 0$.

7. ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC (1) A (2)

Funkci napětí získáme přímo ze vzorců (5) a (6)

$$(19) \quad \Psi(\alpha, \beta) = Et \left[-\frac{1}{32} f_{11}^2 (c_2(\alpha) + c_2(\beta)) - \frac{1}{32} f_{33}^2 (c_6(\alpha) + c_6(\beta)) - \right.$$

$$- \frac{9}{400} f_{11} f_{33} (c_2(\alpha) c_4(\beta) + c_4(\alpha) c_2(\beta)) +$$

$$+ a\kappa \frac{2}{\pi^2} \left(f_{11} s_1(\alpha) s_1(\beta) + \frac{1}{9} f_{33} s_3(\alpha) s_3(\beta) \right) +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} F_{ij}(\alpha, \beta) + \alpha_{01}(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha_{02}\alpha\beta \right].$$

⁴⁾ Sinové členy z (4) nebyly ve výrazu (17) zahrnuty, neboť pro $\kappa \rightarrow 0$ jejich vliv klesá k nule.

Tangenciální složky přemístění bodů střednicové plochy obdržíme z výrazu (9)

$$\begin{aligned}
 (20) \quad u(\alpha, \beta) = & \frac{\pi}{a} \left\{ \frac{1}{32} f_{11}^2 s_2(\alpha) c_2(\beta) + \frac{3}{32} f_{33}^2 s_6(\alpha) c_6(\beta) - \right. \\
 & - f_{11} f_{33} \left[\mu \frac{9}{400} (s_2(\alpha) c_4(\beta) + 2s_4(\alpha) c_2(\beta)) + \frac{39}{400} s_2(\alpha) c_4(\beta) - \right. \\
 & - \left. \frac{21}{200} s_4(\alpha) c_2(\beta) + \frac{3}{16} s_2(\alpha) c_2(\beta) - \frac{3}{32} s_4(\alpha) c_4(\beta) \right] + \\
 & + \frac{1-\mu}{32} (f_{11}^2 s_2(\alpha) + 3f_{33}^2 s_6(\alpha)) - \frac{\pi}{32} (f_{11}^2 + 9f_{33}^2) \alpha + \\
 & + a\kappa \frac{1-\mu}{\pi^2} \left(f_{11} c_1(\alpha) s_1(\beta) + \frac{1}{3} f_{33} c_3(\alpha) s_3(\beta) \right) + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left(\int F_{ij}(\alpha, \beta)_{,22} d\alpha - \mu F_{ij}(\alpha, \beta)_{,1} \right) + \\
 & + \left. \frac{2}{\pi} (1-\mu) \alpha_{01} \alpha - \frac{1+\mu}{\pi} \alpha_{02} \beta \right\}. \quad \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Dosadíme-li příslušné funkce do okrajových podmínek (16), pak způsobem, uvedeným v kap. 4, získáme systém lineárních algebraických rovnic pro neznámé součinitele α_{ij} .⁵⁾ Tento systém rovnic byl řešen pro $\mu = 0,15$ (beton) a výsledky jsou uvedeny v [3].

Napjatost skořepiny vychází jako součet napjatosti desky při velkém průhybu a napjatosti, která je úměrná parametru zakřivení plochy κ . Na příklad síla $T_{12}(1, \beta)$:

$$T_{12}(1, \beta) = \text{[obrázek: napjatost desky při velkém průhybu]} + a\kappa \text{[obrázek: napjatost úměrná parametru zakřivení plochy]}$$

Obr. 5.

Dosadíme-li průhyb ve tvaru (17) a funkci napětí ve tvaru (19) s vypočítanými součiniteli α_{ij} do rovnice (13), rozpadne se nám tato na dvě algebraické rovnice třetího stupně pro neznámé parametry f_{11}, f_{33} . Zavedeme-li označení

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{f}{t}, & \varrho &= \frac{pa^4}{Et^4}, \\
 f_{11} &= -f_1 t, & f_{33} &= -f_3 t,
 \end{aligned}$$

⁵⁾ Konvergenci Fourierových řad lze urychlit metodou A. N. KRYLOVA. (B. И. Смирнов: Курс высшей математики, дил II.)

obdržíme po jistých úpravách tyto dvě rovnice:

$$(21) \quad f_3^3 - 0,03571f_1f_3 + (1,486 + 0,005911\omega^2 + 0,07015f_1^2)f_3 - (0,002037 - 0,001245\omega^2 + 0,004764f_1^2)f_1 = 0,$$

$$(22) \quad \varrho = 0,5886f_1^3 - 0,8384f_1^2f_3 + 3,835f_1f_3^2 - 1,223f_3^3 + \left(\begin{matrix} 1,281 & + & 0,1278 \\ & + & 0,5268 \end{matrix} \omega^2 \right) f_1 + \begin{matrix} 0,1458 \\ + & 0,09827 \end{matrix} \omega^2 f_3.$$

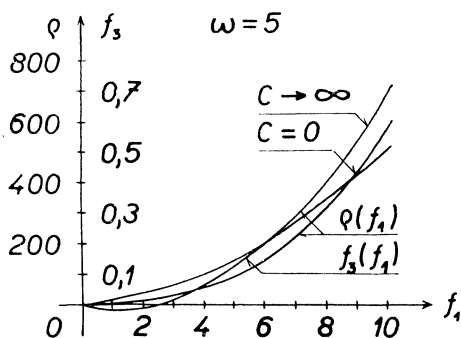
Horní hodnoty jsou vypočteny pro $C \rightarrow 0$, dolní pro $C \rightarrow \infty$.

Závislost zatížení na parametrech průhybu stanovíme tak, že volíme hodnoty f_1 , k nim z rovnice (21) vypočteme f_3 a hodnoty obou parametrů dosazené do (22) nám dávají příslušné zatížení ϱ .

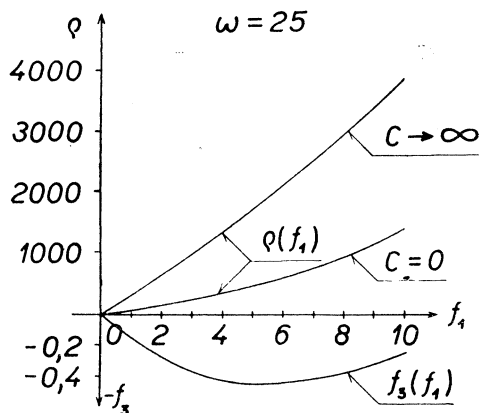
10. ZÁVĚR

Z rovnic (21) a (22) byly získány pro různé hodnoty ω závislosti $f_3(f_1)$ a $\varrho(f_1)$ a to pro limitní případy $C \rightarrow 0$ a $C \rightarrow \infty$. Pro ilustraci jsou na obr. 6 a 7 znázorněna řešení pro $\omega = 5$ a $\omega = 25$. Celkově můžeme výsledky řešení shrnout do několika bodů:

a) Předpokládáme-li průhyb ve tvaru (17), pak se skořepina přetváří i při velkých průhybech stabilně.



Obr. 6.



Obr. 7.

b) Se vzrůstající hodnotou ω vzrůstá vliv tuhosti sloupů na přetvoření a napjatost skořepiny.

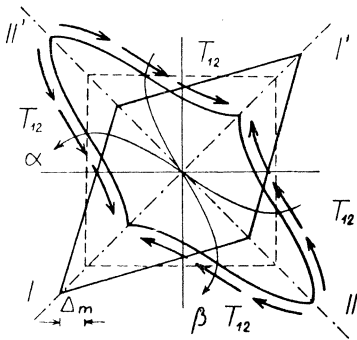
c) Pro dané ω a vzrůstající průhyby, tak jak se skořepina postupně mění v membránu, klesá vliv tuhosti sloupů.

d) $w(\alpha, \beta; p) = -w(\alpha, -\beta; -p)$, takže křivka $\varrho(w(0, 0))$ má v bodě $\varrho = 0$ inflexní bod.

e) Funkce $f_3(f_1)$ nezávisí na tuhosti sloupů.

f) Přetvoření skořepiny počítané podle membránové teorie se podstatně liší od skutečného přetvoření i za předpokladu malých průhybů.

Membránová napjatost je dána vzorcí



Obr. 8.

$$(23) \quad T_{11}^m = T_{22}^m = 0, \quad T_{12}^m = \frac{pa}{2\kappa}.$$

Z rovnic (7) a (23) plyne

$$\frac{1}{a} u_{,1} = \varepsilon_{11} = 0,$$

$$\frac{1}{a} v_{,2} = \varepsilon_{22} = 0,$$

$$\frac{1}{a} u_{,2} + \frac{1}{a} v_{,1} - 2 \frac{\kappa}{a} w = 2\varepsilon_{12} = \frac{2(1 + \mu)}{Et} T_{12}^m.$$

Integrací předchozích rovnic, přihlédneme-li k symetrii deformace vzhledem k osám I–I', II–II' a okrajové podmínce $w(1, \beta) = 0$, obdržíme

$$u(\alpha, \beta) = \frac{1 + \mu}{2Et} \frac{a^2}{\kappa} p\beta, \quad \Leftrightarrow \quad w(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad \Delta_m = \frac{1 + \mu}{2Et} \frac{a^2}{\kappa} p.$$

Přetvoření, vypočtené z rovnice (20) a přetvoření, odpovídající membránové napjatosti, jsou znázorněna na obr. 8. Za parametry konstrukce byly vzaty jisté průměrné hodnoty.

g) Napjatost plochého hyperbolického paraboloidu, podepřeného podél přímkového okraje, je nutno počítat na základě ohybové teorie. Podle membránové teorie totiž pro $\kappa \rightarrow 0$ $T_{12}^m \rightarrow \infty$ a tím i $T \rightarrow \infty$. Ve skutečnosti však výslednice smykových sil T je funkcí tuhosti podpůrné rámové konstrukce a pro $C \rightarrow 0$ musí také $T \rightarrow 0$, viz obr. 5.

Seznam literatury

- [1] X. M. Муштару, К. З. Галимов: Нелинейная теория упругих оболочек; Казань 1957.
- [2] В. М. Шумягский: Таблицы для решения кубических уравнений методом основ; Москва 1950.
- [3] К. Bucháček: Příspěvek k nelineární teorii hyperbolického paraboloidu; Stavební fakulta ČVUT, Praha 1959.

Резюме

ЗАМЕТКА К ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

КАРЕЛ БУХАЧЕК (Karel Bucháček)

Работа занимается исследованием деформации пологой оболочки, имеющей форму гиперболического параболоида квадратного плана подпертой пространственной рамной конструкцией и нагруженной равномерным гидростатическим давлением. В первой части работы излагается метод определения деформации упруго подпертой оболочки, в то время как вторая часть посвящена конкретному решению с учетом упрощенной схемы упругой опоры при сохранении некоторых общих параметров конструкции. Результаты работы показывают, что конструкция этого рода является устойчивой, и что употребляемая на практике мембранная теория не дает, особенно в случае пологих оболочек, хороших результатов.

Summary

A CONTRIBUTION TO THE GEOMETRICAL NONLINEAR THEORY OF HYPERBOLIC PARABOLOIDAL SHELLS

KAREL BUCHÁČEK

The paper deals with a computation of strain in a shallow hyperbolic paraboloidal shell of a square ground plan, supported by a space frame construction, and loaded by uniformly distributed hydrostatic pressure. The first part of the paper is devoted to a general method of determination of the stress and strain in the shell; the second part deals with a concrete solution of the problem on the supposition of simplified boundary conditions and preserving some general parameters of the construction. The results of the paper demonstrate that the shell deflects stably, and that the membrane theory gives wrong results in practise, especially for shallow shells.

Adresa autora: Karel Bucháček, Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.