Jiří Klír

Poznámka k teorii binárních kódů

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 4, 306–309

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102906

POZNÁMKA K TEORII BINÁRNÍCH KÓDŮ

JIŘÍ KLÍR

(Došlo dne 27. září 1963.)

V příspěvku jsou odvozeny vztahy pro maximální délku binárního kódu o n řádech, který současně splňuje vlastnosti Korobovova kódu a kódu se změnou v p řádech.

1. Binárním kódem budeme nazývat posloupnost $\{A_i\}$ vzájemně různých binárních čísel A_i $(i = 1, 2, \ldots, L)$, z nichž každé obsahuje n binárních číslic které označíme ${}^k a_i$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Počet čísel A_i v posloupnosti $\{A_i\}$ budeme značit L a nazývat délkou kódu. Mezi dvěma čísly binárního kódu zavedeme pojem vzdálenosti $d(A_i, A_j)$ vztahem

$$d(A_i, A_j) = \sum_{k=0}^{n-1} |{}^k a_i - {}^k a_j| . \tag{1}$$

2. Korobovovým kódem (K-kódem) budeme nazývat takový binární kód, u něhož je pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n - 2$ a pro všechna $i = 1, 2, \ldots, L - 1$ splněn vztah

$$ {}^{k+1} a_{i+1} = {}^k a_i . \tag{2}$$

Ze vztahu (2) a z definice binárních kódů vyplývá, že číslo A_{i+1} může být odvozeno z čísla A_i u K-kódů vždy nejvýše dvěma způsoby:

$$A_{i+1} \equiv \begin{cases} 2A_i & (\operatorname{mod} 2^n) , \\ 2A_i + 1 & (\operatorname{mod} 2^n) . \end{cases} \tag{3}$$

Z literatury (např. [1]) je známo, že pro maximální délku ${}^K L_{\max}$ Korobovových kódů platí

$$ {}^K L_{\max} = 2^n . \tag{4}$$

3. Kódem s pravidelnou změnou v p číslicích (p-kódem) budeme nazývat takový binární kód, u něhož je vztah

$$d(A_i, A_{i+1}) = p \tag{5}$$

splněn pro všechna $i = 1, 2, \ldots, L - 1$. Zvláštním případem p-kódů jsou Grayovy kódy ($p = 1$). Snadno lze odvodit, že u p-kódů je maximální délka ${}^{p}L_{\max}$ vyjádřena vztahy

$$
\begin{aligned}
&{}^{p}L_{\max} = 2^{n-1} \quad \text{pro} \quad p \leqq n - 1 \text{ a sudé}, \\
&{}^{p}L_{\max} = 2^{n} \quad \text{pro} \quad p \leqq n - 1 \text{ a liché}, \\
&{}^{p}L_{\max} = 2 \quad \text{pro} \quad p = n .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Důkaz tvrzení (6) přenecháváme čtenáři.

4. Uvažme kódy, které splňují vlastnosti K-kódů a současně i vlastnosti p-kódů. Označme takové kódy Kp a vyslovme větu o tom, jakou maximální délku ${}^{Kp}L_{\max}$ mohou tyto kódy dosáhnout.

Věta: a) ${}^{Kp}L_{\max} = n$ pro $p \leqq n - 1$ a sudé,
b) ${}^{Kp}L_{\max} = 2n$ pro $p \leqq n - 1$ a liché,
c) ${}^{Kp}L_{\max} = 2$ pro $p = n$.

Důkaz: Ze vztahu (3) vyplývá, že k danému A_i může u K-kódu existovat nejvýše jedno A_{i+1} takové, že

$$d(A_i, A_{i+1}) = p . \tag{7}$$

Pro existenci takového A_{i+1} je nutné, aby

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2} |{}^{k}a_i - {}^{k+1}a_i| = \left\langle \begin{matrix} p \\ p - 1 . \end{matrix} \right.$$

Jak vidíme, udává číslo Q počet změn v hodnotách sousedních řádů u čísla A_i.

a) Sudé p: Pro $Q = p$ (sudý počet změn u čísla A_i) je nutně ${}^{n-1}a_i = {}^{o}a_i$, pro $Q = p - 1$ (lichý počet změn u čísla A_i) je nutně ${}^{n-1}a_i \equiv {}^{o}a_i + 1 \pmod 2$. V obou případech je

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} |{}^{k}a_i - {}^{k+1(\mathrm{mod}\, n)}a_i| = p ,$$

takže vztahy (2) a (7) mohou být současně splněny tehdy a jen tehdy, zvolíme-li

$${}^{k+1(\mathrm{mod}\, n)}a_{i+1} = {}^{k}a_i \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1 .$$

Odtud již vyplývá tvrzení a).

b) Liché p: Pro $Q = p$ (lichý počet změn u čísla A_i) je nutně ${}^{n-1}a_k \equiv {}^{o}a_k + 1 \pmod 2$, takže $P = p + 1$. Pro $Q = p - 1$ (sudý počet změn u čísla A_i) je ${}^{n-1}a_k = {}^{o}a_k$, takže $P = p - 1$. Vztahy (2) a (7) mohou být současně splněny tehdy a jen tehdy, zvolíme-li

$$
\begin{aligned}
{}^{k+1}a_{i+1} &= {}^{k}a_i \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, \ldots, n - 2 , \\
{}^{o}a_{i+1} &\equiv {}^{n-1}a_i + 1 \pmod 2 .
\end{aligned}
$$

Odtud již vyplývá tvrzení b).

Důkaz tvrzení c) je triviální.

5. Pro ilustraci věty 1 uveďme jednoduché příklady Kp-kódů:

$$
\begin{array}{c}
k = 3\ 2\ 1\ 0 \\
\begin{array}{c} n = 4 \\ p = 1 \end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
A_1 = 0\ 0\ 0\ 0 \\
A_2 = 0\ 0\ 0\ 1 \\
A_3 = 0\ 0\ 1\ 1 \\
A_4 = 0\ 1\ 1\ 1 \\
A_5 = 1\ 1\ 1\ 1 \\
A_6 = 1\ 1\ 1\ 0 \\
A_7 = 1\ 1\ 0\ 0 \\
A_8 = 1\ 0\ 0\ 0
\end{array}
\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
k = 3\ 2\ 1\ 0 \\
\begin{array}{c} n = 4 \\ p = 3 \end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
A_1 = 1\ 0\ 1\ 0 \\
A_2 = 0\ 1\ 0\ 0 \\
A_3 = 1\ 0\ 0\ 1 \\
A_4 = 0\ 0\ 1\ 0 \\
A_5 = 0\ 1\ 0\ 1 \\
A_6 = 1\ 0\ 1\ 1 \\
A_7 = 0\ 1\ 1\ 0 \\
A_8 = 1\ 1\ 0\ 1
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
k = 3\ 2\ 1\ 0 \\
\begin{array}{c} n = 4 \\ p = 2 \end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
A_1 = 0\ 0\ 0\ 1 \\
A_2 = 0\ 0\ 1\ 0 \\
A_3 = 0\ 1\ 0\ 0 \\
A_4 = 1\ 0\ 0\ 0
\end{array}
\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
k = 4\ 3\ 2\ 1\ 0 \\
\begin{array}{c} n = 5 \\ p = 4 \end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
A_1 = 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \\
A_2 = 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
A_3 = 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
A_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
A_5 = 0\ 0\ 1\ 0\ 1
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Literatura

[1] *Svoboda A:* Užití Korobovovy posloupnosti u matematických strojů. Stroje na zpracování informací 3, 1955, Praha, NČSAV, str. 61—76.

Резюме

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ БИНАРНЫХ КОДОВ

ЙИРЖИ КЛИР (Jiří Klír)

Бинарным кодом разумеется последовательность $\{A_i\}$ двоичных чисел A_i порядка n. Цифры чисел A_i обозначены символами ${}^k a_i$, где k равно порядку. Длиной кода называется число членов последовательности $\{A_i\}$. Выведено, что максимальная длина кодов, которые удовлетворяют одновременно двум условиям

1) ${}^{k+1}a_{i+1} = {}^k a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, L - 1$ и для $k = 0, 1, \ldots, n - 2$,

2) $\sum_{k=0}^{n-1} |{}^k a_i - {}^k a_{i+1}| = p$ для $i = 1, 2, \ldots, L - 1$,

равна для $p \neq n$ или $2n$ (в случае нечетного p), или n (для четного p).

Summary

A NOTE TO THE THEORY OF BINARY CODES

JIŘÍ KLÍR

A binary code is defined by a sequence $\{A_i\}$ of binary numbers A_i with n places. The k-th binary digit of A_i is denoted by ${}^k a_i$. The number of terms in $\{A_i\}$ is called length of the code. Relations between n and maximal length are derived for codes which fulfil both the following conditions:

1. ${}^{k+1}a_{i+1} = {}^k a_i$ for $i = 1, 2, \ldots, L - 1$, and for $k = 0, 1, \ldots, n - 2$.
2. $\sum_{k=0}^{n-1} |{}^k a_i - {}^k a_{i+1}| = p$ for $i = 1, 2, \ldots, L - 1$.

For $p \neq n$, the maximal length of such codes is either $2n$ (for p odd) or n (for p even).

Adresa autora: Ing. *Jiří Klír* C. Sc., Výzkumný ústav matematických strojů, Malostranské nám. 25, Praha 1.