Petr Vaníček

Použití komplexních čísel k vyrovnání polygonových pořadů

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 3, 226–231

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102899`

POUŽITÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL K VYROVNÁNÍ POLYGONOVÝCH POŘADŮ

PETR VANÍČEK

(Došlo dne 26. září 1963.)

V článku je pomocí komplexních čísel odvozen jednoduchý algoritmus pro konformní vyrovnání a transformaci měřených vetknutých polygonových pořadů a rozdíl mezi takto vyrovnaným pořadem a pořadem vyrovnaným způsobem v geodetické praxi běžným.

FORMULACE ÚLOHY

Nechť jsou dány dvě neprázdné konečné množiny $M = \{Z_j\}_1^n$ a $\overline{M} = \{\overline{Z}_j\}_1^n$ komplexních čísel, při čemž $\overline{Z}_j = CZ_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, kde C je jisté komplexní číslo. Transformace $Z_j \to \overline{Z}_j = CZ_j$ je konformní v tom smyslu, že pro (stejně značené) obrazy komplexních čísel množin M a $\overline{M}$ v Gaussově rovině platí (při vhodné orientaci) $\sphericalangle Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{j_3} = \sphericalangle \overline{Z}_{j_1}\overline{Z}_{j_2}\overline{Z}_{j_3}$ pro všechna j_1, j_2, j_3 splňující podmínky $j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, n$ a $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_1$.

Násobení komplexních čísel (CZ_j) lze nahradit dvěma dílčími úkony:

a) Pootočením průvodiče násobence o argument násobitele – tj.

$$\arg \overline{Z}_j = \arg Z_j + \arg C .$$

b) Dilatací průvodiče – tj.

$$|\overline{Z}_j| = |C|\, |Z_j| .$$

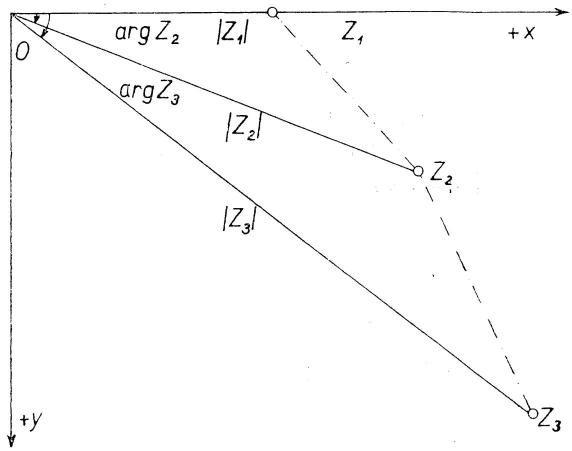
Této vlastnosti komplexních čísel lze velmi dobře využít k současnému proveden transformace i vyrovnání vetknutého polygonového pořadu.

OBECNÝ POSTUP

1) Mějme vetknutý polygonový pořad o vrcholech $P, 1, 2, \ldots, J, \ldots, N$, propočtený v pravoúhlé souřadnicové soustavě, v níž osa x je ve spojnici $P1$ orientovaná od bodu P k bodu 1 a osa y jde bodem P s orientací obvyklou v geodézii. V důsledku této volby souřadnicové soustavy je tedy pořad pootočen vzhledem k pořadu transfor-

movanému o jistý úhel, který dále určíme. Vrcholy vyrovnaného a transformovaného pořadu označme $\bar{P}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{J}, \ldots, \bar{N}$. Body P a $\bar{P}$ splývají s počátkem souřadnicové soustavy a bod $\bar{N}$ leží na kladné části osy x. Ve zvolené soustavě souřadnic nechť má bod J (resp. $\bar{J}$) souřadnice x_j, y_j (resp. $\bar{x}_j, \bar{y}_j$).

2) Každému polygonovému bodu J (resp. $\bar{J}$) přiřaďme komplexní číslo $Z_j = a_j + ib_j$ (resp. $\bar{Z}_j = \bar{a}_j + i\bar{b}_j$) vztahy $a_j = x_j$, $b_j = y_j$ (resp. $\bar{a}_j = \bar{x}_j$, $\bar{b}_j = \bar{y}_j$). Pořadu $P, 1, 2, \ldots, J, \ldots, N$ (resp. $\bar{P}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{J}, \ldots, \bar{N}$) je tak přiřazena množina komplexních čísel $0, Z_1, Z_2, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n$ (resp. $0, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \ldots, \bar{Z}_j, \ldots, \bar{Z}_n$). Obrazy těchto čísel v Gaussově rovině budeme značit stejně jako čísla sama (viz obr. 1).



Obr. 1.

3) Současné vyrovnání a transformaci proveďme pak zobrazením $Z_j \to CZ_j = \bar{Z}_j$, kde $C = A + iB$ je jisté komplexní číslo.

4) Číslo C určeme takto (viz obr. 2):

a) Úhel, který svírá polopřímka $P1$ s polopřímkou PN označme φ a položme pak

$$\arg C = -\varphi\,.$$

b) Absolutní hodnotu čísla C vypočtěme z rovnice

$$|Z_j|\,|C| = |\bar{Z}_j|\,.$$

5) Součin CZ_j rozepišme jako součin součtů reálných a imaginárních částí těchto komplexních čísel a proveďme naznačené úkony:

$$(1)\qquad CZ_j = (A + iB)(a_j + ib_j) = (Aa_j - Bb_j) + i\,(Ab_j + Ba_j)\,.$$

Součin CZ_j je podle původního předpokladu roven číslu $\bar{Z}_j$:

$$(2)\qquad CZ_j = \bar{Z}_j\,.$$

Číslo $\bar{Z}_j$ napišme jako součet reálné a imaginární části:

$$(3)\qquad \bar{Z}_j = \bar{a}_j + i\bar{b}_j\,.$$

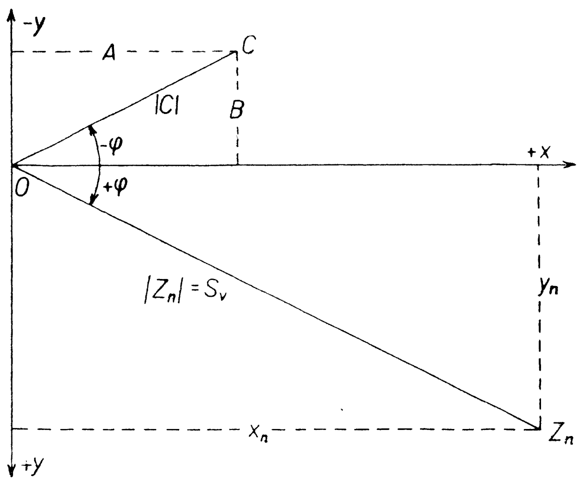
Porovnáním rovnic (1), (2) a (3) dostáváme výrazy pro reálnou a imaginární část čísla $\bar{Z}_j$ vyjádřené jako rozdíl a součet součinů reálných a imaginárních částí čísel C a Z_j:

$$\bar{a}_j = Aa_j - Bb_j\,, \quad \bar{b}_j = Ab_j + Ba_j\,.$$

6) Body $\bar{Z}_j$ jsou obrazy vrcholových bodů vyrovnaného a transformovaného pořadu. Bude tudíž podle odstavce 2) platit $\bar{x}_j = \bar{a}_j$, $\bar{y}_j = \bar{b}_j$.

PRAKTICKÉ ŘEŠENÍ

Správnou vzdálenost obou daných bodů nazvěme S_o. Vzdálenost prvního a posledního bodu pořadu vypočtenou ze souřadnic x_n, y_n označme S_v $(S_v = \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$. Části komplexního čísla jsou (podle obr. 2) dány rovnicemi $A = |C| \cos \arg C$, $B = |C| \sin \arg C$. Podle stanovených podmínek musí platit, že $\arg C = -\varphi$. Absolutní hodnota C je rovna podílu správné a vypočtené délky $|C| = |\bar{Z}_j|/|Z_j| = S_o/S_v$. Dosazením do rovnic pro části čísla C dostáváme tedy výrazy nové, závislé pouze na délkách S_o, S_v a úhlu φ:



Obr. 2.

$$A = \frac{S_o}{S_v} \cos \varphi\,,$$

$$B = -\frac{S_o}{S_v} \sin \varphi\,.$$

Podle obrázku 2 a dříve uvedené definice lze $\cos \varphi$ vyjádřit jako poměr souřadnice x koncového bodu N s obrazem Z_n k vypočtené vzdálenosti a $\sin \varphi$ jako poměr souřadnice y koncového bodu N s obrazem Z_n k vypočtené vzdálenosti. Výsledné rovnice pro koeficienty čísla C lze tedy vyjádřit pomocí pomocí správné a vypočtené vzdálenosti a souřadnic koncového bodu N:

$$\cos \varphi = \frac{x_n}{S_v}\,, \quad \sin \varphi = \frac{y_n}{S_v} \quad \text{a} \quad A = \frac{S_o}{S_v^2} x_n\,, \quad B = -\frac{S_o}{S_v^2} y_n\,.$$

Transformační rovnice píšeme jako součet a jako rozdíl součinů reálné a imaginární části čísla C (koeficientů transformace) a netransformovaných souřadnic polygonových bodů:

$$\bar{x}_j = Ax_j - By_j\,, \quad \bar{y}_j = Ay_j + Bx_j\,, \quad x_0 = y_0 = \bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 0\,.$$

Správnost výpočtu koeficientů A a B můžeme ověřit tím, že výsledek dosazení souřadnic x_n, y_n posledního polygonového bodu N do transformačních rovnic splňuje původní požadavek, aby koncový bod $\bar{N}$ pořadu po vyrovnání a transformaci ležel na kladné části osy x ve správné vzdálenosti S_o od počátku 0: $\bar{x}_n = S_o$, $\bar{y}_n = 0$. Obecně platí:

$$\bar{x}_n = Ax_n - By_n = \frac{S_o}{S_v^2} x_n^2 + \frac{S_o}{S_v^2} y_n^2 = \frac{S_o}{S_v^2} (x_n^2 + y_n^2) = S_o ,$$

$$\bar{y}_n = Ay_n + Bx_n = \frac{S_o}{S_v^2} x_n y_n - \frac{S_o}{S_v^2} y_n x_n = 0 .$$

Velmi účinně je výsledek výpočtu kontrolován tím, když transformujeme již souřadnicové rozdíly a z takto transformovaných rozdílů počítáme vyrovnané souřadnice. Že lze transformovat souřadnicové rozdíly stejně jako souřadnice samé dokážeme snadno takto: Položme

$$x_j = x_{j-1} + \Delta x_j \quad \text{a} \quad y_j = y_{j-1} + \Delta y_j ,$$

$$\bar{x}_j = \bar{x}_{j-1} + \overline{\Delta x}_j \quad \text{a} \quad \bar{y}_j = \bar{y}_{j-1} + \overline{\Delta y}_j$$

a dosaďme za x_j, y_j, $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$ do transformačních rovnic. Dostaneme $\bar{x}_{j-1} + \overline{\Delta x}_j = A(x_{j-1} + \Delta x_j) - B(y_{j-1} + \Delta y_j)$ a po rozvedení $\bar{x}_{j-1} + \overline{\Delta x}_j = (Ax_{j-1} - By_{j-1}) + (A\,\Delta x_j - B\,\Delta y_j)$. Protože platí, že $\bar{x}_{j-1} = Ax_{j-1} - By_{j-1}$, musí platit i $\overline{\Delta x}_j = A\,\Delta x_j - B\,\Delta y_j$. Stejným způsobem lze totéž dokázat i pro $\overline{\Delta y}$. Nemusíme tedy v původní souřadnicové soustavě $(+x$ v první straně$)$ počítat souřadnice, ale

Tabulka 1

Srovnání normálního a konformního vyrovnání

J	Vrcholový úhel ω_j	y_j	x_j	$\bar{y}_{j\,\text{norm.}}$	$\bar{x}_{j\,\text{norm.}}$	$\bar{y}_{j\,\text{konform.}}$	$\bar{x}_{j\,\text{konform.}}$	$\bar{y}_{j\,\text{norm.}} - \bar{y}_{j\,\text{konf.}}$	$\bar{x}_{j\,\text{norm.}} - \bar{x}_{j\,\text{konf.}}$
P		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0
1	136,8075^g	0,00	− 45,40	− 15,22	+ 42,84	− 15,25	+ 42,84	+ 3	0
2	236,4100^g	+ 56,34	− 82,17	− 80,63	+ 58,62	− 80,77	+ 58,62	+14	0
3	268,9325^g	+ 79,19	−133,24	−119,28	+ 99,14	−119,48	+ 99,14	+20	0
4	237,0400^g	+ 34,94	−190,01	− 96,62	+167,58	− 96,78	+167,57	+16	+1
5	142,9800^g	− 50,63	−219,02	− 25,73	+223,68	− 25,77	+223,68	+ 4	0
6	246,4350^g	− 73,66	−282,47	− 25,30	+291,29	− 25,35	+291,29	+ 5	0
7	197,2275^g	−130,19	−312,85	+ 17,78	+338,95	+ 17,80	+338,94	− 2	+1
8	75,4150^g	−201,58	−355,32	+ 70,80	+403,00	+ 70,91	+403,00	−11	0
9		−142,38	−400,13	0,00	+425,41	0,00	+425,41	0	0

$S_v = 424{,}71$, $S_o = 425{,}41$

Tabulka 2

Srovnání normálního a konformního vyrovnání

J	Vrcholový úhel ω_j	y_j	x_j	$\bar{y}_{j\,\text{norm.}}$	$\bar{x}_{j\,\text{norm.}}$	$\bar{y}_{j\,\text{konform.}}$	$\bar{x}_{j\,\text{konform.}}$	$\bar{y}_{j\,\text{norm.}} - \bar{y}_{j\,\text{konf.}}$	$\bar{x}_{j\,\text{norm.}} - \bar{x}_{j\,\text{konf.}}$
P		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0
1	142,5425^g	0,00	− 18,75	+ 2,81	+ 18,49	+ 2,81	+ 18,48	0	+1
2	214,5550^g	+ 66,91	− 71,57	− 55,41	+ 80,56	−55,24	+ 80,56	−17	0
3	299,7300^g	+122,82	−141,58	−100,18	+157,95	−99,88	+157,95	−30	0
4	203,3050^g	+ 75,82	−179,45	− 48,02	+188,24	−47,88	+188,25	−14	−1
5		+ 32,05	−211,11	0,00	+212,91	0,00	+212,91	0	0
$S_v = 213{,}51$ $S_o = 212{,}91$									

stačí vypočítat pouze souřadnicové rozdíly Δx a Δy a tyto transformovat. Koeficienty A a B vypočteme pak z rovnic

$$A = \frac{S_o}{S_v^2} \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j\,, \quad B = -\frac{S_o}{S_v^2} \sum_{j=1}^{n} \Delta y_j\,, \quad \text{kde } S_v = +\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta y_j\right)^2}\,.$$

Výpočet vyrovnaných souřadnic je pak zcela postačujícím způsobem kontrolován podmínkami, že součet souřadnicových rozdílů $\overline{\Delta x}$ je roven správné vzdálenosti S_o a součet souřadnicových rozdílů Δy je roven nule: $\sum_{j=1}^{n} \overline{\Delta x}_j = S_o$, $\sum_{j=1}^{n} \overline{\Delta y}_j = 0$.

ZHODNOCENÍ METODY

Transformací ani vyrovnáním se nemění úhly — vyjma nepřesností vzniklých zaokrouhlováním — takže vyrovnání je konformní. Předmětem vyrovnání jsou pouze délky stran $S_1, S_2, \ldots, S_j, \ldots, S_n$, které se změní relativně stejně jako spojnice počátečního a koncového bodu, tj. o hodnotu $S_j\left(|C| - 1\right)$ a přejdou v délky $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \ldots, \bar{S}_j, \ldots, \bar{S}_n$. Toto tvrzení lze dokázat takto:

$$S_j = \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}\,,$$

$$\bar{S}_j = \sqrt{\overline{\Delta x}_j^2 + \overline{\Delta y}_j^2} = \sqrt{(A\,\Delta x_j - B\,\Delta y_j)^2 + (A\,\Delta y_j + B\,\Delta x_j)^2} =$$

$$= \sqrt{A^2\,\Delta x_j^2 + B^2\,\Delta y_j^2 + A^2\,\Delta y_j^2 + B^2\,\Delta x_j^2} = \sqrt{S_j^2(A^2 + B^2)} = S_j|C|\,,$$

$$\bar{S}_j - S_j = S_j|C| - S_j = S_j\left(|C| - 1\right).$$

Konformního vyrovnání je na místě použít tehdy, byly-li úhly změřeny podstatně přesněji nežli délky, což je v praxi obvyklý případ.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СОВМЕСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПОЛИГОННЫХ ХОДОВ

ПЕТР ВАНИЧЕК (Petr Vaníček)

В статье используются комплексные числа для описания очень простого метода совместного уравнения и преобразования разомкнутого полигонного хода между двумя данными пунктами. Эта задача имеет болшое значение в геодезическом деле. В результате уравнения не происходит изменение фигуры измеренного хода (уравнение называется конформным), что очень хорошо удовлетворяет уравнению ходов с точно измеренными углами.

В заключении изложен способ вычисления и произведено сравнение результатов, полученных при употреблении нашего и обычного метода.

Résumé

L'APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES AU NIVELLEMENT DES MARCHES POLYGONALES

PETR VANÍČEK

Dans cet article, on applique les nombres complexes pour démontrer une méthode très simple de nivellement et de transformation simultanée de marches polygonales sans orientation. Ce problème à une grande importance en géodésie. Au nivellement, la forme de la marche mesurée ne change pas (le nivellement est conforme), la méthode est donc particulièrement convenable pour les marches aux angles déterminés précisément.

A la fin, on montre le procédé de calcul correspondant, et l'on compare les résultats obtenus en appliquant la méthode en question avec les résultats obtenus par la méthode utilisée le plus souvent en pratique.

Adresa autora: Ing. *Petr Vaníček*, Matematická laboratoř ČVUT, Horská 3, Praha 2.