

Aplikace matematiky

Miloš Růžička

Podobně úplavy ve zpomaleném proudu

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 3, 159–172

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102893>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

PODOBNÉ ÚPLAVY VE ZPOMALENÉM PROUDU

MILoš RŮŽIČKA

(Došlo dne 11. března 1963.)

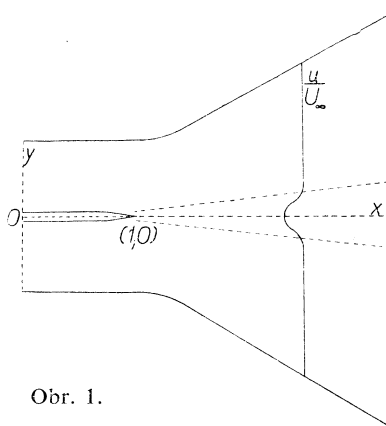
V práci je použito Prandtlova zjednodušení pohybových rovnic pro turbulentní proudění nestlačitelné tekutiny na studium úplavu za tělesem v případě, kdy rychlost proudového pole klesá se vzdáleností od obtékaného tělesa.

1. ÚVOD

V práci se zabýváme tímto problémem: určití profil rychlosti ve velké vzdálenosti za obtékaným tělesem v případě, kdy rychlost proudového pole klesá se vzdáleností od obtékaného tělesa.

Difusor předpokládáme symetrický; osa difusoru je totožná s osou x . Dále předpokládáme, že stěny difusoru jsou dostatečně daleko od obtékaného tělesa; tento předpoklad nám zaručuje, že na úplav nepůsobí mezní vrstva vznikající na stěnách difusoru (viz obr. 1).

O obtékaném tělese předpokládáme, že je symetrické vzhledem k ose x ; za tohoto předpokladu je úplav zřejmě symetrický vzhledem k ose x . Počátek pravoúhlého systému souřadného x, y položíme do náběhového bodu obtékaného tělesa; veličiny x, y jsou bezrozměrné; v odtokovém bodě tělesa je $x = 1$ a $y = 0$.



Obr. 1.

Proudové pole předpokládáme rovinné a stacionární; proudící medium budiž nestlačitelné.

Předpokládáme, že profily rychlosti v jednotlivých řezech ($x = \text{konst}$) v dostatečné vzdálenosti za tělesem jsou podobné; tím rozumíme toto: budiž U_∞ složka rychlosti ve směru osy x pro $|y| \rightarrow \infty$ a u budiž složka rychlosti ve směru osy y v bodě (x, y)

proudového pole za tělesem (U_∞ je funkcí toliko proměnné x ; u je funkcí obou proměnných x , y a požadujeme $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u = U_\infty$); pak

$$(1,1) \quad \frac{U_\infty - u}{U_\infty} = f(x) g \left[\left(\kappa \frac{y U_\infty}{\varepsilon} \right)^k \right],$$

kde k , κ jsou vhodně volené konstanty a ε je koeficient turbulentního tření.

Dále předpokládáme, že koeficient turbulentního tření ε závisí jen na proměnné x (tj. na vzdálenosti od obtékaného tělesa).

Řešení problému nyní vyžaduje, aby k danému průběhu rychlosti U_∞ byly určeny funkce $f(x)$ a $g[(\kappa y U_\infty / \varepsilon)^k]$ i konstanty k , κ . Takto však postupovati nebudeme, není totiž jisté, zda k nějakému – libovolně zvolenému – průběhu rychlosti U_∞ funkce $f(x)$ a $g[(\kappa y U_\infty / \varepsilon)^k]$ vůbec existují. Proto budeme postupovati takto: zvolíme funkci $f(x)$ i hodnotu konstanty k a určíme třídu funkcí U_∞ , které této volbě vyhovují, a pak ke každému průběhu U_∞ z této třídy určíme funkci $g[(\kappa y U_\infty / \varepsilon)^k]$.

Výše uvedený problém, pokud je nám známo, nebyl zatím v literatuře zpracován; pravděpodobně je to způsobeno tím, že chování úplavu ve zpomaleném proudě může míti v podstatě trojí charakter:

a) Při malém gradientu rychlosti $-x U_\infty^{-1} dU_\infty / dx$ funkce $f(x)$ s rostoucím x klesá; úplav se v tomto případě chová podobně jako v případě bez rychlostního gradientu. Jelikož se v tomto případě jedná jen o malé gradienty, je tento případ nezajímavý i z hlediska technických aplikací.

b) V mezním případě je $f(x) = \text{konst.}$ Tento případ je pro technické aplikace pravděpodobně nejzajímavější; při průběhu takového rychlostního gradientu $-x U_\infty^{-1} dU_\infty / dx$, při kterém se rychlost u v úplavu chová podle tohoto předpokladu, nehrozí ještě nestabilita v úplavech a energetické ztráty jsou proto ještě dosti malé; proudový stroj zůstává ještě plně využit.

c) Při vzrůstu rychlostního gradientu $-x U_\infty^{-1} dU_\infty / dx$ nad mezný případ funkce $f(x)$ s rostoucím x roste. To znamená, že od jistého x počínaje, dochází ve střední oblasti úplavu již ke zpětnému proudění; energetické ztráty vzrůstají a proudový stroj je využit jen zčásti.

V této práci se zabýváme jen případem b), a to ještě jen pro $k = 1$.

2. OZNAČENÍ

V práci užíváme tohoto označení:

c_0 ; $(1 - c_0)^{\frac{1}{2}} U_\infty$ je hodnota složky rychlosti ve směru osy x v úplavu pro $y = 0$,
 $f(x)$, $g(\eta^k)$ funkce v rovnici (1 1), definující podobnost rychlostních profilů
v jednotlivých řezech $x = \text{konst}$ za tělesem,
 $H = \delta^x / \vartheta$ tvarový parametr rychlostního profilu,

U_∞	složka rychlosti ve směru osy x pro $ y \rightarrow \infty$,
u	složka rychlosti ve směru osy x za obtékaným tělesem,
x, y	pravouhlé souřadnice; osa x je totožná s osou difusoru,
δ^*	poštinovací tloušťka mezní vrstvy,
ε	koeficient turbulentního tření,
ϑ	impulsová tloušťka mezní vrstvy,
$\eta = \kappa y U_\infty / \varepsilon$	
λ	konstanta, určující vzrůst turbulentního tření v závislosti na x : $\varepsilon / (1 + n) U_\infty = \kappa^2 x / \lambda^2$; $1 + n = - [x U_\infty^{-1} dU_\infty / dx]^{-1}$,
ψ	proudová funkce,
Ψ	$\psi = \lambda \kappa^{-1} \varepsilon \Psi(\eta)$.

3. ZÁKLADNÍ ROVNICE

Za předpokladů, uvedených v odstavci 1, je možno rovnice pro pohyb kapaliny zjednodušiti v rovnice Prandtlovy – podobně jako činí ve své práci GÖRTLER [1]:

$$(3,1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$(3,2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Nejprve hledáme takový průběh rychlosti U_∞ , aby profily rychlosti v úplavu v jednotlivých řezech, kolmých na osu x , byly podobné podle zákona

$$(3,3) \quad \frac{U_\infty - u}{U_\infty} = g(\eta), \quad \eta = \kappa \frac{y U_\infty}{\varepsilon}.$$

Abychom splnili rovnici kontinuity (3,2), zavedeme proudovou funkci ψ ve tvaru

$$(3,4) \quad \psi = \frac{\lambda}{\kappa} \varepsilon \Psi(\eta).$$

Lehce odvodíme, že platí

$$(3,5a) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \lambda U_\infty \frac{d\Psi}{d\eta},$$

$$(3,5b) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{dU_\infty}{dx} \frac{d\Psi}{d\eta} + \lambda \left(\frac{dU_\infty}{dx} - \frac{U_\infty}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} \right) \eta \frac{d^2\Psi}{d\eta^2},$$

$$(3,5c) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda \kappa \frac{1}{\varepsilon} U_\infty^2 \frac{d^2\Psi}{d\eta^2},$$

$$(3,5d) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda \kappa^2 \frac{1}{\varepsilon^2} U_\infty^3 \frac{d^3 \Psi}{d\eta^3},$$

$$(3,5e) \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\lambda \Psi}{\kappa} \frac{d\varepsilon}{dx} - \frac{\lambda \eta}{\kappa} \left(\varepsilon \frac{dU_\infty}{dx} - U_\infty \frac{d\varepsilon}{dx} \right) \frac{1}{U_\infty} \frac{d\Psi}{d\eta}.$$

Dosadíme z rovnic (3,5) do rovnice (3,1) a takto upravenou rovnicí vydělíme faktorem $\lambda^2 U_\infty^2$; dostaneme

$$(3,6) \quad \frac{1}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} \left(\frac{d\psi}{d\eta} \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} \psi \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} = \frac{1}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{\kappa^2}{\lambda} \frac{U_\infty}{\varepsilon} \frac{d^3 \Psi}{d\eta^3}.$$

Rovnice (3,6) má zřejmě smysl tehdy a jen tehdy, je-li splněna právě jedna z následujících podmínek:

a) Buď je ε úměrno U_∞ a $U_\infty^{-1} dU_\infty/dx = -\mu$, při čemž $\mu > 0$; pak zřejmě $U_\infty = U_\infty(0) \exp(-\mu x)$; $\varepsilon = \kappa^2 U_\infty / \lambda^2 \mu$ a $\eta = \lambda^2 \mu y / \kappa$. V tomto případě je tedy šířka úplavu konstantní pro všechna x ; výraz pro ε má zřejmě klasický tvar podle PRANTDLA (srv. [3], str. 498).

Rovnice (3,6) přejde v tomto případě ve tvar

$$(3,7a) \quad \left(\frac{d\Psi}{d\eta} \right)^2 - \Psi \frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} = 1 - \lambda \frac{d^3 \Psi}{d\eta^3};$$

hledáme takové řešení rovnice (3,7a), které splňuje podmínky:

- 1) pro $|\eta| \rightarrow \infty$ je $d\Psi/d\eta = \lambda^{-1}$;
- 2) pro $|\eta| \rightarrow 0$ je $d\Psi/d\eta = \lambda^{-1}(1 - c_0)^{\frac{1}{2}}$.

b) Nebo je ε úměrno U_∞^{-n} a $U_\infty^{-1} dU_\infty/dx = -\mu U_\infty^{1+n}$, při čemž je $\mu > 0$ a $n > -1$; v tomto případě je

$$\begin{aligned} U_\infty &= U_\infty(1) x^{(-1)/(1+n)}, \quad \mu = (1+n)^{-1} U_\infty(1)^{-(1+n)}, \\ \varepsilon &= \kappa^2 \lambda^{-2} (1+n) x U_\infty, \quad (1+n) = -[x U_\infty^{-1} dU_\infty/dx]^{-1}, \\ \eta &= \lambda^2 \kappa^{-1} (1+n)^{-1} y x^{-1}. \end{aligned}$$

V tomto případě šířka úplavu roste lineárně s x ; výraz pro ε má opět klasický tvar podle PRANTDLA (srv. [3], str. 498).

Rovnice (3,6) přejde v tomto případě ve tvar

$$(3,7b) \quad \left(\frac{d\Psi}{d\eta} \right)^2 + n \Psi \frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} = 1 - \lambda \frac{d^3 \Psi}{d\eta^3};$$

hledáme takové řešení rovnice (3,7b), které splňuje podmínky:

- a) pro $|\eta| \rightarrow \infty$ je $d\Psi/d\eta = \lambda^{-1}$;
- b) pro $|\eta| \rightarrow 0$ je $d\Psi/d\eta = \lambda^{-1}(1 - c_0)^{1/2}$.

Porovnáme-li nyní rovnici (3,7a) a rovnici (3,7b), vidíme, že rovnice (3,7a) plyne z rovnice (3,7b), položíme-li $n = -1$; budeme se proto v dalším textu zabývat jen rovnicí (3,7b).

Rovnice (3,7b) neobsahuje explicitně proměnnou η ; je tedy možno řád rovnice (3,7b) snížit; rovnice (3,7b) nechť má řešení $\Psi(\eta)$ takové, že $d\Psi/d\eta > 0$; za tohoto předpokladu je možno vyjádřit veličinu η jako funkci proměnné Ψ ; položíme-li $d\Psi/d\eta = \lambda^{-1}(1 - c_0 \Phi(\Psi))^{\frac{1}{2}}$, je

$$(3,8) \quad \eta(\Psi) = \lambda \int_0^{\Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}}.$$

Transformací (3,8) přejde rovnice (3,7b) ve tvar

$$(3,9) \quad \frac{d^2\Phi}{d\Psi^2} + n\Psi \frac{d\Phi}{d\Psi} + 2\Phi = [1 - \sqrt{(1 - c_0\Phi)}] \frac{d^2\Phi}{d\Psi^2};$$

hledáme takové řešení rovnice (3,9), které splňuje podmínky:

- a) pro $|\Psi| \rightarrow \infty$ je $\Phi \rightarrow 0$;
- b) pro $|\Psi| \rightarrow 0$ je $\Phi \rightarrow 1$.

Podívejme se nyní na rovnici (3,9) trochu podrobněji: v případě, kdy $c_0 \rightarrow 0$ je pravá strana řádu c_0 a jde tedy s c_0 k nule. V těch případech, kdy rychlost v úplavu pro $\eta = 0$ se málo liší od U_∞ , je možno pravou stranu rovnice (3,9) zanedbat a řešit toliko rovnici

$$(3,10) \quad \frac{d^2\Phi}{d\Psi^2} + n\Psi \frac{d\Phi}{d\Psi} + 2\Phi = 0$$

s příslušnými krajovými podmínkami. Tento případ nazýváme v dalším textu linearisovaným případem. V případě, kdy c_0 není již proti 1 zanedbatelné, je možno rovnici (3,9) řešit postupnými aproximacemi. Tento případ nazýváme v dalším textu obecným případem.

4. VYŠETŘENÍ LINEARISOVANÉHO PŘÍPADU

V tomto případě řešíme diferenciální rovnici

$$(4,1) \quad \frac{d^2\Phi}{d\Psi^2} + n\Psi \frac{d\Phi}{d\Psi} + 2\Phi = 0$$

s těmito okrajovými podmínkami:

- a) pro $|\Psi| \rightarrow \infty$ je $\Phi \rightarrow 0$;
- b) pro $|\Psi| \rightarrow 0$ je $\Phi \rightarrow 1$.

Jelikož úplav je podle předpokladů, uvedených v odstavci 1, symetrický vzhledem k x , je hledaná funkce Φ sudou funkcí vzhledem k Ψ .

Rovnici (4,1) je možno jednoduchou transformací převést na rovnici Whittakerovu (viz [2], str. 475, vz. (10)). O rovnici (4,1) je známo, že má za řešení sudou funkci proměnné Ψ , splňující podmínky a), b) tehdy a jen tehdy, je-li

$$(4,2) \quad n = \frac{2}{2N + 1},$$

kde N je přirozené číslo. Hledané řešení je potom

$$(4,3) \quad \Phi = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \Psi^{2j} \exp\left(-\frac{1}{2}n\Psi^2\right),$$

kde

$$(4,4a) \quad d_0 = 1,$$

$$(4,4b) \quad d_i = (-1)^i \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (2 - n - 2jn)}{(2i)!}$$

pro přirozená i .

Dosadíme-li za n z rovnice (4,2) do rovnice (4,4b), vidíme, že d_i pro všechna přirozená $i \geq N$ jsou rovna 0; výraz (4,3) přejde potom ve tvar

$$(4,5) \quad \Phi_0 = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \Psi^{2i} \exp\left(-\frac{\Psi^2}{2N + 1}\right),$$

kde d_i počítáme ze vzorců (4,4), do nichž jsme za n dosadili z rovnice (4,2).

Výsledky, vyjádřené rovnicemi (4,4) a (4,5), odvodíme snadno tak, že do rovnice (4,1) dosadíme za Φ z rovnice (4,3) a položíme rovny 0 koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné Ψ . Tak dostaneme pro d_i ($i + 1$ přirozené číslo) rekurentní vztah

$$(2i + 2)(2i + 1)d_{i+1} + (2 - n - 2ni)d_i = 0.$$

Hodnota $d_0 = 1$ plyne z podmínky b).

V dalším textu budeme ještě potřebovat řešení rovnice (4,1), které vyhovuje podmínce a), ale je lichou funkcí proměnné Ψ . Toto řešení se dá zřejmě psát ve tvaru

$$(4,6) \quad \Phi^* = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \Psi^{2i+1} \exp\left(-\frac{1}{2}n\Psi^2\right),$$

kde

$$(4,7a) \quad D_0 = 1,$$

$$(4,7b) \quad D_i = (-1)^i \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [2 - n - (2j + 1)n]}{(2i + 1)!}$$

a n je dáno rovnicí (4,2).

Lehce se přesvědčíme, že řada (4,6) s koeficienty, určenými z rovnic (4,7), konverguje pro všechna konečná Ψ . Dále je zřejmé, že řešení (4,5) je lineárně nezávislé na řešení (4,6) v celém intervalu $(-\infty; \infty)$. Řešení (4,5) a (4,6) tvoří tedy fundamentální systém řešení rovnice (4,1). Jelikož je známo, že jedno z fundamentálního systému řešení rovnice (4,1) se (při $n = 2/(2N + 1)$) pro $|\Psi| \rightarrow \infty$ chová jako $\Psi^{2N-2} \cdot \exp[-\Psi^2/(2N + 1)]$ a druhé jako Ψ^{-2N-1} a jelikož řešení (4,5) se pro $|\Psi| \rightarrow \infty$ chová jako $\Psi^{2N-2} \exp[-\Psi^2/(2N + 1)]$, chová se řešení (4,6) pro $|\Psi| \rightarrow \infty$ jako Ψ^{-2N-1} .

V celém tomto odstavci uvažujeme $c_0 \rightarrow 0$; je tedy $1 - c_0 \Phi_0(\Psi)$ pro všechna Ψ zcela jistě kladné; z rovnice (3,8) pak ke každému Ψ určíme numerickou integrací η ; z rovnice (3,5a), do níž dosadíme $d\Psi/d\eta = \lambda^{-1}(1 - c_0 \Phi(\Psi))^{1/2}$, vypočteme u/U_∞ ; tak dostaneme

$$(4,8) \quad \frac{u}{U_\infty} = \sqrt{(1 - c_0 \Phi_0(\Psi))}.$$

Tímto postupem je možno – jak se lehce přesvědčíme – každé hodnotě η přiřaditi jednu hodnotu Ψ , a tedy též jednu hodnotu u/U_∞ . Je tedy u/U_∞ funkcí proměnné η . Pro průběh rychlosti U_∞ dostaneme ze vzorců uvedených na str. 162 v odst. b) pro $x \geq 1$

$$(4,9) \quad U_\infty = U_\infty(1) x^{-(2N+1)/(2N+3)}.$$

5. VYŠETŘENÍ OBECNÉHO PŘÍPADU

V obecném případě máme řešiti rovnici

$$(5,1) \quad \frac{d^2\Phi}{d\Psi^2} + n\Psi \frac{d\Phi}{d\Psi} + 2\Phi = [1 - (1 - c_0\Phi)^{\frac{1}{2}}] \frac{d^2\Phi}{d\Psi^2},$$

kde $n = 2/(2N + 1)$ (N přirozené číslo), s těmito okrajovými podmínkami:

- a) pro $|\Psi| \rightarrow \infty$ budiž $\Phi \rightarrow 0$;
- b) pro $|\Psi| \rightarrow 0$ budiž $\Phi \rightarrow 1$.

Rovnici (5,1) řešíme postupnými aproximacemi, a to takto:

V nulté aproximaci položíme

$$(5,2) \quad \Phi = \Phi_0,$$

kde Φ_0 je dáno rovnicí (4,4); pro přirozené j řešíme pak rovnici

$$(5,3) \quad \frac{d^2\Phi_j}{d\Psi^2} + n\Psi \frac{d\Phi_j}{d\Psi} + 2\Phi_j = [1 - (1 - c_0\Phi_{j-1})^{\frac{1}{2}}] \frac{d^2\Phi_{j-1}}{d\Psi^2}$$

s okrajovými podmínkami a), b) uvedenými na začátku tohoto odstavce.

Metodou variace konstant pak lehce odvodíme řešení rovnice (5,3), které splňuje okrajovou podmínku b) ve tvaru

$$(5,4) \quad \Phi_j = \left\{ 1 - \int_0^\Psi \Phi^* [1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi_{j-1})}] \frac{d^2 \Phi_{j-1}}{d\Psi^2} \left[\Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right]^{-1} d\Psi \right\} \Phi_0 + \\ + \left\{ \int_0^\Psi \Phi_0 [1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi_{j-1})}] \frac{d^2 \Phi_{j-1}}{d\Psi^2} \left[\Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right]^{-1} d\Psi \right\} \Phi^* .$$

Lehce se přesvědčíme (důkaz vedeme např. úplnou indukcí), že funkce Φ_j (pro každé přirozené j) je sudou funkcí proměnné Ψ .

Snadno se přesvědčíme, že existují dvě kladná čísla M a Ψ_0 taková, že pro $|\Psi| > \Psi_0$ platí

$$(5,5) \quad \left| \Phi^* \left[\Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right]^{-1} \right| \leq M |\Psi|^{-2N+3} \exp [|\Psi|^2/(2N+1)] ,$$

$$(5,6) \quad \left| \Phi_0 \left[\Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right]^{-1} \right| \leq M |\Psi|^{2N+2} ,$$

$$(5,7) \quad |\Phi_0| \leq M |\Psi|^{2N-2} \exp [-|\Psi|^2/(2N+1)] ,$$

$$(5,8) \quad |\Phi^*| \leq M |\Psi|^{-2N-1} .$$

Nyní ukážeme, že existuje takové $M_j \geq 0$, závislé jen na j a Ψ_0 a nezávislé na Ψ , že pro $|\Psi| \geq \Psi_0$ platí

$$(5,9) \quad |\Phi_j - \Phi_0| \leq M_j |\Psi|^{-2N-1} .$$

Důkaz nerovnosti (5,9) vedeme úplnou indukcí. Nerovnost (5,9) je zřejmě splněna pro $j = 0$; nechť tedy nerovnost (5,9) platí pro všechna přirozená $j \leq k$ (k přirozené číslo); dokážeme, že platí pro přirozené číslo $j = k + 1$.

Zřejmě existuje takové číslo $B_k > 0$, že

$$(5,10) \quad |1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi_k)}| \leq \frac{1}{2} B_k |c_0| |\Phi_k| ;$$

je tedy

$$(5,11) \quad |\Phi_{k+1} - \Phi_0| \leq \frac{1}{2} B_k |c_0| \left\{ |\Phi_0| \int_0^{\psi_0} |\Phi^* \Phi_k| \left| \frac{d^2 \Phi_k}{d\Psi^2} \right| \left[\left| \Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right| \right]^{-1} d|\Psi| + |\Phi_0| \int_{\psi_0}^{|\psi|} |\Phi^* \Phi_k| \left| \frac{d^2 \Phi_k}{d\Psi^2} \right| \left[\left| \Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right| \right]^{-1} d|\Psi| + |\Phi^*| \int_0^{|\psi|} |\Phi_0 \Phi_k| \left| \frac{d^2 \Phi_k}{d\Psi^2} \right| \left[\left| \Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right| \right]^{-1} d|\Psi| \right\}.$$

Označíme

$$(5,12) \quad \int_0^{\psi_0} |\Phi^* \Phi_k| \left| \frac{d^2 \Phi_k}{d\Psi^2} \right| \left[\left| \Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right| \right]^{-1} d|\Psi| = F_k(\Psi_0).$$

a

$$(5,13) \quad \int_0^{|\psi|} |\Phi_0 \Phi_k| \left| \frac{d^2 \Phi_k}{d\Psi^2} \right| \left[\left| \Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right| \right]^{-1} d|\Psi| = H_k(|\Psi|).$$

Snadno se přesvědčíme, že existuje $\lim_{|\Psi| \rightarrow \infty} H_k(|\Psi|) = H_k$, kde H_k je kladné číslo. Dále se lehce přesvědčíme, že (pro $|\Psi| > \Psi_0$) platí

$$(5,14) \quad \int_{|\psi_0|}^{|\psi|} |\Phi^* \Phi_k| \left| \frac{d^2 \Phi_k}{d\Psi^2} \right| \left[\left| \Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right| \right]^{-1} d|\Psi| \leq \leq M M_k^2 \frac{|2N+1| |2N+2|}{6N} |\Psi|^{-6N} \exp[|\Psi|^2/(2N+1)].$$

Používající nerovností (5,11) až (5,14) lehce odvodíme nerovnost

$$(5,15) \quad |\Phi_{k+1} - \Phi_0| \leq \frac{1}{2} B_k |c_0| \left[M |\Psi|^{2N-2} F_k(\Psi_0) \exp[-|\Psi|^2/(2N+1)] + + M^2 M_k^2 \frac{|2N+1| |2N+2|}{6N} |\Psi|^{-4N-1} + H_k |\Psi|^{-2N-1} \right] \leq \leq \frac{1}{2} B_k |c_0| M \left[m F_k(\Psi_0) + M M_k^2 \frac{|2N+1| |2N+2|}{6N} + H_k \right] |\Psi|^{-2N-1};$$

přítom m značí vhodně volené kladné číslo. Tím je nerovnost (5,9) dokázána. Ne-

rovnost (5,9) ale znamená, že $\lim_{|\psi| \rightarrow \infty} \Phi_k = 0$. Řešení (5,4) tedy splňuje i okrajovou podmínku a).

Zbývá ukázat, že posloupnost Φ_j konverguje. Předpokládáme-li, že existuje takové kladné číslo A , že platí

$$(5,16) \quad |\Phi_0| \left| \int_0^\psi \Phi^* \left[(1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi_{j-1})}) \frac{d^2 \Phi_{j-1}}{d\Psi^2} - (1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi_{j-2})}) \frac{d^2 \Phi_{j-2}}{d\Psi^2} \right] \left[\Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right]^{-1} d\Psi \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2} A |c_0| \int_0^{|\psi|} [(1 + |\Psi|^2) \operatorname{arctg} |\Psi|]^{-1} |\Phi_{j-1} - \Phi_{j-2}| d|\Psi|,$$

$$(5,17) \quad |\Phi^*| \left| \int_0^\psi \Phi_0 \left[(1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi_{j-1})}) \frac{d^2 \Phi_{j-1}}{d\Psi^2} - (1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi_{j-2})}) \frac{d^2 \Phi_{j-2}}{d\Psi^2} \right] \left[\Phi_0 \frac{d\Phi^*}{d\Psi} - \Phi^* \frac{d\Phi_0}{d\Psi} \right]^{-1} d\Psi \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2} A |c_0| \int_0^{|\psi|} [(1 + |\Psi|^2) \operatorname{arctg} |\Psi|]^{-1} |\Phi_{j-1} - \Phi_{j-2}| d|\Psi|,$$

je potom

$$(5,18) \quad |\Phi_j - \Phi_{j-1}| \leq A |c_0| \int_0^{|\psi|} [(1 + |\Psi|^2) \operatorname{arctg} |\Psi|]^{-1} |\Phi_{j-1} - \Phi_{j-2}| d|\Psi| \leq \\ \leq (A |c_0|)^{j-1} \int_0^{|\psi|} [(1 + |\Psi_{j-1}|^2) \operatorname{arctg} |\Psi_{j-1}|]^{-1} \left\{ \int_0^{|\psi_{j-1}|} [(1 + |\Psi_{j-2}|^2) \operatorname{arctg} |\Psi_{j-2}|]^{-1} \dots \left(\int_0^{|\psi_2|} |\Phi_1 - \Phi_0| [(1 + |\Psi_1|^2) \operatorname{arctg} |\Psi_1|]^{-1} d|\Psi_1| \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot d|\Psi_2| \dots \right\} d|\Psi_{j-1}|.$$

Jelikož existuje takové číslo M_0 , že $|\Phi_1 - \Phi_0| \leq M_0 \operatorname{arctg}^2 |\Psi|$, plyne z nerovnosti (5,18)

$$(5,19) \quad |\Phi_j - \Phi_{j-1}| \leq M_0 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 (\frac{1}{2} A |c_0|)^{j-1}.$$

Odtud plyne, že posloupnost funkcí Φ_j s rostoucím j konverguje k jisté limitě Φ , je-li $0 \leq c_0 < 2A^{-1}$. Provedeme-li limitní přechod $j \rightarrow \infty$ v rovnici (5,3), nalezneme, že Φ vyhovuje rovnici (5,1).

Zbývá tedy zodpovědět otázku, zda existuje číslo A , mající vlastnosti, vyjádřené nerovnostmi (5,16) a (5,17). Odpověď na tuto otázku je zřejmě kladná; funkce stojící na levé straně nerovností jsou zřejmě v intervalu $(-\infty; \infty)$ spojité; jak bylo dříve ukázáno (viz nerovnosti (5,10) až (5,15)), jdou levé strany nerovností (5,16) a (5,17) pro $|\Psi| \rightarrow \infty$ k nule; jsou tedy levé strany nerovností (5,16) a (5,17) v intervalu $(-\infty; \infty)$ pro každé j ohraničeny. Pro $\Psi \rightarrow 0$ se chovají obě strany nerovností (5,16) a (5,17) jako Ψ^2 . Odtud pak již plyne existence čísla $A > 0$, majícího požadované vlastnosti.

Dále položíme $C = \min [2A^{-1}; (\text{Max } \Phi(\Psi))^{-1}]$. Pak zřejmě pro všechna $0 \leq c_0 < C$ je $1 - c_0 \Phi(\Psi) > 0$; pro všechna c_0 vyhovující nerovnosti $0 \leq c_0 < C$ je tedy možno určit η z rovnice

$$(5,20) \quad \eta = \lambda \int_0^\Psi \frac{d\Psi}{\sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}}.$$

Z rovnice (5,20) je potom možno ke každé hodnotě η určit právě jednu hodnotu Ψ ; ke každé hodnotě Ψ je pak možno určit hodnotu u/U_∞ z rovnice

$$(5,21) \quad \frac{u}{U_\infty} = \sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}.$$

Odtud plyne, že rychlostní profil u/U_∞ je funkcí proměnné η , definované rovnicí (4,10b).

Dokázali jsme tak větu: Budiž N přirozené číslo; budiž dále $U_\infty = U_\infty(1) \cdot x^{-(2N+1)/(2N+3)}$, $n = 2/(2N+1)$, $\varepsilon/xU_\infty = \kappa^2(2N+3)/\lambda^2(2N+1)$, $\eta = \lambda^2(2N+1)y/\kappa(2N+3)x$, kde λ, κ jsou konstanty určené z experimentu. Dále budiž pro $y = 0$ splněna podmínka $u/U_\infty = (1 - c_0)^{1/2}$. Pak existuje takové $C > 0$, že pro všechna c_0 , splňující nerovnost $0 \leq c_0 < C$, je rychlostní profil u/U_∞ toliko funkcí proměnné η . Pro všechna v úvahu přicházející c_0 je možno rovnicí (5,1) řešit postupnými aproximacemi; tím nalezneme funkci $\Phi(\Psi)$, pomocí níž vypočteme z rovnic (5,20) a (5,21) proměnné η a u/U_∞ jako funkce Ψ .

6. ZÁVĚR

V předcházejícím textu jsme ukázali, že pro průběh rychlosti $U_\infty = U_\infty(1) \cdot x^{-(2N+1)/(2N+3)}$, kde N je přirozené číslo, existuje rozložení rychlosti v úplavu za tělesem, dané rovnicemi (5,20) a (5,21),

Pomocí výše uvedených vztahů je možno získati i další veličiny charakterisující úplav; pošinovací tloušťka δ^x je

$$(6,1) \quad \delta^x = U_\infty^{-1} \int_0^\infty (U_\infty - u) dy = \frac{\varepsilon}{\kappa U_\infty} \int_0^\infty \frac{1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}}{\sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}} d\Psi;$$

импульсовую толщину ϑ вычислеме ze vztahu

$$(6,2) \quad \vartheta = U_{\infty}^{-2} \int_0^{\infty} u(U_{\infty} - u) dy = \frac{\varepsilon}{\kappa U_{\infty}} \int_0^{\infty} [1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}] d\Psi .$$

Veličina H (tzv. tvarový parametr rychlostního profilu) je dána vztahem

$$(6,3) \quad H = \frac{\delta^x}{\vartheta} = \int_0^{\infty} \frac{1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}}{\sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}} d\Psi : \int_0^{\infty} [1 - \sqrt{(1 - c_0 \Phi(\Psi))}] d\Psi .$$

Výrazy, stojící na pravých stranách rovnic (6,1) až (6,3), počítáme numericky.

Literatura

- [1] *H. Görtler*: Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes; ZAMM, 22, 1942.
- [2] *E. Kamke*: Differentialgleichungen; Lösungsmethoden und Lösungen; Bd 1, 4. Auflage, Leipzig 1951.
- [3] *H. Schlichting*: Boundary Layer Theory; London, Karlsruhe 1961.

Резюме

ПОДОБНЫЕ СЛЕДЫ В ЗАМЕДЛЕННОМ ТЕЧЕНИИ

МИЛОШ РУЖИЧКА (Miloš Růžička)

В данной работе решается следующая проблема: определить профиль скоростей на большом расстоянии от обтекаемого тела в случае, когда скорость убывает при удалении от обтекаемого тела.

Считаем, что след симметричен относительно оси диффузора (которая лежит на оси x) и что стены диффузора находятся друг от друга на достаточно большом расстоянии, так что след не зависит от пограничного слоя, образующегося на стенках диффузора (т.е. при $|y| \rightarrow \infty$). Начало прямоугольной системы координат x, y поместим в точку набегания потока обтекаемого тела, величины x, y — безразмерные, и в точке схода потока обтекаемого тела $x = 1, y = 0$.

Считаем, что профили скоростей в отдельных сечениях подобны соответственно отношению (1,1), где κ, k представляют собой удобно выбранные коэффициенты и ε — коэффициент турбулентного трения; считаем, что ε является функцией только одного переменного x .

При решении проблемы необходимо для данного изменения скорости определить функции $f(x)$ и $g[(\kappa y U_{\infty} / \varepsilon)^k]$ и постоянные κ и k . Однако, мы по этому пути не пойдем, так как вообще нет гарантии, что для какого-нибудь произвольно выбранного изменения скорости U_{∞} существует функция $f(x)$ и $g[(\kappa y U_{\infty} / \varepsilon)^k]$. Поэтому мы будем поступать следующим образом: возьмем функцию $f(x)$ и величину постоянной k и определим класс функции U_{∞} , который

удовлетворяет этому выбору, и потом для каждого изменения скорости U_∞ из этого класса определим функцию $g[(\kappa y U_\infty / \varepsilon)^k]$.

Необходимо различать три случая:

а) При малом градиенте скорости $-xU_\infty^{-1} dU_\infty/dx$ функция $f(x)$ убывает с увеличением x ; в этом случае след ведет себя так же, как в случае без градиента скорости. Так как в этом случае речь идет только о малых градиентах, этот случай не представляет интереса с точки зрения технического применения.

б) В предельном случае $f(x)$ равняется постоянной konst. Этот случай для применения в технике, вероятно, представляет наибольший интерес; при таком изменении градиента скорости $-xU_\infty^{-1} dU_\infty/dx$, при котором скорость в следе изменяется в зависимости от этого предположения, не угрожает неустойчивость в следах, и энергетические потери сравнительно малы.

в) При увеличении градиента скорости $-xU_\infty^{-1} dU_\infty/dx$ выше предельного случая, функция $f(x)$ с возрастанием x растет. Это значит, что начиная с определенного x в средней области следа уже возникает обратное течение; энергетические потери очень быстро возрастают.

В работе разбирается только случай б) для $k = 1$.

В работе была доказана следующая теорема: Пусть N — натуральное число, пусть, далее, изменение составляющей скорости вне следа (т.е. при $|y| \rightarrow \infty$) в направлении оси x задано выражением $U_\infty = U_\infty(1) x^{-(2N+1)/(2N+3)}$ и коэффициент турбулентного трения пусть задан выражением $\varepsilon/xU_\infty = \kappa^2(2N+3) : \lambda^2(2N+1)$. Дальше, пусть для $\eta = \lambda^2(2N+1) y/\kappa(2N+2)x$ и $n = 2/(2N+1)$. Пусть для $y = 0$ справедливо условие $u/U_\infty = \sqrt{1-c_0}$ (u -составляющая скорости в направлении оси x). Тогда существует такое $C > 0$, что для всех c_0 , удовлетворяющих неравенству $0 \leq c_0 < C$, профиль скоростей является функцией одной переменной η . Для всех приходящих во внимание c_0 можно решить уравнение (5,1) последовательными приближениями; так найдем функцию $\Phi(\Psi)$, при помощи ее определим из уравнения (5,20) и (5,21) переменную величину η и u/U_∞ как функции переменного Ψ . Коэффициенты λ, κ и c_0 должны быть определены экспериментальным путем.

Summary

SIMILAR WAKES IN RETARDED FLOW

MILÓŠ RŮŽIČKA

The paper presents an analysis of the following problem: to determine the velocity distribution at a great distance downstream of a swept body in the case that the velocity in the flow field decreases with increasing x -coordinate.

It is assumed that the velocity distribution is symmetrical relative to the x -axis (i. e. the axis of the diffuser). It is further assumed that the walls of the diffuser are at a sufficiently great distance from the swept body; then the wake is not destroyed by the

boundary layer increasing on the diffuser walls. The origin of the rectangular system of coordinates x, y is placed at the leading edge of the body; the quantities x, y are dimensionless, $x = 1, y = 0$ at the trailing edge of the swept body.

The flow field is assumed to be two-dimensional and stationary, the flowing medium incompressible. It is further assumed that the velocity distributions in sections $x = \text{const.}$ normal to the x -axis are similar at a sufficiently great distance downstream. This is to be understood as in equation (1,1), where κ, k are certain constants and ε denotes the coefficient of turbulent friction. We assume that ε is a function of x only.

The solution of the problem calls for the determination of functions $f(x)$ and $g[(\kappa y U_\infty / \varepsilon)^k]$ and constants κ, k for the given velocity distribution. This procedure, however, is not adopted in this paper, since it is not certain whether for a given distribution of velocity U_∞ , the functions $f(x)$ and $g[(\kappa y U_\infty / \varepsilon)^k]$ actually exist. We shall proceed as follows: take a function $f(x)$ and a value of k , and determine the class of functions U_∞ which satisfy this choice; for each U_∞ of this class, $g[(\kappa y U_\infty / \varepsilon)^k]$ will be determined.

In retarded flow the behaviour of the wake may, in principle, assume one of the following three characters:

a) At a small velocity gradient $-x U_\infty^{-1} dU_\infty/dx$ the function $f(x)$ decreases with increasing x ; the wake behaves similarly as in the case of a flow field without velocity gradient. Since only small gradients are involved, this case is of no interest from the point of view of engineering application.

b) In the limit case $f(x) = \text{const.}$; this is probably the most interesting case from the engineering aspect. For a velocity gradient $-x U_\infty^{-1} dU_\infty/dx$ at which velocity behaves in accordance with the above assumption, there is still no danger of instability in the wakes, and the power losses are still reasonable.

c) Above the limit value of the velocity gradient $-x U_\infty^{-1} dU_\infty/dx$ the function $f(x)$ increases with increasing x . This means that starting from a certain x , reverse flow occurs in the central region of the wake, the power losses increase and the turbo-machine is no longer fully exploited.

The present paper is only concerned with the case of b) and limited to $k = 1$.

The following theorem has been proved: Let N be a positive integer; furthermore, let the x -component of the velocity distribution outside the wake (i.e. for $|y| \rightarrow \infty$) be given by $U_\infty = U_\infty(1) x^{-(2N+1)/(2N+3)}$, and the coefficient of turbulent friction be given by $\varepsilon/x U_\infty = \kappa^2(2N+3)/\lambda^2(2N+1)$. Let $\eta = \lambda^2(2N+1) y/\kappa(2N+2)x$ and $n = 2/(2N+1)$, and let the condition $u/U_\infty = \sqrt{1-c_0}$ be satisfied for $y \rightarrow 0$ (u is the x -component of velocity). Then there exists a $C > 0$ such that for all c_0 with $0 \leq c_0 < C$, the velocity distribution u/U_∞ is a function of η only. For all c_0 , the equation (5,1) may be solved by sequential approximation. In this manner the function $\Phi(\Psi)$ may be found; using $\Phi(\Psi)$, the variable η and u/V_∞ may be computed as function of Ψ . The coefficients λ, κ and c_0 must be determined by experiment.

Adresa autora: C.Sc. Miloš Růžička, Státní výzkumný ústav tepelné techniky, Husova 8, Praha 1.