Aplikace matematiky

Pavel Galajda

Niektoré nomogramy pre výpočet analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografickeho rodu v obore komplexnej premennej

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 2, 131–148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102889

NIEKTORÉ NOMOGRAMY PRE VÝPOČET ANALYTICKÝCH FUNKCIÍ PRVEJ NOMOGRAFICKEJ TRIEDY A DRUHÉHO NOMOGRAFICKÉHO RODU V OBORE KOMPLEXNEJ PREMENNEJ

PAVEL GALAJDA

(Došlo dňa 13. marca 1963.)

V tejto práci sú rozpracované normálne tvary analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu, ktoré sú prevedené na kanonické tvary a zostrojené ich príslušné zväzky nomogramov v obore komplexnej premennej.

Mnohé praktické úlohy sa dajú riešiť na základe teórie funkcií komplexnej premennej. Sú však s tým spojené určité ťažkosti, spočívajúce v tom, že výpočty hodnôt funkcií komplexnej premennej sú dosť zložité a zdĺhavé. Taktiež literatúra, týkajúca sa tabelovania funkcií komplexnej premennej, je skromná s výnimkou niektorých tabuliek funkcií ako [16] a [17].

Naskytá sa teda otázka, ako tieto ťažkosti obísť s prihliadnutím na presnosť výsledkov, požadovaných praxou. Metóda, ktorá sa v praxi doteraz pri riešení mnohých úloh veľmi osvedčila a nestráca ani dnes pri značnej výpočtovej technike na svojej aktuálnosti, je nomografická.

Z podnetu sovietskeho matematika-nomografa J. A. VIĽNERA pojednávam v tejto práci o niektorých normálnych tvaroch analytických funkcií uvedených v jeho prácach. S týmito funkciami sa v praxi veľmi často stretávame a ich približné riešenie pri použití obvyklých prostriedkov výpočtovej techniky je pracné a časove náročné. Približné riešenie nomografickou metódou je v bežnej praxi v mnohých prípadoch vyhovujúce.

Práca nadväzuje na výsledky J. A. Viľnera. V § 1 sú uvedené niektoré známe výsledky, ktoré v ďalšom používam. V § 2 a § 3 sa vyšetrujú normálne tvary (2.1) a (3.1), ktoré prevádzam na kanonické tvary a konštruujem zväzky nomogramov týchto analytických funkcií prvej nomografickej triedy a druhého nomografického rodu v obore komplexnej premennej. Ďalej sa ukazuje použitie Viľnerových výsledkov na nomografické zobrazenie elementárnych tvarov (2.1) a (3.1), pričom nie pre určité hodnoty parametrov, ako to robili pre niektoré elementárne tvary J. A. Viľner a pred nim J. RYBNER a H. SCHWERDT, ale pre ľubovolné hodnoty parametrov, z ktorých dostaneme zväzok nomogramov. Isté hodnoty parametrov sú volené len tie, ktorých zmena spôsobuje posunutie kótovania stupníc.

1. Nech je daná analytická funkcia

$$F(w, z) = 0\,, \tag{1.1}$$

kde $z = a + bi$, $w = p + qi$, $p = p(a, b)$, $q = q(a, b)$, $a = a(p, q)$, $b = b(p, q)$, pričom vylučujeme triviálny prípad lineárnej funkcie $w = \gamma z + \sigma$ s reálnym alebo rýdze imaginárnym koeficientom γ (komplexný prípad sa nevylučuje).

V tejto práci sa budem zaoberať spojnicovými nomogramami, ktoré sú schopné zobrazenia. Skôr, ako prikročíme k vlastnej práci, pripomeňme si niektoré základné pojmy o funkcii (1.1).

Analytickú funkciu $w(z) = p + qi$ komplexnej premennej $z = a + bi$ budeme nazývať *nomografickou*, ak sa dá zobraziť spojnicovým nomogramom o štyroch stupniciach, zobrazujúcich štyri reálne premenné a, b, p, q, nezávislej premennej z a závislej premennej w. Počet krivých stupníc spojnicového nomogramu funkcie reálnej premennej nazývame *rodom* nomogramu.

Pojem rodu nomogramu reálnej funkcie o troch premenných

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1.2}$$

rozšírime aj na funkciu komplexnej premennej (1.1). Pojem rodu nomogramu rovnice taktiež podobným spôsobom sa zovšeobecňuje na nomogramy systémov rovníc o ľubovoľnom počte premenných, špeciálne na nomogramy systémov dvoch rovníc

$$f_1(x, y, z_1) = 0\,, \quad f_2(x, y, z_2) = 0 \tag{1.3}$$

o štyroch reálnych premenných x, y, z_1, z_2 a špeciálne na nomogramy funkcie komplexnej premennej (1.1), alebo, čo je to isté, na nomogramy dvojíc reálnych rovníc

$$p = u(a, b)\,, \quad q = v(a, b)\,, \tag{1.4}$$

kde namiesto x, y, z_1, z_2 píšeme postupne odpovedajúce a, b, p, q, pričom pravé strany rovníc (1.4), tj. funkcie $u(a, b)$ a $v(a, b)$, vytvárajú dvojicu združených harmonických funkcií splňujúce Cauchy-Riemannove podmienky $p_a = q_b$, $p_b = -q_a$ alebo $a_p = b_q$, $a_q = -b_p$.

Je potrebné poznamenať, že pojem rodu nomogramu rovnice (1.2) nemôže byť prenesený z nomogramu na rovnicu (1.2), lebo v obecnom prípade pre rovnicu (1.2) neplatí veta o jednoznačnosti nomogramu nomografickej funkcie (1.2) aj čo do kolineácie, ako to ukázal J. A. Viľner v práci [4].

V prácach [7], [12] bola dokázaná jednoznačnosť nomogramu nomografickej funkcie (1.1) aj čo do kolineácie a teda to nám umožňuje určiť nomografický rod nomografického systému (1.3) a špeciálne nomografickej analytickej funkcie (1.1), ako rod zodpovedajúceho nomogramu (v reálnom obore obecne hovoriac táto veta neplatí).

Predpokladajme rovnicu (1.1) riešenú vzhľadom na z a položme

$$a = a(p, q), \quad b = b(p, q), \tag{1.5}$$

kde a, b je opäť dvojica združených harmonických funkcií.

Ďalej sú nám potrebné funkcie τ a $\bar{\tau}$, určené rovnicami

$$\tau = \frac{u_a}{u_b}, \quad \bar{\tau} = \frac{a_p}{a_q}, \tag{1.6}$$

kde u_a, u_b, a_p, a_q sú parciálne derivácie odpovedajúcich harmonických funkcií a na základe Cauchyho-Riemannových podmienok splňujú vzťah

$$\tau = -\bar{\tau}. \tag{1.7}$$

J. A. Viľner v práci [12] dokázal, že rod nomogramu funkcie (1.1) môže byť len párny, tj. 0,2 a 4. Nomogram rodu 0 obsahuje štyri priamočiare stupnice. Nomogram rodu 2 obsahuje dve priamočiare stupnice a, b a dve krivočiaré stupnice p, q alebo naopak (no v žiadnom prípade nie kombinácie a, p alebo a, q alebo b, q na tej istej kužeľosečke). Nomogram rodu 4 obsahuje dve krivočiare stupnice p, q na jednej kužeľosečke a dve krivočiare stupnice a, b na druhej kužeľosečke.

Definícia 1. *Analytické funkcie včítane až do druhého nomografického rodu budeme nazývať funkciami prvej nomografickej triedy*; ***všetky iné analytické funkcie, ktoré sa dajú zobraziť pomocou nomogramov, budeme nazývať funkciami druhej nomografickej triedy.***

Pre prevedenie rovnice (1.1) do kanonického tvaru zavedieme si nasledujúcu symboliku:

Nech

$$\tau = \operatorname{tg} \varphi, \tag{1.8}$$

kde φ je ľubovoľná harmonická funkcia dvoch premenných a, b (alebo p, q, potom v tomto prípade namiesto τ a φ budeme písať $\bar{\tau}$ a $\bar{\varphi}$).

Označme

$$\bar{j} = \frac{2\tau_b + \tau_a - (\tau_a/\tau)}{1 + \tau^2}, \quad \bar{i} = \frac{2\tau_a + (\tau_b/\tau) - \tau\tau_b}{1 + \tau^2}, \tag{1.9}$$

$$\varphi_1 = 2\,\frac{\tau_b - (\tau_a/\tau)}{1 + \tau^2}, \quad \psi_1 = 2\,\frac{\tau_a - \tau\tau_b}{1 + \tau^2}, \tag{1.10}$$

$$\varphi_2 = 2\,\frac{\tau_b + \tau\tau_a}{1 + \tau^2}, \quad \psi_2 = 2\,\frac{(\tau_b/\tau) + \tau_a}{1 + \tau^2},$$

kde τ_a, τ_b sú parciálne derivácie funkcie (1.2) podľa jednotlivých premenných.

Ďalej označme

$$T = e^{\int_{a_0,b_0}^{a,b} \varphi_1 \, da + \psi_1 \, db + C_1}, \qquad S = e^{\int_{a_0,b_0}^{a,b} \varphi_2 \, da + \psi_2 \, db + C_2} \tag{1.11}$$

$$\mu = e^{-\int_{b_0}^{b} j \, db + C_3}, \qquad \lambda = e^{-\int_{a_0}^{a} j \, da + C_4}, \tag{1.12}$$

$$L(\tau) = (1 + \tau^2)(\tau\tau_{aa} + \tau\tau_b) - 2\tau(\tau_a^2 + \tau_b^2), \tag{1.13}$$

$$y = \frac{1 - \tau^2}{2\tau}, \tag{1.14}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{aa} + \varphi_{bb}, \tag{1.15}$$

$$X = \int \lambda \, da + C', \quad Y = \int \frac{db}{\mu} + C''. \tag{1.16}$$

Pre funkciu (1.1) podľa definície 1 platí táto *veta* [4]:

Nutná a postačujúca podmienka, aby analytická funkcia (1.1) *bola prvej triedy s priamočiarými stupnicami zodpovedajúcej premennej z, je, aby bola splnená jedna z troch ekvivalentných rovníc:*

$$j_b = 0, \quad i_a = 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial p \, \partial q} = 0; \tag{1.17}$$

ak je pritom naviac ešte splnená aj podmienka

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial a \, \partial b} = 0, \tag{1.18}$$

potom funkcia (1.1) *bude rodu* 0 *a v opačnom prípade rodu* 2.

Definícia 2. *Za predpokladu, že analytická funkcia* (1.1) *je prvej nomografickej triedy vyjadrená systémom dvoch rovníc s reálnymi premennými všeobecne štvrtého nomografického rádu v tvare*

$$\begin{aligned} S(p)\,X(a) + Y(b) + H(p) &= 0, \\ T(q)\,X(a) + Y(b) + R(q) &= 0, \end{aligned} \tag{1.19}$$

potom rovnice (1.19) *nazývame kanonickým tvarom, s ktorým každý analytický vzťah* (1.1) *prvej nomografickej triedy je ekvivalentný v tom zmysle, že z* (1.1) *vyplývajú rovnice* (1.19) [12] (*opačne nie je zapotreby*).

Definícia 3. *Funkcie $X(a)$, $Y(b)$ v rovniciach* (1.19) *sa nazývajú priamočiare stupnice a funkcie $S(p)$, $H(p)$, $T(q)$, $R(q)$ krivočiare stupnice nomografickej funkcie prvej triedy.*

Premennú (z) zobrazenú priamočiarou stupnicou budeme nazývať *priamočarou* a premennú (w) zobrazenú krivočiarou stupnicou zasa *krivočiarou.*

Nomogramy analytickej funkcie prvej triedy v krátkosti budeme nazývať nomogramy prvej triedy.

Rovnice (1.19) zobrazíme podľa teórie spojnicových nomogramov [15] prepísaním na dva Massauovove determinanty

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{X(a)}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{Y(b)}, & 1 \\ -\frac{S(p)}{H(p)}, & -\frac{1}{H(p)}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{X(a)}, & 0, & 1 \\ 0, & \frac{1}{Y(b)}, & 1 \\ -\frac{T(q)}{R(q)}, & -\frac{1}{R(q)}, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

z ktorých zobrazovacie rovnice stupníc nomogramov prvej triedy s presnosťou aj čo do kolineácie sú

$$(1.20) \qquad \begin{aligned} X_a &= \frac{1}{X(a)}, & Y_a &= 0, \\ X_b &= 0, & Y_b &= \frac{1}{Y(b)}, \\ X_p &= -\frac{S(p)}{H(p)}, & Y_p &= -\frac{1}{H(p)}, \\ X_q &= -\frac{T(q)}{R(q)}, & Y_q &= -\frac{1}{R(q)}. \end{aligned}$$

Funkcie $S = S(p)$, $T = T(q)$, $X = X(a)$, $Y = Y(b)$ určíme z danej funkcie (1.1).

J. A. Viľner našiel všetky nomografické funkcie tvaru (1.1) prvej triedy v jednoduchšom explicitnom tvare, rozriešené vzhľadom na w alebo z a takým spôsobom nájdené jednoduchšie (explicitné) tvary všetkých nomografických funkcií prvej triedy

$$(1.21) \qquad w = f(z), \quad z = \varphi(w),$$

nazval normálne tvary nomografických funkcií.

Zvlášť dôležité z nich sú základné normálne tvary funkcii prvej triedy. Normálne tvary nomografických funkcií prvej triedy, nájdené J. A. Viľnerom, ktoré sú vyjadrené pomocou elementárnych funkcií, autor pomenoval *elementárnymi normálnymi tvarmi*, a druhé, vyjadrené pomocou neelementárnych funkcií, autor pomenoval *neelementárnymi normálnymi tvarmi* nomografických funkcií prvej triedy.

J. A. Viľner v práci [12] ukázal, že tvarom (2.1) a (3.1) a taktiež neelementárnym tvarom odpovedajú zväzky nomogramov. Zostrojil zväzky pre neelementárne tvary a pre elementárne zostrojil nomogramy len pre jednotlivé hodnoty konštánt $z_0 = 0$, $w_0 = 0$, $\gamma = 1$, $N = 1$, pričom nie pre všetky označené funkcie S, C a T. Tieto nomogramy boli nim uverejnené už dávnejšie a teraz opäť zverejnené v práci [14]. Ďalej v práci [12] dokázal nasledujúcu *vetu*:

Kanonické tvary a stupnice funkcie prvej nomografickej triedy majú tvar:

a) *ak* $C_1 \neq 0$, $\bar{j}_a \neq 0$, $\bar{i}_b \neq 0$, *potom*

$$\left(\tau\sqrt{\frac{\bar{j}_a}{\bar{i}_b}}\right)\left(\frac{\bar{j}}{\sqrt{\bar{j}_a}}\right)+\left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)+\left(-\frac{\tau\bar{j}+\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)=0, \tag{1.22}$$

$$\left(-\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\bar{j}_a}{\bar{i}_b}}\right)\left(\frac{\bar{j}}{\sqrt{\bar{j}_a}}\right)+\left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)+\left(\frac{(\bar{j}/\tau)-\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)=0,$$

$$S=\tau\sqrt{\frac{\bar{j}_a}{\bar{i}_b}},\quad H=-\frac{\tau\bar{j}+\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}},\quad X=\frac{\bar{j}}{\sqrt{\bar{j}_a}}, \tag{1.23}$$

$$Y=\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}},\quad T=-\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\bar{j}_a}{\bar{i}_b}},\quad R=\left(\frac{(\bar{j}/\tau)-\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right);$$

b) *ak* $C_1 \neq 0$, $\bar{j}_a = 0$, $\bar{i}_b \neq 0$, *potom*

$$\left(\frac{\tau\bar{j}e^{\bar{j}_a}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)(e^{-\bar{j}_a})+\left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)+\left(-\frac{\tau\bar{j}+\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)=0, \tag{1.24}$$

$$\left(-\frac{\bar{j}e^{\bar{j}_a}}{\tau\sqrt{\bar{i}_b}}\right)(e^{-\bar{j}_a})+\left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)+\left(\frac{(\bar{j}/\tau)-\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}}\right)=0,$$

$$S=\frac{\tau\bar{j}e^{\bar{j}_a}}{\sqrt{\bar{i}_b}},\quad H=-\frac{\tau\bar{j}+\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}},\quad X=e^{-\bar{j}_a}, \tag{1.25}$$

$$Y=\frac{\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}},\quad T=-\frac{\bar{j}e^{\bar{j}_a}}{\tau\sqrt{\bar{i}_b}},\quad R=\frac{(\bar{j}/\tau)-\bar{i}}{\sqrt{\bar{i}_b}};$$

c) *ak* $C_1 \neq 0$, $\bar{j}_a \neq 0$, $\bar{i}_b = 0$, *potom*

$$\left(\frac{\tau\sqrt{\bar{j}_a}e^{\bar{i}_b}}{\bar{i}}\right)\left(\frac{\bar{j}}{\sqrt{\bar{j}_a}}\right)+(e^{\bar{i}_b})+\left[-e^{\bar{i}_b}\left(\frac{\tau\bar{j}}{\bar{i}}+1\right)\right]=0, \tag{1.26}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{\bar{j}_a}e^{\bar{i}_b}}{\tau\bar{i}}\right)\left(\frac{\bar{j}}{\sqrt{\bar{j}_a}}\right)+(e^{\bar{i}_b})+\left[e^{\bar{i}_b}\left(\frac{\bar{j}}{\tau\bar{i}}-1\right)\right]=0,$$

$$S=\left(\frac{\tau\sqrt{\bar{j}_a}e^{\bar{i}_b}}{\bar{i}}\right),\quad H=\left[-e^{\bar{i}_b}\left(\frac{\tau\bar{j}}{\bar{i}}+1\right)\right],\quad X=\frac{\bar{j}}{\sqrt{\bar{j}_a}}, \tag{1.27}$$

$$Y=e^{\bar{i}_b},\quad T=\left(-\frac{\sqrt{\bar{j}_a}e^{\bar{i}_b}}{\tau\bar{i}}\right),\quad R=\left[e^{\bar{i}_b}\left(\frac{\bar{j}}{\tau\bar{i}}-1\right)\right];$$

d) *ak* $C_1 = 0, \bar{j}_a \neq 0, \quad \bar{i}_b \neq 0,$ *potom*

$$(1.28) \qquad \left(-\frac{\tau\bar{j}}{\bar{i}}\right)\left(\frac{1}{\bar{j}^2}\right) + \left(\frac{1}{\bar{i}^2}\right) + \left(\frac{\tau}{\bar{i}\bar{j}} - \frac{1}{\bar{i}^2}\right) = 0\,,$$

$$\left(\frac{\bar{j}}{\tau\bar{i}}\right)\left(\frac{1}{\bar{j}^2}\right) + \left(\frac{1}{\bar{i}^2}\right) + \left[-\left(\frac{1}{\tau\bar{i}\bar{j}} + \frac{1}{\bar{i}^2}\right)\right] = 0\,,$$

$$(1.29) \qquad S = -\frac{\tau\bar{j}}{\bar{i}}, \quad H = \frac{\tau}{\bar{i}\bar{j}} - \frac{1}{\bar{i}^2}, \quad X = \frac{1}{\bar{j}^2},$$

$$Y = \frac{1}{\bar{i}^2}, \qquad T = \frac{\bar{j}}{\tau\bar{i}}, \qquad R = \left[-\left(\frac{1}{\tau\bar{i}\bar{j}} + \frac{1}{\bar{i}^2}\right)\right];$$

e) *ak* $C_1 = 0, \quad \bar{j}_a \neq 0, \quad \bar{i}_b = 0,$ *potom*

$$(1.30) \qquad \left(-\frac{\tau\bar{j}}{2}\right)\left(\frac{1}{\bar{j}^2}\right) + (b) + \left(\frac{\tau}{2\bar{j}} - b\right) = 0\,,$$

$$\left(\frac{\bar{j}}{2\tau}\right)\left(\frac{1}{\bar{j}^2}\right) + (b) + \left[-\left(\frac{1}{2\tau\bar{j}} + b\right)\right] = 0\,,$$

$$(1.31) \qquad S = -\frac{\tau\bar{j}}{2}, \quad H = \frac{\tau}{2\bar{j}} - b\,; \quad X = \frac{1}{\bar{j}^2},$$

$$Y = b\,; \qquad T = \frac{\bar{j}}{2\tau}, \qquad R = \left[-\left(\frac{1}{2\tau\bar{j}} + b\right)\right];$$

f) *ak* $C_1 = 0, \quad \bar{j} = 0, \quad \bar{i}_b \neq 0,$ *potom*

$$(1.32) \qquad \left(\frac{2\tau}{\bar{i}}\right)(a) + \left(\frac{1}{\bar{i}^2}\right) + \left[-\left(\frac{2a\tau}{\bar{i}} + \frac{1}{\bar{i}^2}\right)\right] = 0\,,$$

$$\left(-\frac{2}{\tau\bar{i}}\right)(a) + \left(\frac{1}{\bar{i}^2}\right) + \left(\frac{2a}{\tau\bar{i}} - \frac{1}{\bar{i}^2}\right) = 0\,,$$

$$(1.33) \qquad S = \frac{2\tau}{\bar{i}}, \quad H = -\left(\frac{2a\tau}{\bar{i}} + \frac{1}{\bar{i}^2}\right), \quad X = a\,,$$

$$Y = \frac{1}{\bar{i}^2}, \quad T = -\frac{2}{\tau\bar{i}}, \qquad R = \left(\frac{2a}{\tau\bar{i}} - \frac{1}{\bar{i}^2}\right);$$

g) *ak* $C_1 = 0, \quad \bar{j} = 0, \quad \bar{i} = 0,$ *potom*

$$(1.34) \qquad (\tau)(a) + (b) + [-(a\tau + b)] = 0\,,$$

$$\left(-\frac{1}{\tau}\right)(a) + (b) + \left(\frac{a}{\tau} - b\right) = 0\,,$$

$$
(1.35) \qquad S = \tau\,, \quad H = \left[-(a\tau + b)\right], \quad X = a\,,
$$
$$
Y = b\,, \quad T = -\frac{1}{\tau}\,, \quad R = \frac{a}{\tau} - b\,.
$$

Formuly, vyjadrujúce (S, H); (T, R) premenných p, q dostaneme, ak k (1.23), (1.25), (1.27), (1.29) (1.31), (1.33), (1.35) pripojíme zároveň nasledujúce formuly ($\tau = -\tau$)

$$
(1.36) \qquad \bar{j} = \frac{1}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \cdot \frac{(\bar{\tau}_q/\bar{\tau}) - \bar{\tau}_p}{1 + \bar{\tau}^2}\,, \quad \bar{i} = \frac{1}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \cdot \frac{\bar{\tau}_q + \bar{\tau}_p/\bar{\tau}}{1 + \tau^2}\,,
$$

$$
\bar{j}_a = -\frac{1}{\tau \operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \cdot \frac{\bar{\tau}_q + (\bar{\tau}_p/\bar{\tau})}{1 + \bar{\tau}^2}\right]_p =
$$
$$
= -\frac{1}{\bar{\tau} \operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \cdot \frac{\bar{\tau}_q + (\bar{\tau}_p/\bar{\tau})}{1 + \bar{\tau}^2}\right]_q,
$$

$$
\bar{i}_b = \frac{1}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \cdot \frac{\bar{\tau}_q + (\bar{\tau}_p/\bar{\tau})}{1 + \bar{\tau}^2}\right]_p =
$$
$$
= -\frac{1}{\bar{\tau} \operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)} \cdot \frac{\bar{\tau}_q + \bar{\tau}_p/\bar{\tau}}{1 + \bar{\tau}^2}\right]_q.
$$

$$
(1.37) \quad \tau j + \bar{i} = \frac{\bar{\tau}_p}{\bar{\tau} \operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)}\,, \quad \frac{j}{\tau} - \bar{i} = -\frac{\bar{\tau}_q}{\bar{\tau}^2 \operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)}\,, \quad \bar{\tau} = -\frac{\operatorname{Re}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)}{\operatorname{Im}(\mathrm{d}z/\mathrm{d}w)}\,.
$$

Z uvedeného vyplýva, že pri prevedení normálnych tvarov nomografických funkcií prvej triedy na kanonické stačí nájsť $\bar{\tau}$, $\sqrt{|\bar{j}_a|}$, $\sqrt{|\bar{i}_b|}$ z daného vzťahu (1.1) a v obecnom prípade využiť (1,36).

V nasledujúcich paragrafoch ukážem použitie predchádzajúcich výsledkov na nomografické zobrazenie elementárnych normálnych tvarov (2.1) a (3.1), pričom nie pre určité hodnoty parametrov, ako to robili pre niektoré elementárne tvary J. A. Viľner a pred nim J. Rybner a H. Schwerdt, ale pre ľubovoľné hodnoty parametrov, z ktorých dostaneme zväzok nomogramov. Isté hodnoty parametrov sú volené len tie, ktorých zmena spôsobuje posunutie kótovanie stupníc.

2. Uvažujme normálny tvar [5]

$$
(2.1) \qquad z - z_0 = \frac{1}{\gamma}\, C[N(w - w_0)]\,,
$$

kde C sú funkcie sin, cos, sh, ch, ďalej N a γ ľubovoľné reálne alebo rýdze imaginárne čísla, $z_0 = a_0 + b_0 i$ $w_0 = p_0 + q_0 i$ ľubovoľné komplexné čísla.

Funkcia (2.1) je druhého nomografického rodu. Zobrazíme normálny tvar (2.1) pre funkciu sinus

$$
(2.2) \qquad z - z_0 = \frac{1}{\gamma} \sin\left[N(w - w_0)\right]\,,
$$

ktorý prevedieme na kanonické tvary a z nich určíme zodpovedajúce zobrazovacie rovnice.

a) Predpokladajme, že γ je reálne číslo. Na základe kanonického tvaru (1.28) z rovníc (1.29) určíme S, H, X, Y, T, R, ktoré pre vzťah (2.2) sú

$$(2.3) \qquad S = -\frac{\tau \bar{j}}{\bar{i}} = -\frac{\cos^2 p}{\sin^2 p}, \qquad H = \frac{\tau}{\bar{i}\bar{j}} - \frac{1}{\bar{i}^2} = \frac{\cos^2 p}{\gamma^2},$$

$$X = \frac{1}{\bar{j}^2} = (a - a_0)^2, \qquad Y = \frac{1}{\bar{i}^2} = (b - b_0)^2,$$

$$T = \frac{\bar{j}}{\tau \bar{i}} = \frac{\mathrm{sh}^2 q}{\mathrm{ch}^2 q}, \qquad R = \left[-\left(\frac{1}{\tau \bar{i}\bar{j}} + \frac{1}{\bar{i}^2}\right)\right] = -\frac{\mathrm{sh}^2 q}{\gamma^2}.$$

Teda kanonické tvary pre prípad (2.2) podľa (2.3) budú v tvare

$$(2.4) \qquad \left(\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}\right)(a - a_0)^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}\right)(b - b_0)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2 q}\right)(a - a_0)^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2 q}\right)(b - b_0)^2 = 1.$$

Porovnaním (2.4) so základným kanonickým tvarom (1.19) pre ktorý platia zobrazovacie rovnice (1.20), dostaneme zobrazovacie rovnice pre prípad (2.2), ktoré sú

$$(2.5) \qquad X_a = \frac{1}{(a - a_0)^2}, \qquad Y_a = 0,$$

$$X_b = 0, \qquad Y_b = \frac{1}{(b - b_0)^2},$$

$$X_p = \frac{\gamma^2}{\sin^2 p}, \qquad Y_p = -\frac{\gamma^2}{\cos^2 p},$$

$$X_q = \frac{\gamma^2}{\mathrm{ch}^2 q}, \qquad Y_q = \frac{\gamma^2}{\mathrm{sh}^2 q}.$$

Z rovnice pre X_p a Y_p vylúčením p dostaneme

$$\frac{1}{X_p} - \frac{1}{Y_p} = \frac{1}{\gamma^2}.$$

Z rovnice pre X_q a Y_q vylúčením q dostaneme

$$\frac{1}{X_q} - \frac{1}{Y_q} = \frac{1}{\gamma^2}.$$

Teda nositeľkou pre premenné p a q sú hyperboly, ktoré budeme písať vo tvare

$$\frac{1}{X_{(p,q)}} - \frac{1}{Y_{(p,q)}} = \frac{1}{\gamma^2} \tag{2.6}$$

pre oba prípady. Vytvárajúcou sústavou kótovaných hyperbol je zväzok lúčov o rovniciach $y_p = - x_p \operatorname{tg}^2 p$, $y_q = x_q \operatorname{cth}^2 q$, ktoré dostaneme z rovníc (2.5).

b) Predpokladajme, že γ je rýdzo imaginárne číslo, potom obdobne dostaneme

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\sin^2 p}{\cos^2 p}, & H &= \frac{\sin^2 p}{\gamma^2}, \\ X &= (a - a_0)^2, & Y &= (b - b_0)^2, \\ T &= \frac{\operatorname{ch}^2 q}{\operatorname{sh}^2 q}, & R &= \frac{\operatorname{ch}^2 q}{\gamma^2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Teda kanonické tvary v prípade, že γ je rýdze imaginárne číslo, majú tvar

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}\right)(b - b_0)^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\cos^2 p}\right)(a - a_0)^2 = 1, \\ &\left(-\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}\right)(b - b_0)^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}\right)(a - a_0)^2 = 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Opäť porovnaním (2.8) so základným kanonickým tvarom (1.19), pre ktorý platia zobrazovacie rovnice (1,20), dostaneme zobrazovacie rovnice pre vzťah (2.2), ktoré sú

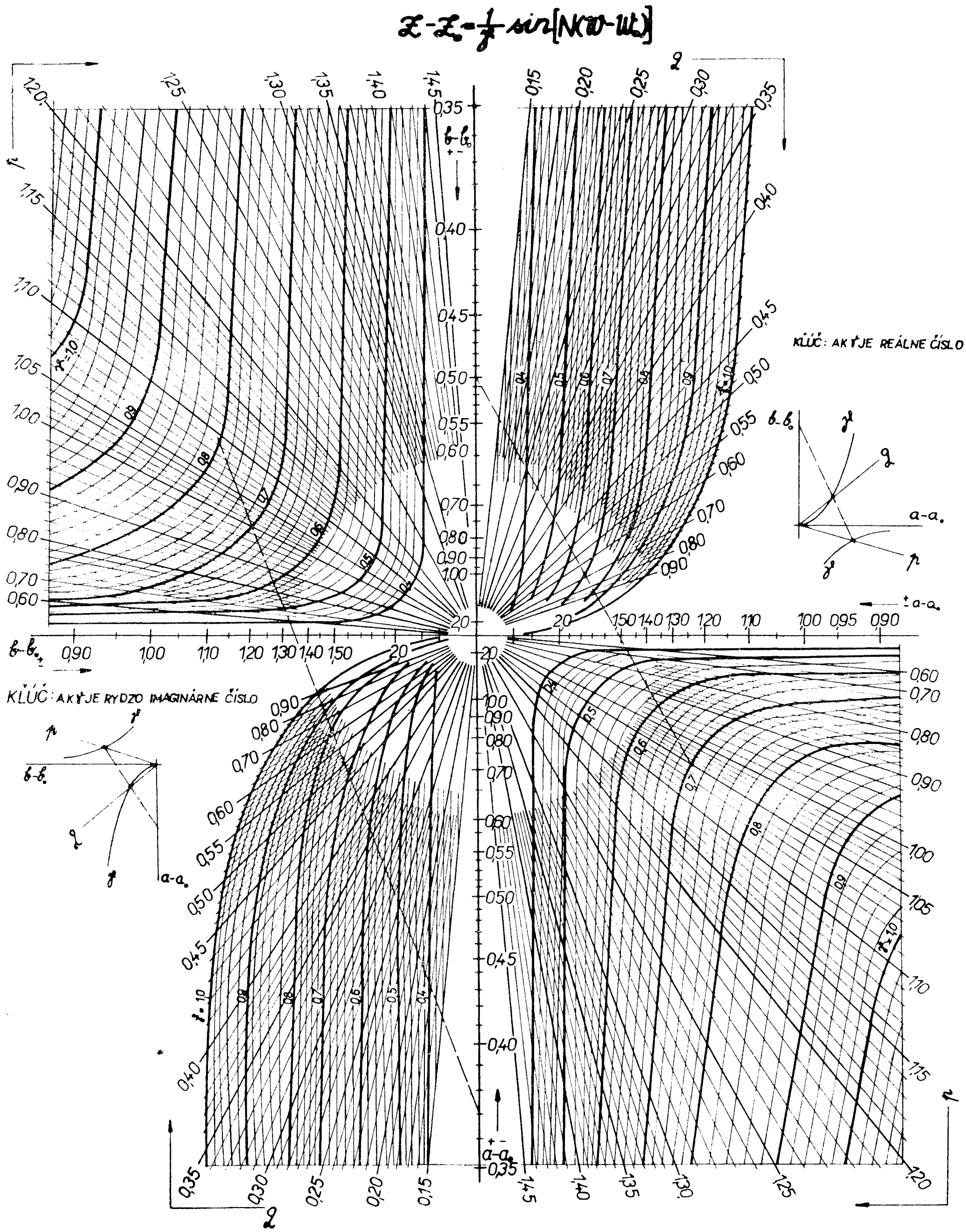
$$\begin{aligned} X_a &= \frac{1}{(a - a_0)^2}, & Y_a &= 0, \\ X_b &= 0, & Y_b &= \frac{1}{(b - b_0)^2}, \\ X_p &= \frac{\gamma^2}{\cos^2 p}, & Y_p &= -\frac{\gamma^2}{\sin^2 p}, \\ X_q &= -\frac{\gamma^2}{\operatorname{sh}^2 q}, & Y_q &= -\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^2 q}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Z rovníc pre X_p a Y_p vylúčením p, z rovníc pre X_q a Y_q vylúčením q, dostaneme

$$\frac{1}{X_{(p,q)}} - \frac{1}{Y_{(p,q)}} = \frac{1}{\gamma^2}, \tag{2.10}$$

čiže nositeľkou pre p a q bude zasa hyperbola a priamkami $p =$ konšt. a $q =$ konšt. bude zväzok priamok so stredom v bode dotyku o rovniciach $y_p = - x_p \operatorname{ctg}^2 p$, $y_q = x_q \operatorname{th}^2 q$, čo je vidieť aj z rovníc Viľnera [12]. Na základe zobrazovacích rovníc

(2.5) a (2.9) [zobrazovacie rovnice (2.9) pri zostrojení nomogramu boli upravené tak, že prvý a druhý stĺpec bol násobený s (-1) a súradnice navzájom boli vymenené] bol zestrojený nomogram na obr. 1 pre funkciu (2.2), pričom moduly boli volené $m = 10$, $n = 2$ a pre rýdzo imaginárne $m = 2$, $n = 10$.



Obr. 1.

Ako je vidieť z rovníc (2.5) resp. (2.9) funkcia (2.2) sa zobrazí nomogramom, ktorý pozostáva z dvoch priamočiarych stupníc pre (a), (b) a pri parametre γ zo sústavy hyperbol, ktoré sú nositeľkami stupníc p, q a predchádzajú cez tri reálne body, majúce spoločnú dotyčnicu v jednom z nich; dve tetivy, vychádzajúce z bodu dotyku, sú zároveň nositeľkami stupníc $(a - a_0)$, $(b - b_0)$. Peiamkami $p =$ const. a $q =$ const. je zväzok priamok, prechádzajúcich cez počiatok (obr. 1).

Na obr. 1 je zostrojený nomogram pre parameter γ, ak tento je reálne číslo a zároveň ak γ je rýdzo imaginárne číslo. Pri čítaní sa treba riadiť kľúčom, ktorý je znázornený na obrázku, ako pre γ reálne, tak aj pre γ rýdzo imaginárne číslo, pričom w_0 bolo volené nula, tj. $p_0 = 0$ a taktiež $q_0 = 0$.

Príklad 1. Pre dané $a - a_0 = 1{,}50$, $b - b_0 = 0{,}50$, $w_0 = 0$, $\gamma = 0{,}70$, čítame podľa kľúča $p \approx 1{,}05$, $q \approx 0{,}65$.

Príklad 2. Pre dané $a - a_0 = 0{,}37$, $b - b_0 = 1{,}35$, $w_0 = 0$, $\gamma = 0{,}8i$, čítame podľa kľúča $p \approx 1{,}093$, $q \approx 0{,}65$.

Príklad 3. Pre dané $a - a_0 = 0{,}35$, $b - b_0 = 1{,}10$, $w_0 = 0$, $\gamma = 0{,}94i$, čítame podľa kľúča $p \approx 1{,}04$, $q \approx 0{,}60$.

Príklad 4. Pre dané $a - a_0 = 1{,}30$, $b - b_0 = 0{,}40$, $w_0 = 0$, $\gamma = 0{,}62$, čítame podľa kľúča $p \approx 0{,}86$. $q \approx 0{,}42$.

Teda na nomograme k danej dvojici čísel a, b môžeme čítať im zodpevedajúcu dvojicu čísel p a q, alebo k danej dvojici čísel p a q je možno čítať dvojicu čísel a, b.

3. Nech je daný normálny tvar [5]

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma}(w - w_0)^2 \tag{3.1}$$

alebo

$$z - z_0 = \alpha w^2 + \beta w + \delta\,,$$

kde α je ľubovoľná reálna alebo rýdzo imaginárna konštanta, β a γ ľibovoľné komplexné čísla.

Je to tak isto funkcia druhého nomografického rodu. Tvar (3.1) provedieme na kanonické tvary a nájdeme im zodpovedajúce zobrazovacie rovnice.

a) Predpokladajme zase, že γ je reálne číslo. Na základe kanonického tvaru (1.32) z rovníc (1.33) určíme

$$S = \frac{2\tau}{i} = \frac{4p^2}{\gamma}\,, \qquad H = -\left(\frac{2a\tau}{\bar{i}} + \frac{1}{\bar{i}^2}\right) = -\left(\frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0p^2}{\gamma}\right), \tag{3.2}$$

$$X = a\,, \qquad Y = \frac{1}{\bar{i}^2} = (b - b_0)^2\,,$$

$$T = -\frac{2}{\tau\bar{i}} = \frac{4q^2}{\gamma}\,, \qquad R = \frac{2a}{\tau\bar{i}} - \frac{1}{\bar{i}^2} = \left(\frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0q^2}{\gamma}\right).$$

Teda kanonické tvary pre základný tvar (3.1) budú

$$a\left(\frac{4p^2}{\gamma}\right) + (b - b_0)^2 - \left(\frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4a_0p^2}{\gamma}\right) = 0\,, \tag{3.3}$$

$$a\left(\frac{4q^2}{\gamma}\right) - (b - b_0)^2 + \left(\frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4a_0q^2}{\gamma}\right) = 0\,.$$

Porovnaním (3.3) so základným kanonickým tvarom (1.19) pre ktorý platia zobrazovacie rovnice (1.20) dostaneme zobrazovacie rovnice pre prípad (3.1), ktoré sú

$$X_a = \frac{1}{a}\,, \qquad Y_a = 0\,, \tag{3.4}$$

$$X_b = 0\,, \qquad Y_b = \frac{1}{(b - b_0)^2}\,,$$

$$X_p = \frac{\gamma}{p^2 + a_0\gamma}\,, \qquad Y_p = \frac{\gamma^2}{4p^2(p^2 + a_0\gamma)}\,,$$

$$X_q = -\frac{\gamma}{q^2 - a_0\gamma}\,, \qquad Y_q = \frac{\gamma^2}{4q^2(q^2 - a_0\gamma)}\,.$$

Z rovníc pre X_p a Y_p vylúčením p dostaneme

$$Y_p = \frac{X_p^2}{4(1 - a_0X_p)}\,.$$

Z rovníc pre X_q a Y_q vylúčením q dostaneme

$$Y_q = \frac{X_q^2}{4(1 - a_0X_q)}\,,$$

čiže nositeľkou pre stupnice p a q sú hyperboly, ktoré budeme písať v tvare

$$Y_{(p,q)} = \frac{X_{(p,q)}^2}{4(1 - a_0X_{(p,q)})} \tag{3.5}$$

pre oba prípady. Vytvárajúcou sústavou kótovaných hyperbol je zväzok lúčov o rovniciach $y_p = (\gamma/4p^2)\,X_p$, $y_q = -(\gamma/4q^2)\,X_q$, ktoré dostaneme z rovníc (3.4).

b) Predpokladajme, že γ je rýdzo imaginárne číslo. Podobne na základe (1.29) dostaneme

$$S = -\frac{\tau\bar{j}}{2} = 1\,, \qquad H = \frac{\tau}{2\bar{j}} - b = \frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4ib_0p^2}{\gamma}\,, \tag{3.6}$$

$$X = \frac{1}{\bar{j}^2} = (a - a_0)\,, \qquad Y = b\,,$$

$$T = \frac{\bar{j}}{2\tau} = 1\,, \qquad R = \left[-\left(\frac{1}{2\tau\bar{j}} + b\right)\right] = \frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4ib_0q^2}{\gamma}\,.$$

Teda kanonický tvar v prípade, že γ je rýdzo imaginárne číslo, bude v tvare

$$(3.7) \qquad (a - a_0)^2 - \frac{4ip^2}{\gamma} b + \left(\frac{4p^4}{\gamma^2} + \frac{4ib_0 p^2}{\gamma}\right) = 0 ,$$

$$(a - a_0)^2 + \frac{4iq^2}{\gamma} b + \left(\frac{4q^4}{\gamma^2} - \frac{4ib_0 q^2}{\gamma}\right) = 0 .$$

Porovnaním rovníc (3.7) so základným kanonickým tvarom (1.19) na základe (1.20) dostaneme zobrazovacie rovnice

$$(3.8) \qquad X_a = \frac{1}{(a - a_0)^2} , \qquad Y_a = 0 ,$$

$$X_b = 0 , \qquad Y_b = \frac{1}{b} ,$$

$$X_p = - \frac{\gamma^2}{4p^2(p^2 + i\gamma b_0)} , \qquad Y_p = \frac{i\gamma}{p^2 + i\gamma b_0} ,$$

$$X_q = - \frac{\gamma^2}{4q^2(q^2 - i\gamma b_0)} , \qquad Y_q = - \frac{i\gamma}{q^2 - i\gamma b_0} .$$

Z rovníc pre X_p a Y_p vylúčením p a z rovníc X_q a Y_q vylúčením q dostaneme

$$(3.9) \qquad X_{(p,q)} = \frac{Y^2_{(p,q)}}{4[1 - b_0 Y_{(p,q)}]} ,$$

čiže nositeľky pre p a q sú opäť hyperboly a priamkami p = const. a q = const. bude taktiež zväzok priamok so stredom v bode dotyku o rovniciach

$$y_p = (- 4p^2/\gamma)\, iX_p , \quad y_q = (4q^2/\gamma)\, iX_q .$$

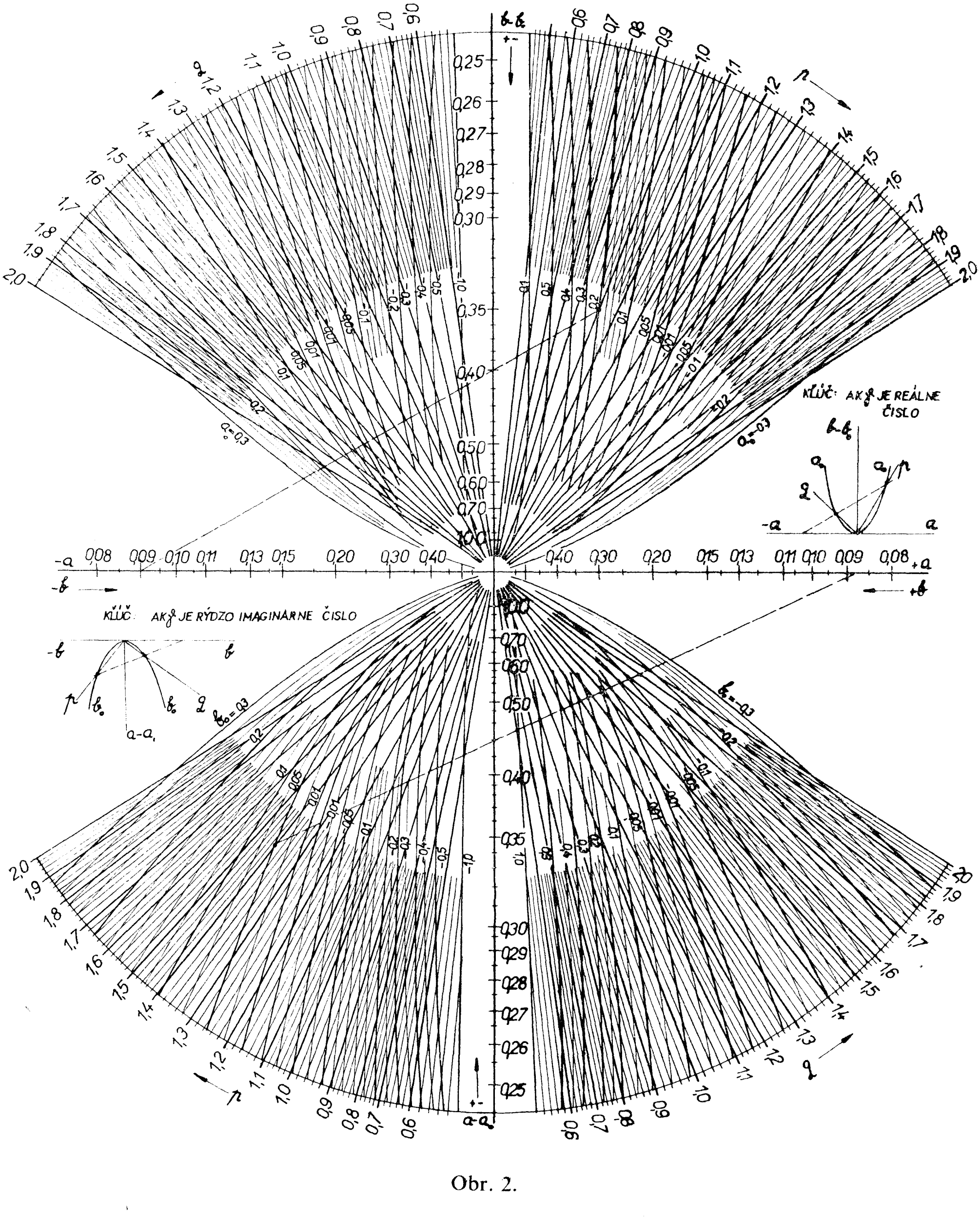
Nomogram na obr. 2 pre vzťah (3.1) bol zostrojený na základe zobrazovacích rovníc (3.4) a (3.8); pri zostrojení nomogramu zobrazovacie rovnice (3.8) boli tak iste upravené ako rovnice (2.9).

Z rovnice (3.4) resp. (3.8) je vidieť, že funkcia (3.1) pre γ reálne a γ imaginárne sa nám zobrazila nomogramom, ktorý má dve priamočiare stupnice (a), (b) (pri γ reálnom bolo volené b_0 — const. a a_0 — patameter a pre γ imaginárne číslo a_0 — const. a b_0 — parameter) a zo sústav hyperbol, ktoré sú nositeľkami stupníc p, q. Priamočiare stupnice (a), (b) sú spoločné dotyčnice týchto hyperbol a tetiva sústavy v ich priesečníku má dotyk druhého stupňa.

Priamkami p = const. a q = const. je taktiež zväzok priamok prechádzajúcich cez počiatok obr. 2.

Na obr. 2 je zostrojený nomogram ako pre γ reálne, tak aj pre γ rýdzo imaginárne číslo, ktoré sme zvolili $\gamma = 10$ a $\gamma = 10i$.

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma}(w - w_0)^2$$



Obr. 2.

Pri čítaní sa treba riadiť kľúčom, ktorý je znázornený na obrázku ako pre γ reálne, tak aj pre γ rýdzo imaginárne číslo, pričom w_0 bolo volené nula, tj. $p_0 = 0$ a taktiež $q_0 = 0$.

Príklad 1. Pre dané $a = -0{,}09$, $b - b_0 = 0{,}40$, $w_0 = 0$, $a_0 = 0{,}21$, čítame podľa kľúča $p \approx 1{,}00$ a $q \approx 2{,}00$.

Príklad 2. Pre dané $b = 0{,}088$, $a - a_0 = 0{,}439$, $w_0 = 0$, $b_0 = 0{,}05$, čítame podľa kľúča $p \approx 1{,}41$ a $q \approx 1{,}54$.

Príklad 3. Pre dané $b = -0{,}15$, $a - a_0 = 0{,}354$, $w_0 = 0$, $b_0 = 0{,}10$, čítame podľa kľúča $p \approx 1{,}86$ a $q \approx 0{,}984$.

Príklad 4. Pre dané $a = 0{,}11$, $b - b_0 = 0{,}35$, $a_0 = -0{,}05$, $w_0 = 0$, čítame podľa kľúča $p \approx 1{,}66$ a $q \approx 1{,}07$.

Príklady 1 a 4 sú pre γ rýdzo imaginárne číslo a príklady 2 a 3 pre γ reálne číslo.

Rozsah jednotlivých premenných pre prípad (2,2) bol volený takto:

Ak γ je reálne číslo:	Ak γ je rýdzo imaginárne číslo:
γ $\langle 0{,}3;\ 1{,}0\rangle$	
$\lvert a - a_0\rvert$ $\langle 0{,}90;\ 3{,}00\rangle$	$\lvert a - a_0\rvert$ $\langle 0{,}35;\ 2{,}00\rangle$
$\lvert b - b_0\rvert$ $\langle 0{,}35;\ 2{,}00\rangle$	$\lvert b - b_0\rvert$ $\langle 0{,}90;\ 3{,}00\rangle$
p $\langle 0{,}60;\ 1{,}45\rangle$	p $\langle 0{,}60;\ 1{,}45\rangle$
q $\langle 0{,}15;\ 0{,}90\rangle$	q $\langle 0{,}15;\ 0{,}90\rangle$

Pre prípad (3.1):

Ak γ je reálne číslo:	Ak γ je rýdzo imaginárne číslo:
a_0 $\langle -0{,}3;\ 0{,}3\rangle$	b_0 $\langle -0{,}3;\ 0{,}3\rangle$
$\lvert a\rvert$ $\langle 0{,}08;\ 0{,}55\rangle$	$\lvert b\rvert$ $\langle 0{,}08;\ 0{,}55\rangle$
$\lvert b - b_0\rvert$ $\langle 0{,}25;\ 1{,}00\rangle$	$\lvert a - a_0\rvert$ $\langle 0{,}25;\ 1{,}00\rangle$
p $\langle 0{,}5;\ 2{,}0\rangle$	p $\langle 0{,}5;\ 2{,}0\rangle$
q $\langle 0{,}5;\ 2{,}0\rangle$	q $\langle 0{,}5;\ 2{,}0\rangle$

Teda pomocou nomogramov na obr. 1 a obr. 2 môžeme k ľubovoľným dvom daným argumentom z daného rozsahu nájsť odpovedajúce druhé argumenty a riešiť iné obdobné úlohy.

Literatúra

[1] *И. А. Вильнер:* Номограмма для определения гиперболического синуса и косинуса от комплексного аргумента. Журнал „Электричество", № 12 (1934), № 17 (1935).

[2] *И. А. Вильнер:* Номограмма для вычисления эллиптических интегралов. Журнал „Электричество", № 6 (1935).

[3] *И. А. Вильнер:* Номограмма для вычисления гиперболического и кругового тангенсов и котангенсов от комплексного аргумента. Прикл. мат. и мех., т. IV, в. 1 (1940).

[4] *И. А. Вильнер:* О номографировании систем уравнений и аналитеческих функций. Прикл. мат. и мех., т. IV, в. 2 (1940).

[5] *J. A. Vil'ner:* Analytical functions of a complex variable of the first nomographic class and their nomograms. DAN SSSR, 53, No 3 (1946).
[6] *И. А. Вильнер:* О номографировании эллиптических функций и интегралов в комплексной области. ДАН СССР, 55, № 9 (1947).
[7] *И. А. Вильнер:* Номограммы систем уравнений и аналитических функций. ДАН СССР, 58, № 5 (1947).
[8] *И. А. Вильнер:* Пучок совместных конических номограмм из выравненных точек для изображения эллиптического интеграла первого рода, Успехи матем. наук, т. II, в. 6 (22), (1947).
[9] *И. А. Вильнер:* Номографирование аналитических функций. ДАН СССР, 63, № 2 (1948).
[10] *И. А. Вильнер:* Приведение номографируемой аналитической зависимости к нормальной форме. ДАН СССР, 69, № 1 (1949).
[11] *И. А. Вильнер:* Аналитическая теория номографирования функций комплексного переменного первого класса. Математический сборник 27 (69) : 1 (1950).
[12] *И. А. Вильнер:* Номографирование систем уравнений и аналитических функций. Номографический сборник (1951).
[13] *И. А. Вильнер:* Номограммы для вычисления эллиптических функций и интегралов, УМН, 9 : 2 (60), (1954).
[14] *И. А. Вильнер:* О номографической апроксимации эллиптических функций и номограммы в комплексных проективных плоскостях. Сборник Вычислительная математика АН СССР, № 7 (1961).
[15] *Н. А. Глаголев:* Курс номографии (1961).
[16] *A. E. Kennelly:* Tables of complex hyperbolic and circular functions. Cambridge 1927.
[17] *E. Jahnke, F. Emde:* Tafeln höherer Functionen. 1943.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ НОМОГРАММЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПЕРВОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО КЛАССА И ВТОРОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ЖАНРА ОТ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

ПАВЕЛ ГАЛАЙДА (Pavel Galajda)

В этой статье были на основании теории Вильнера разработаны канонические представления для основных нормальных форм

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} C\left[N(w - w_0)\right],$$

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} (w - w_0)^2,$$

где C означает функции sin, cos, sh, ch.

На основании этого были построены пучки их номограмм. Метод преобразования был выбран так, чтобы на одном чертеже была построена номограмма, если параметр γ принимает действительные и чисто мнимые значения.

Zusammenfassung

NOMOGRAMME FÜR DIE AUSRECHNUNG ANALYTISCHER FUNKTIONEN DER ERSTEN NOMOGRAPHISCHEN KLASSE UND DES ZWEITEN NOMOGRAPHISCHEN GESCHLECHTES IM BEREICH EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN

PAVEL GALAJDA

Im vorgelegten Artikel werden mit Hilfe der Wilnerschen Theorie kanonische Formen für die Beziehungen

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} C[N(w - w_0)]$$

und

$$z - z_0 = \frac{1}{\gamma} (w - w_0)^2$$

abgeleitet, wobei C eine der beliebige Funktionen sin, cos, sh, ch bedeutet. Auf Grund dieser kanonischen Formen wurden auch gewisse einparametrische Nomogrammbüschel konstruiert. Die Darstellungsmethode wurde so gewählt, damit man auf einem Nomogramm die entsprechenden Werte sowie für reelles γ als auch für imaginäres γ lesen kann.

Adresa autora: Prom. mat. *Pavel Galajda*, Katedra matematiky Vysokej školy technickej, Park J. A. Komenského 2, Košice.