Aplikace matematiky

Vladimír Panc

Teorie tlakových nádob předpjatých pružnými prstenci

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 1, 1–30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102880

TEORIE TLAKOVÝCH NÁDOB PŘEDPJATÝCH PRUŽNÝMI PRSTENCI

VLADIMÍR PANC

(Došlo dne 26. března 1963.)

Základní rovnice okrajového problému v teorii válcových skořepin s kružnicovou střednicí průřezu. Statické řešení tenkostěnných tlakových nádob a potrubí předpjatých pružnými taženými nákružky nasazenými za tepla. Napjatost nádob vyztužených příčnými pružnými prstenci předpjatými vnitřními táhly.

POUŽITÁ OZNAČENÍ

$Mxyz$	levotočivá pravoúhlá souřadná soustava v libovolném bodě M střednicové plochy skořepiny — osa Mx ve směru osy Ox konstrukce, osy My a Mz ve směru tečny a vnitřní normály ke střednici průřezu,
r	poloměr křivosti střednice průřezu,
$\xi = x/r$, φ	bezrozměrné souřadnice bodu M,
$u(\xi, \varphi)$, $v(\xi, \varphi)$, $w(\xi, \varphi)$	složky vektoru posunutí bodu M ve směru os Mx, My a Mz,
$n_x(\xi, \varphi)$, $n_\varphi(\xi, \varphi)$	měrné normálné síly v bodě M ve směru os Mx a My,
$n_{x\varphi}(\xi, \varphi) = n_{\varphi x}(\xi, \varphi)$	měrná smyková síla v bodě M,
$m_x(\xi, \varphi)$, $q_x(\xi, \varphi)$, $m_\varphi(\xi, \varphi)$, $q_\varphi(\xi, \varphi)$	měrný ohybový moment a posouvající síla v bodě M působící v příčném a podélném řezu,
$m_{x\varphi}(\xi, \varphi)$	měrný kroutící moment,
h	tloušťka skořepiny,
$k = h^2/12r^2$	
E	modul pružnosti materiálu skořepiny,
ν	Poissonovo číslo,
∇^2	Laplaceův operátor — $\nabla^2 = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\varphi^2$.

1. ÚVOD

Základní soustavu tří parciálních diferenciálních rovnic přesné teorie válcových skořepin s kružnicovou střednicí průřezu podal ve své monografii [1] FLÜGGE. Při numerickém řešení vedou ovšem relace přesné teorie pro svou přílišnou složitost ke značně zdlouhavým výpočtům jednoduchých či dvojných Fourierových řad, takže konečné pracně získané numerické výsledky představují pouze jistou aproximaci problému. Pro řešení tenkostěnných nádob s rotačně souměrným zatížením, kdy platí $w = w(\xi)$, je pak v práci [1] odvozena zjednodušená přibližná rovnice, která nabývá při okrajové úloze homogenního tvaru

$$kw^{(4)} + (1 - \nu^2)\, w = 0\,. \tag{1.1}$$

Pro řešení okrajového problému při obecném okrajovém zatížení skořepiny byla různými autory odvozena celá řada zjednodušených přibližných základních rovnic, z nichž nejznámější

$$k\nabla^8 w + (1 - \nu^2)\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0 \tag{1.2}$$

podal poprvé Donnell [2]. Tato rovnice byla již mnohokráte užita při řešení různých stabilitních i okrajových problémů.

Donnell později navrhl doplnění rovnice (1.2) ve tvaru

$$\nabla^8 w + 2\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{1 - \nu^2}{k}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0\,. \tag{1.3}$$

Obdobné zpřesňující doplnění navrhl rovněž Morley [3]

$$\nabla^4(\nabla^2 + 1)^2\, w + \frac{1 - \nu^2}{k}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0\,. \tag{1.4}$$

Základní rovnici zcela stejného tvaru jako (1.2), definující však funkci $\Phi(\xi, \varphi)$, přičemž $\nabla^4\Phi = w$, $\zeta = Erh\,.\,\partial^2\Phi/\partial\xi^2$ (ζ – Airyho funkce napětí), odvodil v tzv. technické ohybové teorii skořepin Vlasov [4]. Úpravu Donnellovy rovnice pro řešení ortotropních skořepin podal Dąbrowski [5].

Vůbec nejjednodušší přibližnou základní rovnici okrajového problému pro zatížení podélných okrajů skořepiny navrhl Schorer [6]

$$k\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0\,, \tag{1.5}$$

který zanedbal ohybové momenty $m_x(\xi, \varphi)$ i momenty kroutící a užil několika dalších zjednodušení. Rovnice (1.5) může být s dostatečnou přesností užito pouze pro řešení dlouhých skořepin. Se zanedbáním stejných veličin byla podána v práci [7] základní rovnice, která představuje zpřesnění rovnice (1.5) a ve stabilitní úloze vede k výsledkům velmi dobře odpovídajícím provedeným zkouškám.

Velmi jednoduchá základní rovnice, již lze užít k přibližnému řešení vodorovných, šikmých i svislých nádob a potrubí, zatížených rotačně souměrně i rotačně antisymetricky, je podána v práci [8]. Pro okrajovou úlohu má tato rovnice tvar

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4}\,(k\nabla^4 w + w) = 0\,. \tag{1.6}$$

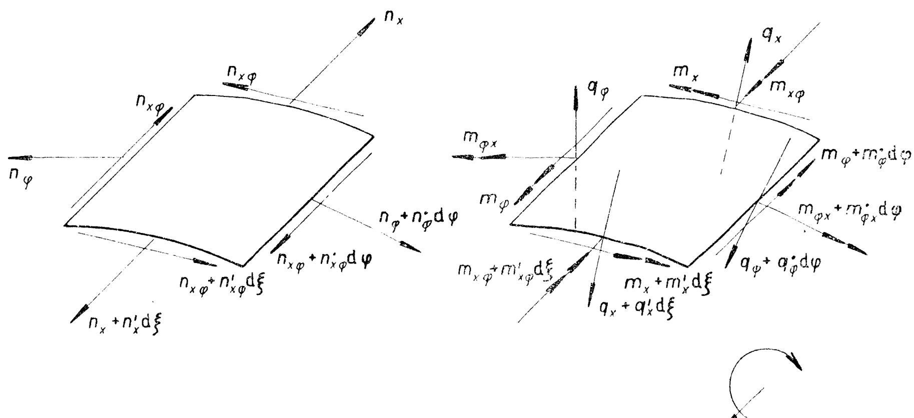
Přesnost výsledků, k nimž vede tato rovnice, se neliší příliš od přesnosti dosažené užitím Donnellovy rovnice (1.2).

2. ZÁKLADNÍ ROVNICE OKRAJOVÉHO PROBLÉMU

Položíme-li pro měrné kroutící momenty přibližně $m_{x\varphi} \doteq m_{\varphi x}$, nabudou výminky rovnováhy nezatíženého prvku skořepiny podle obr. 1 tvaru

$$
\frac{\partial n_x}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial \varphi} = 0\,, \quad \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial \xi} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \xi}\right) = 0\,, \tag{2.1}
$$

$$
n_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 m_{x\varphi}}{\partial \xi\,\partial \varphi} + \frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2}\right) = 0\,.
$$



Obr. 1. Zatížení prvku válcové skořepiny.

Do rovnic (2.1) byly za měrné posouvající síly q_x, q_φ dosazeny vztahy plynoucí z momentových výminek rovnováhy

$$
q_x = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial m_x}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \varphi}\right), \quad q_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \xi}\right). \tag{2.2}
$$

Měrné síly jsou podle [4] spjaty se složkami u, v, w vektoru posunutí relacemi

$$
n_x = \frac{D}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w\right)\right], \quad m_x = -\frac{K}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right), \tag{2.3}
$$

$$
n_\varphi = \frac{D}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w + \nu\,\frac{\partial u}{\partial \xi}\right], \quad m_\varphi = -\frac{K}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right),
$$

$$
n_{x\varphi} = (1 - \nu)\,\frac{D}{2r}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \quad m_{x\varphi} = -(1 - \nu)\,\frac{K}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \varphi}\,,
$$

v nichž je

$$
D = \frac{Eh}{1 - \nu^2}\,, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}\,. \tag{2.4}
$$

Dosazením vztahů (2.3) do podmínek (2.1) dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \varphi} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \,, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + k \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \, \partial \varphi} \right) = 0 \,,$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - k \nabla^4 w = 0 \,,$$

kde symbol k označuje veličinu

$$k = \frac{K}{Dr^2} = \frac{h^2}{12 r^2} \,. \tag{2.6}$$

Z prvých dvou rovnic (2.5) odvodíme eliminací

$$\nabla^4 u = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \, \partial \varphi^2} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} k \left(\frac{\partial^5 w}{\partial \xi \, \partial \varphi^4} + \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^3 \, \partial \varphi^2} \right), \tag{2.7}$$

$$\nabla^4 v = \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{2 - \nu(1 + \nu)}{1 - \nu} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \, \partial \varphi} -$$

$$- \frac{1}{1 - \nu} k \left[2 \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \, \partial \varphi} + (3 - \nu) \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^2 \, \partial \varphi^3} + (1 - \nu) \frac{\partial^5 w}{\partial \varphi^5} \right]$$

a dosazením do poslední rovnice (2.5) vyplývá základní rovnice okrajového problému

$$\nabla^8 w + \frac{2 - \nu(1 + \nu)}{1 - \nu} \frac{\partial^6 w}{\partial \xi^4 \, \partial \varphi^2} + \frac{3 - \nu(2 + \nu)}{1 - \nu} \frac{\partial^6 w}{\partial \xi^2 \, \partial \varphi^4} + \tag{2.8}$$

$$+ \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{1 - \nu^2}{k} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0 \,.$$

Rovnice (2.8) tedy vyjadřuje spolu s relacemi (2.7) přesně výminky rovnováhy (2.1) při platnosti vztahů (2.3) a představuje zpřesnění Donnellovy rovnice (1.2) i rovnic (1.3) a (1.4). Vadou rovnice (2.8) jsou však značné matematické komplikace při jejím užití.

Vlasov ([4]) dokázal na podkladě teoretických zkoumání i četných modelových zkoušek, že u tenkých skořepin (tj. pro $r/h \geqq 30$) je momentový člen podstatný pouze ve složkové výmince rovnováhy prvku střednicové plochy ve směru jeho normály, zatím co v rovnicích, vyjadřujících výminky rovnováhy ve střednicové ploše, může být vliv ohybové napjatosti bez hrubých chyb zanedbán. Zanedbáme-li tedy ve druhé výmince rovnováhy (2.1) a (2.5) momentový člen, nabudou rovnice (2.7) zjednodušeného tvaru

$$\nabla^4 u = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \, \partial \varphi^2} \,, \quad \nabla^4 v = \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{2 - \nu(1 + \nu)}{1 - \nu} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \, \partial \varphi} \tag{2.9}$$

a dosazením relací (2.9) do poslední výminky (2.5) dostaneme základní rovnici v Donnellově tvaru (1.2). Je jasné, že vzhledem k užitému zjednodušení klesá přesnost této rovnice se stoupající rychlostí změny zatížení ve směru souřadnice φ.

Je známo, že v okrajové úloze pro příčné okraje ξ = const skořepiny se nejvíce uplatňují členy obsahující nejvyšší derivaci podle proměnné ξ. Ponecháme-li vzhledem k této skutečnosti v rovnici (2.8) z výrazů, které jsou v rovnici (1.2) zanedbány, pouze člen s největším vlivem, dostaneme

$$\nabla^8 w + \frac{2 - \nu(1 + \nu)}{1 - \nu} \frac{\partial^6 w}{\partial \xi^4 \, \partial \varphi^2} + \frac{1 - \nu^2}{k} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} = 0 \,. \tag{2.10}$$

Analogicky též relace (2.7) resp. (2.9) nabudou nyní tvaru

$$\nabla^4 u = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \, \partial \varphi^2} + k \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^3 \, \partial \varphi^2} \,, \tag{2.11}$$

$$\nabla^4 v = \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{2 - \nu(1 + \nu)}{1 - \nu} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \, \partial \varphi} - k \frac{2}{1 - \nu} \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \, \partial \varphi} \,.$$

Přitom rovnice (2.10) zřejmě vyplývá ze vztahů (2.1) a (2.3), dosadíme-li za momentový člen do druhé výminky (2.1) přibližně

$$q_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \xi} \right) \doteq - \frac{K}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \, \partial \varphi} \,. \tag{2.12}$$

Rovnice (2.10) je tedy při okrajové úloze opět zpřesněním Donnellovy rovnice (1.2), přičemž její užití nepřináší žádných podstatných matematických komplikací.

Vzhledem k tomu, že při odvození všech podaných základních rovnic (1.2), (2.8) i (2.10) byly uvažovány též krouticí momenty, je ovšem třeba na okrajích ξ = const a φ = const skořepiny počítat s náhradními měrnými posouvajícími silami $\bar{q}_x$, $\bar{q}_\varphi$

$$\bar{q}_x = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial m_x}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \varphi} \right), \quad \bar{q}_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \xi} \right). \tag{2.13}$$

Při řešení okrajové úlohy pro podélné okraje φ = const dlouhé skořepiny se můžeme v prvém přiblížení omezit pouze na nejvyšší derivaci podle proměnné φ. Položíme-li ještě $\nu^2 = 0$, dostaneme z rovnic (1.2), (2.8) i (2.10) rovnici Schorerovu (1.5). Obdobným zjednodušením vyplývá pak z těchto rovnic pro zatížení v příčných okrajích ξ = const skořepiny s uzavřenou střednicí průřezu rovnice tvaru (1.6).

Pro potrubí a nádoby s rotačně souměrným okrajovým zatížením dostaneme z rovnic (1.2), (2.8) i (2.10) dosazením $w = w(\xi)$

$$k w^{(8)} + (1 - \nu^2) \, w^{(4)} = 0 \,. \tag{2.14}$$

Tato rovnice představuje zobecnění rovnice (1.1).

3. ROTAČNĚ SOUMĚRNÁ ÚLOHA

Označíme-li symbolem κ součinitel útlumu

$$\kappa = \left(\frac{1-\nu^2}{4k}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[(1-\nu^2)\,\frac{3r^2}{h^2}\right]^{\frac{1}{4}}, \tag{3.1}$$

je obecným řešením rovnice (2.14) funkce

$$\begin{aligned} w = {} & A_1 \operatorname{sh} \kappa\xi \sin \kappa\xi + A_2 \operatorname{sh} \kappa\xi \cos \kappa\xi + A_3 \operatorname{ch} \kappa\xi \sin \kappa\xi + \\ & + A_4 \operatorname{ch} \kappa\xi \cos \kappa\xi + A_5 + A_6\xi + A_7\xi^2 + A_8\xi^3 , \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde A_1 až A_8 jsou integrační konstanty. Protože nyní platí $v \equiv 0$, dostaneme dosazením funkce (3.2) do poslední rovnice (2.5)

$$u' = \nu w + \frac{1-\nu^2}{\nu}(A_5 + A_6\xi + A_7\xi^2 + A_8\xi^3) . \tag{3.3}$$

Z prvé podmínky (2.5) zřejmě plyne

$$A_6 = A_7 = A_8 = 0 , \tag{3.4}$$

takže rovnici (2.14) lze psáti ve tvaru

$$w^{(4)} + 4\kappa^4 w = 4\kappa^4 A_5 . \tag{3.5}$$

Pro posunutí u pak platí podle vztahů (3.3) a (3.4)

$$\begin{aligned} u = {} & \nu \int w \, d\xi + \frac{1-\nu^2}{\nu} A_5\xi + A_9 = \frac{\nu}{2\kappa} \left[(A_2 + A_3) \operatorname{sh} \kappa\xi \sin \kappa\xi - \right. \\ & - (A_1 - A_4) \operatorname{sh} \kappa\xi \cos \kappa\xi + (A_1 + A_4) \operatorname{ch} \kappa\xi \sin \kappa\xi + \left.(A_2 - A_3) \operatorname{ch} \kappa\xi \cos \kappa\xi\right] + \\ & + \frac{1}{\nu} A_5\xi + A_9 , \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde A_9 je další integrační konstanta.

Dosazením výrazů (3.2) a (3.3) do vzorců (2.2) a (2.3) odvodíme při platnosti (3.4) pro měrné síly a momenty

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1-\nu^2}{\nu}\,\frac{D}{r}\,A_5 = \frac{Eh}{\nu r} A_5 , \quad n_\varphi = -(1-\nu^2)\frac{D}{r}(w - A_5) = \\ &= -\frac{Eh}{r}(w - A_5) , \quad n_{x\varphi} \equiv 0 , \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$m_x = 2\kappa^2 \frac{K}{r^2}(A_4 \operatorname{sh} \kappa\xi \sin \kappa\xi - A_3 \operatorname{sh} \kappa\xi \cos \kappa\xi + A_2 \operatorname{ch} \kappa\xi \sin \kappa\xi - A_1 \operatorname{ch} \kappa\xi \cos \kappa\xi) ,$$

$$\begin{aligned} q_x = {} & 2\kappa^3 \frac{K}{r^3}\left[(A_2 + A_3) \operatorname{sh} \kappa\xi \sin \kappa\xi - (A_1 - A_4) \operatorname{sh} \kappa\xi \cos \kappa\xi + \right. \\ & + (A_1 + A_4) \operatorname{ch} \kappa\xi \sin \kappa\xi + \left.(A_2 - A_3) \operatorname{ch} \kappa\xi \cos \kappa\xi\right] , \end{aligned}$$

$$m_\varphi = \nu m_x , \quad q_\varphi \equiv 0 , \quad m_{x\varphi} \equiv 0 .$$

3.1 *Nádoba s volnou dilatací průřezů předpjatá taženými nákružky*

Je známo, že u tlakové nádoby s poměrně tlustou jednoduchou stěnou lze vzhledem k zákonu rozdělení napětí po tloušťce využít pevnosti materiálu jen málo. Proto se v technické praxi často provádějí tlakové nádoby jako předpjaté vrstevnaté konstrukce sestávající ze dvou nebo více plášťů navzájem na sebe nalisovaných nebo za tepla nasazených. Podobného efektu lze u tenkostěnných tlakových nádob dosáhnout též za tepla nasazenými pružnými nákružky v nepříliš velkých vzdálenostech.

Označme R poloměr křivosti střednice nákružku v jeho nenapjatém stavu, $\bar{R}$ poloměr křivosti nutný k volnému nasazení nákružku za normální teploty a ΔR rozdíl obou těchto poloměrů $\Delta R = \bar{R} - R$. Jestliže je α^0 součinitel tepelné roztaživosti materiálu nákružku, je ovšem nutno nákružek před nasazením ohřát minimálně o teplotu $t°C$

$$\min t^\circ = \frac{\Delta R}{R\alpha^\circ}. \tag{3.8}$$

Budiž dále E_p a F_p modul pružnosti v tahu a průřezová plocha nákružku. Vykáže-li skořepina v průřezu nasazení nákružku průhyb w_d, působí pružný nákružek na nádobu radiálním tlakem p

$$p = \frac{E_p F_p}{R^2}(\Delta R - w_d). \tag{3.9}$$

Vyšetřeme nyní jedno střední pole nádoby s velmi mnoha stejnými nákružky při volné dilataci průřezů. Délku pole, tj. vzdálenost nákružků, označme l. Jde tedy o úlohu souměrnou ke střednímu průřezu $\xi = 0$ vyšetřovaného pole, a proto bude

$$A_2 = A_3 = A_9 = 0. \tag{3.10}$$

Podmínka volné dilatace konstrukce je vyjádřena identitou $n_x \equiv 0$, a tedy podle prvého vzorce (3.7) je též

$$A_5 = 0. \tag{3.11}$$

Zbývající neznámé konstanty A_1 a A_4 je pak třeba stanovit z okrajových podmínek v průřezu působení nákružku

$$w' = 0, \quad q_x = \frac{1}{2}p \quad \text{pro} \quad \xi = \frac{l}{2r}. \tag{3.12}$$

Označíme-li symbolem β argument

$$\beta = \frac{\kappa l}{2r}, \tag{3.13}$$

vedou okrajové podmínky (3.12) podle vzorců (3.2), (3.7) a (3.9) při platnosti (3.10) a (3.11) k soustavě rovnic

$$A_1(\text{ch}\,\beta\sin\beta + \text{sh}\,\beta\cos\beta) - A_4(\text{ch}\,\beta\sin\beta - \text{sh}\,\beta\cos\beta) = 0\,, \tag{3.14}$$

$$A_1[\text{sh}\,\beta\sin\beta + H(\text{ch}\,\beta\sin\beta - \text{sh}\,\beta\cos\beta)] + \\ + A_4[\text{ch}\,\beta\cos\beta + H(\text{ch}\,\beta\sin\beta + \text{sh}\,\beta\cos\beta)] = \Delta R\,,$$

kde symbol H označuje poměrnou tuhost

$$H = \frac{4\kappa^3 K R^2}{E_p F_p r^3} = \frac{EhR^2}{E_p F_p r\kappa}\,. \tag{3.15}$$

Zaveďme symboly $D_{H,1}$, λ_1 a λ_2 pro výrazy

$$D_{H,1} = \text{sh}\,2\beta + \sin 2\beta + 2H(\text{ch}\,2\beta - \cos 2\beta)\,, \tag{3.16}$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{D_{H,1}}(\text{ch}\,\beta\sin\beta - \text{sh}\,\beta\cos\beta)\,, \quad \lambda_2 = \frac{2}{D_{H,1}}(\text{ch}\,\beta\sin\beta + \text{sh}\,\beta\cos\beta)\,.$$

Potom jsou řešením rovnic (3.14) veličiny

$$A_1 = \lambda_1\,\Delta R\,, \quad A_4 = \lambda_2\,\Delta R\,. \tag{3.17}$$

Funkce (3.2) a (3.6) složek posunutí nabývají tedy podle vzorců (3.4), (3.10), (3.11) a (3.17) tvaru

$$w = \Delta R(\lambda_1\,\text{sh}\,\kappa\xi\sin\kappa\xi + \lambda_2\,\text{ch}\,\kappa\xi\cos\kappa\xi)\,, \tag{3.18}$$

$$u = \frac{\nu}{2\kappa}\,\Delta R[(\lambda_1 + \lambda_2)\,\text{ch}\,\kappa\xi\sin\kappa\xi - (\lambda_1 - \lambda_2)\,\text{sh}\,\kappa\xi\cos\kappa\xi]$$

a pro nenulové měrné síly platí podle vzorců (3.7)

$$n_\varphi = -\frac{Eh}{r}\,w\,, \quad m_x = -2\kappa^2\,\Delta R\,\frac{K}{r^2}(\lambda_1\,\text{ch}\,\kappa\xi\cos\kappa\xi - \lambda_2\,\text{sh}\,\kappa\xi\sin\kappa\xi)\,, \tag{3.19}$$

$$q_x = \frac{4\kappa^4}{\nu}\,\frac{K}{r^3}\,u = \frac{Eh}{\nu r}\,u\,, \quad m_\varphi = \nu m_x\,.$$

Zavedeme-li dále symboly λ_3, λ_4 a λ_5 pro výrazy

$$\lambda_3 = \frac{1}{D_{H,1}}(\text{sh}\,2\beta + \sin 2\beta)\,, \quad \lambda_4 = \frac{1}{D_{H,1}}(\text{sh}\,2\beta - \sin 2\beta)\,, \tag{3.20}$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{D_{H,1}}(\text{ch}\,2\beta - \cos 2\beta)\,,$$

platí pro průřez $\xi = 0$

$$w = \lambda_2 \varDelta R = A_4 , \quad u = 0 , \quad n_\varphi = - \lambda_2 \frac{Eh \varDelta R}{r} , \tag{3.21}$$

$$m_x = - 2\lambda_1 \varDelta R \kappa^2 \frac{K}{r^2} = - \lambda_1 \frac{Eh^2 \varDelta R}{2r[3(1 - \nu^2)]^{\frac{1}{2}}} , \quad q_x = 0$$

a pro průřez $\xi = l/2r$

$$w = \lambda_3 \varDelta R , \quad u = \lambda_5 \frac{\nu}{\kappa} \varDelta R , \quad n_\varphi = - \lambda_3 \frac{Eh \varDelta R}{r} , \tag{3.22}$$

$$m_x = 2\lambda_4 \varDelta R \kappa^2 \frac{K}{r^2} = \lambda_4 \frac{Eh^2 \varDelta R}{2r[3(1 - \nu^2)]^{\frac{1}{2}}} , \quad q_x = \bar{q}_x = \lambda_5 \frac{Eh \varDelta R}{\kappa r} .$$

Při vyšetřované napjatosti se tedy jedno pole nádoby prodlouží podle druhého vzorce (3.22) o délku $\varDelta l$

$$\varDelta l = 2\lambda_5 \frac{\nu}{\kappa} \varDelta R . \tag{3.23}$$

Druhá podmínka (3.12) vede pak k relaci, jíž lze užít jako početní kontroly

$$2H\lambda_5 = 1 - \lambda_3 . \tag{3.24}$$

3.2 *Potrubí se zamezenou dilatací při předpínání*

Vyšetřeme nyní vliv zamezené dilatace průřezů konstrukce během chladnutí za tepla nasazených nákružků, případně v průběhu jejich nalisování. Praktický význam tohoto případu je ovšem ve srovnání s úlohou 3.1 malý.

Uvažujeme-li jedno ze středních polí dlouhé konstrukce, budou opět platit z důvodu souměrnosti úlohy ke střednímu průřezu $\xi = 0$ vyšetřovaného pole rovnice (3.10). Pro určení zbývajících neznámých integračních konstant A_1, A_4 a A_5 užijeme nyní okrajových podmínek

$$u = 0 , \quad w' = 0 , \quad q_x = \frac{1}{2} p , \quad \text{pro} \quad \xi = \frac{l}{2r} . \tag{3.25}$$

Zavedeme-li symboly (3.13) a (3.15), vedou tyto podmínky podle relací (3.2), (3.6), (3.7) a (3.9) k soustavě rovnic

$$A_1(\text{ch}\, \beta \sin \beta - \text{sh}\, \beta \cos \beta) + A_4(\text{ch}\, \beta \sin \beta + \text{sh}\, \beta \cos \beta) + A_5 \frac{2\beta}{\nu^2} = 0 , \tag{3.26}$$

$$A_1(\text{ch}\, \beta \sin \beta + \text{sh}\, \beta \cos \beta) - A_4(\text{ch}\, \beta \sin \beta - \text{sh}\, \beta \cos \beta) = 0 ,$$

$$A_1[\text{sh}\, \beta \sin \beta + H(\text{ch}\, \beta \sin \beta - \text{sh}\, \beta \cos \beta)] +$$
$$+ A_4[\text{ch}\, \beta \cos \beta + H(\text{ch}\, \beta \sin \beta + \text{sh}\, \beta \cos \beta)] + A_5 = \varDelta R .$$

Užijeme-li symbolů $D_{H,2}$, λ_6, λ_7 a λ_8 pro výrazy

$$D_{H,2} = \operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta + \left(2H - \frac{v^2}{\beta}\right)(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)\,, \tag{3.27}$$

$$\lambda_6 = \frac{2}{D_{H,2}}(\operatorname{ch}\beta \sin\beta - \operatorname{sh}\beta\cos\beta)\,, \quad \lambda_7 = \frac{2}{D_{H,2}}(\operatorname{ch}\beta\sin\beta + \operatorname{sh}\beta\cos\beta)\,,$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\beta D_{H,2}}(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)\,,$$

jsou řešením soustavy (3.26) veličiny

$$A_1 = \lambda_6\,\Delta R\,, \quad A_4 = \lambda_7\,\Delta R\,, \quad A_5 = -\,\lambda_8 v^2\,\Delta R\,. \tag{3.28}$$

Pro funkce (3.2) a (3.6) tedy nyní platí

$$w = \Delta R(\lambda_6 \operatorname{sh}\kappa\xi\sin\kappa\xi + \lambda_7\operatorname{ch}\kappa\xi\cos\kappa\xi - \lambda_8 v^2)\,, \tag{3.29}$$

$$u = \frac{v}{2\kappa}\Delta R\,[(\lambda_6 + \lambda_7)\operatorname{ch}\kappa\xi\sin\kappa\xi - (\lambda_6 - \lambda_7)\operatorname{sh}\kappa\xi\cos\kappa\xi - 2\lambda_8\kappa\xi]$$

a dosazením do vzorců (3.7) odvodíme pro nenulové měrné síly

$$n_x = -\,\lambda_8\frac{vEh\,\Delta R}{r} = \text{const}\,, \tag{3.30}$$

$$n_\varphi = -\,\frac{Eh\,\Delta R}{r}(\lambda_6\operatorname{sh}\kappa\xi\sin\kappa\xi + \lambda_7\operatorname{ch}\kappa\xi\cos\kappa\xi)\,,$$

$$m_x = -\,2\kappa^2\,\Delta R\,\frac{K}{r^2}(\lambda_6\operatorname{ch}\kappa\xi\cos\kappa\xi - \lambda_7\operatorname{sh}\kappa\xi\sin\kappa\xi)\,,$$

$$q_x = 2\kappa^3\,\Delta R\,\frac{K}{r^3}[(\lambda_6 + \lambda_7)\operatorname{ch}\kappa\xi\sin\kappa\xi - (\lambda_6 - \lambda_7)\operatorname{sh}\kappa\xi\cos\kappa\xi]\,,$$

$$m_\varphi = v m_x\,.$$

Zavedeme-li ještě symboly λ_9, λ_{10} a λ_{11} pro výrazy

$$\lambda_9 = \frac{1}{D_{H,2}}\left[\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta - \frac{v^2}{\beta}(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)\right], \tag{3.31}$$

$$\lambda_{10} = \frac{1}{D_{H,2}}(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta)\,, \quad \lambda_{11} = \frac{1}{D_{H,2}}(\operatorname{sh} 2\beta - \sin 2\beta)\,,$$

platí pro průřez $\xi = 0$

$$w = \Delta R\,(\lambda_7 - \lambda_8 v^2)\,, \quad u = 0\,, \quad n_\varphi = -\,\lambda_7\frac{Eh\,\Delta R}{r}\,, \tag{3.32}$$

$$m_x = -\,2\lambda_6\,\Delta R\,\kappa^2\frac{K}{r^2} = -\,\lambda_6\frac{Eh^2\,\Delta R}{2r[3(1-v^2)]^{\frac{1}{2}}}\,, \quad q_x = 0$$

a pro průřez $\xi = l/2r$

$$w = \lambda_9 \Delta R\,, \quad u = 0\,, \quad n_\varphi = -\lambda_{10} \frac{Eh\,\Delta R}{r}\,, \tag{3.33}$$

$$m_x = 2\lambda_{11}\,\Delta R\,\kappa^2 \frac{K}{r^2} = \lambda_{11} \frac{Eh^2\,\Delta R}{2r[3(1-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}}\,,$$

$$q_x = \bar{q}_x = 4\lambda_8\,\Delta R\,\beta\kappa^3 \frac{K}{r^3} = \lambda_8 \frac{Eh\beta\,\Delta R}{\kappa r}\,.$$

Z poslední podmínky (3.25) vyplývá opět kontrolní relace

$$2\beta H \lambda_8 = 1 - \lambda_9\,. \tag{3.34}$$

4. OBECNÁ OKRAJOVÁ ÚLOHA

Není-li okrajové zatížení nebo přetvoření nádoby rotačně souměrné, zvolíme funkce složek vektoru posunutí bodu střednicové plochy ve tvaru nekonečných goniometrických řad

$$u(\xi, \varphi) = u_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\xi) \cos n\varphi\,, \tag{4.1}$$

$$v(\xi, \varphi) = v_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\xi) \sin n\varphi\,,$$

$$w(\xi, \varphi) = w_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\xi) \cos n\varphi\,.$$

Funkce (4.1) vyjadřují ovšem při $v_0(\xi) \equiv 0$ přetvoření souměrné k rovině $\varphi = 0$. U převážné většiny úloh tato rovina souměrnosti existuje. Zcela obecné přetvoření lze pak složit z přetvoření (4.1) a z přetvoření, které je vzhledem k rovině $\varphi = 0$ antisymetrické. Funkcím (4.1) pak superponujeme funkce

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n \sin n\varphi\,, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \cos n\varphi\,, \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n \sin n\varphi\,.$$

Dosazením do vzorců (2.3) odvodíme pro měrné membránové síly

$$n_x = \frac{D}{r}(u_0' - \nu w_0) + \frac{D}{r} \sum_{n=1}^{\infty} [u_n' + \nu(n v_n - w_n)] \cos n\varphi\,, \tag{4.2}$$

$$n_\varphi = \frac{D}{r}(\nu u_0' - w_0) + \frac{D}{r} \sum_{n=1}^{\infty} (n v_n - w_n + \nu u_n') \cos n\varphi\,,$$

$$n_{x\varphi} = (1-\nu) \frac{D}{2r} v_0' + (1-\nu) \frac{D}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} (v_n' - n u_n) \sin n\varphi$$

a pro měrné ohybové i krouticí momenty platí

$$(4.3)\qquad m_x = -\frac{K}{r^2}w_0'' - \frac{K}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}(w_n'' - \nu n^2 w_n)\cos n\varphi\,,$$

$$m_\varphi = -\nu\frac{K}{r^2}w_0'' - \frac{K}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\nu w_n'' - n^2 w_n)\cos n\varphi\,,$$

$$m_{x\varphi} = (1-\nu)\frac{K}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty} n w_n' \sin n\varphi\,.$$

Dosazením výrazů (4.3) do vzorců (2.2) vyplývá pro měrné posouvající síly

$$(4.4)\qquad q_x = -\frac{K}{r^3}w_0''' - \frac{K}{r^3}\sum_{n=1}^{\infty}(w_n''' - n^2 w_n')\cos n\varphi\,,$$

$$q_\varphi = \frac{K}{r^3}\sum_{n=1}^{\infty} n(w_n'' - n^2 w_n)\sin n\varphi\,,$$

zatím co pro náhradní měrnou posouvající sílu $\bar{q}_x$ na okraji $\xi = \text{const}$ platí podle vzorců (2.13)

$$(4.5)\qquad \bar{q}_x = -\frac{K}{r^3}w_0''' - \frac{K}{r^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[w_n''' - (2-\nu)\,n^2 w_n'\right]\cos n\varphi\,.$$

4.1 *Řešení okrajové úlohy užitím Donnellovy rovnice*

Dosadíme-li příslušné derivace třetí funkce (4.1) do Donnellovy rovnice (1.2), dostaneme základní rovnici pro funkci $w_0(\xi)$

$$(4.6)\qquad w_0^{(8)} + 4\kappa^4 w_0^{(4)} = 0$$

a nekonečně mnoho rovnic pro funkce $w_n(\xi)$

$$(4.7)\qquad w_n^{(8)} - 4n^2 w_n^{(6)} + 6n^4 w_n^{(4)} - 4n^6 w_n'' + n^8 w_n + 4\kappa^4 w_n^{(4)} = 0\,,$$

v nichž je součinitel κ definován vzorcem (3.1). Rovnice (4.6) se zřejmě vztahuje k rotačně souměrné úloze, jejíž řešení bylo podáno v odst. 3.

Obecná řešení homogenních rovnic (4.7) jsou lineárními kombinacemi jejich partikulárních integrálů, které mají tvar exp $\mu_n\xi$. Dosadíme-li příslušné derivace této funkce do rovnice (4.7), dostaneme rovnici charakteristickou

$$(4.8)\qquad (\mu_n^2 - n^2)^4 + 4\kappa^4\mu_n^4 = 0\,,$$

jejímiž osmi kořeny jsou komplexní čísla

$$(4.9)\qquad \mu_{n,1,2,3,4} = \pm\, a_{n,1} \pm b_{n,1}\mathrm{i}\,,\quad \mu_{n,5,6,7,8} = \pm\, a_{n,2} \pm b_{n,2}\mathrm{i}\,,$$

kde $a_{n,1}$, $b_{n,1}$, $a_{n,2}$ a $b_{n,2}$ značí reálná čísla

$$
\begin{aligned}
(4.10) \qquad a_{n,1} &= \tfrac{1}{2}\{[(4n^4 + \kappa^4)^{\frac{1}{2}} + 2n^2]^{\frac{1}{2}} + \kappa\}\,, \\
b_{n,1} &= \tfrac{1}{2}\{[(4n^4 + \kappa^4)^{\frac{1}{2}} - 2n^2]^{\frac{1}{2}} + \kappa\}\,, \\
a_{n,2} &= \tfrac{1}{2}\{[(4n^4 + \kappa^4)^{\frac{1}{2}} + 2n^2]^{\frac{1}{2}} - \kappa\}\,, \\
b_{n,2} &= \tfrac{1}{2}\{[(4n^4 + \kappa^4)^{\frac{1}{2}} - 2n^2]^{\frac{1}{2}} - \kappa\}\,.
\end{aligned}
$$

Podle vzorců (4.9) vyhovují tedy rovnicím (4.7) funkce

$$
\begin{aligned}
(4.11) \qquad w_n = {} & C_{n,1} \operatorname{sh} a_{n,1}\xi \sin b_{n,1}\xi + C_{n,2} \operatorname{sh} a_{n,1}\xi \cos b_{n,1}\xi + \\
& + C_{n,3} \operatorname{ch} a_{n,1}\xi \sin b_{n,1}\xi + C_{n,4} \operatorname{ch} a_{n,1}\xi \cos b_{n,1}\xi + C_{n,5} \operatorname{sh} a_{n,2}\xi \sin b_{n,2}\xi + \\
& + C_{n,6} \operatorname{sh} a_{n,2}\xi \cos b_{n,2}\xi + C_{n,7} \operatorname{ch} a_{n,2}\xi \sin b_{n,2}\xi + C_{n,8} \operatorname{ch} a_{n,2}\xi \cos b_{n,2}\xi\,,
\end{aligned}
$$

kde $C_{n,1}$ až $C_{n,8}$ značí integrační konstanty.

Dosaďme nyní funkce (4.1) do rovnic (2.9), které odpovídají Donnellově rovnici. Tím dostaneme

$$
(4.12) \qquad u_0^{(4)} = \nu w_0''' \,, \quad v_0^{(4)} = 0
$$

a nekonečně mnoho rovnic tvaru

$$
\begin{aligned}
(4.13) \qquad u_n^{(4)} - 2n^2 u_n'' + n^4 u_n &= \nu w_n''' + n^2 w_n'\,, \\
v_n^{(4)} - 2n^2 v_n'' + n^4 v_n &= n^3 w_n - \frac{2 - \nu(1 + \nu)}{1 - \nu}\, n w_n''\,.
\end{aligned}
$$

Prvá rovnice (4.12) vyjadřuje spolu s rovnicí (4.6) rotačně souměrnou úlohu. Druhá rovnice (4.12) se zřejmě vztahuje k prostému kroucení konstrukce. Obecná řešení homogenních rovnic příslušných k rovnicím (4.13) jsou ovšem nulová, takže je třeba stanovit pouze jejich řešení partikulární.

Dále se pro zjednodušení záznamu budeme zabývat pouze n-tým členem řad (4.1), přičemž u integračních konstant i argumentů funkcí vynecháme index n. Obdobně jako v předchozích úlohách se omezíme na jedno střední pole velmi dlouhé nádoby s mnoha stejnými prstenci ve stejných vzdálenostech l. Potom funkce (4.11) musí být souměrná ke střednímu průřezu $\xi = 0$ vyšetřovaného pole, a proto bude platit

$$
(4.14) \qquad C_2 = C_3 = C_6 = C_7 = 0\,.
$$

Změníme-li označení integračních konstant, můžeme proto psát funkci (4.11) ve tvaru

$$
\begin{aligned}
(4.15) \qquad w_n = {} & C_{1,1} \operatorname{sh} a_1\xi \sin b_1\xi + C_{2,1} \operatorname{ch} a_1\xi \cos b_1\xi + C_{1,2} \operatorname{sh} a_2\xi \sin b_2\xi + \\
& + C_{2,2} \operatorname{ch} a_2\xi \cos b_2\xi = \sum_{i=1}^{2} (C_{1,i} \operatorname{sh} a_i\xi \sin b_i\xi + C_{2,i} \operatorname{ch} a_i\xi \cos b_i\xi)\,.
\end{aligned}
$$

Dosaďme nyní do pravých stran rovnic (4.13) příslušné derivace funkce (4.15), přičemž pro zjednodušení záznamu vyjádřeme hodnotu koeficientu v druhé rovnici číslem

$$\frac{2 - \nu(1 + \nu)}{1 - \nu} = 2{,}3\,, \tag{4.16}$$

které odpovídá $\nu = 0{,}3$. Dosazením vyplývá

$$\begin{aligned} &u_n^{(4)} - 2n^2 u_n'' + n^4 u_n = \\ &= \sum_{i=1}^{2} \{C_{1,i} b_i [\nu(3a_i^2 - b_i^2) + n^2] - C_{2,i} a_i [\nu(3b_i^2 - a_i^2) - n^2]\} \operatorname{sh} a_i\xi \cos b_i\xi - \\ &- \sum_{i=1}^{2} \{C_{1,i} a_i [\nu(3b_i^2 - a_i^2) - n^2] + C_{2,i} b_i [\nu(3a_i^2 - b_i^2) + n^2]\} \operatorname{ch} a_i\xi \sin b_i\xi\,, \\ &v_n^{(4)} - 2n^2 v_n'' + n^4 v_n = \\ &= \sum_{i=1}^{2} \{C_{1,i} n [n^2 - 2{,}3(a_i^2 - b_i^2)] + C_{2,i}\,.\,4{,}6 n a_i b_i\} \operatorname{sh} a_i\xi \sin b_i\xi + \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \{- C_{1,i}\,.\,4{,}6 n a_i b_i + C_{2,i} n [n^2 - 2{,}3(a_i^2 - b_i^2)]\} \operatorname{ch} a_i\xi \cos b_i\xi\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Pro stanovení partikulárních řešení rovnic (4.17) odvoďme pomocné vzorce. Partikulárním řešením rovnice

$$\begin{aligned} F^{(4)}(\xi) - 2n^2 F''(\xi) + n^4 F(\xi) &= P_1 \operatorname{sh} a\xi \sin b\xi + P_2 \operatorname{ch} a\xi \cos b\xi + \\ &+ P_3 \operatorname{sh} a\xi \cos b\xi + P_4 \operatorname{ch} a\xi \sin b\xi\,, \end{aligned} \tag{4.18}$$

kde P_1 až P_4 značí jisté konstanty, je funkce

$$F(\xi) = A \operatorname{sh} a\xi \sin b\xi + B \operatorname{ch} a\xi \cos b\xi + C \operatorname{sh} a\xi \cos b\xi + D \operatorname{ch} a\xi \sin b\xi\,. \tag{4.19}$$

Hodnoty koeficientů A, B, C a D určíme dosazením příslušných derivací funkce (4.19) do rovnice (4.18) a porovnáním součinitelů u stejných členů. Označíme-li symbolem L determinant

$$\begin{aligned} L = \begin{vmatrix} 4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - n^2)^2, & -4ab(a^2 - b^2 - n^2) \\ 4ab(a^2 - b^2 - n^2), & 4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - n^2)^2 \end{vmatrix} = \\ = [4a^2b^2 + (a^2 - b^2 - n^2)^2]^2\,, \end{aligned} \tag{4.20}$$

platí pro koeficienty funkce (4.19)

$$\begin{aligned} A &= - \frac{P_1}{L} [4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - n^2)^2] + \frac{P_2}{L} 4ab(a^2 - b^2 - n^2)\,, \\ B &= - \frac{P_1}{L} 4ab(a^2 - b^2 - n^2) - \frac{P_2}{L} [4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - n^2)^2]\,, \\ C &= - \frac{P_3}{L} [4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - n^2)^2] - \frac{P_4}{L} 4ab(a^2 - b^2 - n^2)\,, \\ D &= \frac{P_3}{L} 4ab(a^2 - b^2 - n^2) - \frac{P_4}{L} [4a^2b^2 - (a^2 - b^2 - n^2)^2]\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Hledaná řešení rovnic (4.13) nabudou tedy podle vztahů (4.17) a pomocných vzorců tvaru

(4.22)

$$u_n = \sum_{i=1}^{2} [(-\varepsilon_{1,i}C_{1,i} + \varepsilon_{2,i}C_{2,i}) \operatorname{sh} a_i\xi \cos b_i\xi + (\varepsilon_{2,i}C_{1,i} + \varepsilon_{1,i}C_{2,i}) \operatorname{ch} a_i\xi \sin b_i\xi] ,$$

$$v_n = \sum_{i=1}^{2} [(\varepsilon_{3,i}C_{1,i} - \varepsilon_{4,i}C_{2,i}) \operatorname{sh} a_i\xi \sin b_i\xi + (\varepsilon_{4,i}C_{1,i} + \varepsilon_{3,i}C_{2,i}) \operatorname{ch} a_i\xi \cos b_i\xi] ,$$

kde pro koeficienty $\varepsilon_{1,i}$ až $\varepsilon_{4,i}$ platí podle vzorců (4.21)

$$(4.23) \qquad \varepsilon_{1,i} = \frac{b_i}{L_i} \{[\nu(3a_i^2 - b_i^2) + n^2] [4a_i^2b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2] - - 4a_i^2[\nu(3b_i^2 - a_i^2) - n^2] (a_i^2 - b_i^2 - n^2)\} ,$$

$$\varepsilon_{2,i} = \frac{a_i}{L_i} \{[\nu(3b_i^2 - a_i^2) - n^2] [4a_i^2b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2] + + 4b_i^2[\nu(3a_i^2 - b_i^2) + n^2] (a_i^2 - b_i^2 - n^2)\} ,$$

$$\varepsilon_{3,i} = \frac{n}{L_i} \{[2,3(a_i^2 - b_i^2) - n^2] [4a_i^2b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2] - - 18,4a_i^2b_i^2(a_i^2 - b_i^2 - n^2)\} ,$$

$$\varepsilon_{4,i} = \frac{2na_ib_i}{L_i} \{2,3[4a_i^2b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2] + + 2[2,3(a_i^2 - b_i^2) - n^2] (a_i^2 - b_i^2 - n^2)\} .$$

Determinant L_1 (L_2) stanovíme ovšem podle vzorce (4.20) dosazením a_1, b_1 (a_2, b_2).

Řešení úlohy tedy obsahuje v obecném případě podle vzorce (4.11) pro každé n osm neznámých integračních konstant, jimž odpovídá osm počátečních parametrů, tj. hodnoty funkcí u_n, v_n, w_n, w_n', $n_{x,n}$, $n_{x\varphi,n}$, $m_{x,n}$ a $\bar{q}_{x,n}$ v průřezu $\xi = 0$. V řešeném problému je vzhledem k jeho souměrnosti k průřezu $\xi = 0$ počet integračních konstant redukován na čtyři. Přihlédneme-li totiž k vzorcům (4.2) a (4.4), splňují zřejmě funkce (4.15) a (4.22) podmínky souměrnosti úlohy

$$(4.24) \qquad u_n = 0 , \quad w_n' = 0 , \quad n_{x\varphi,n} = 0 , \quad q_{x,n} = \bar{q}_{x,n} = 0 \quad \text{pro} \quad \xi = 0 .$$

K určení zbývajících neznámých konstant užijeme pak podmínek

$$(4.25) \qquad u_n = 0 , \quad w_n' = 0 , \quad n_{x\varphi,n} = t_n , \quad \bar{q}_{x,n} = p_n \quad \text{pro} \quad \xi = \frac{l}{2r} .$$

Prvá podmínka vyjadřuje přitom nutnost nulového pootočení a zamezené deplanace ztuženého průřezu nádoby, druhá nulové pootočení normály střednicové plochy v tomto průřezu. Obě tyto podmínky platí pro střední pole velmi dlouhé nádoby. Třetí podmínka (4.25) vyjadřuje pak rovnost měrné smykové síly vnějšímu smykové-mu zatížení a čtvrtá rovnost náhradní měrné posouvající síly vnějšímu radiálnímu zatížení, přičemž se předpokládá, že okrajová zatížení smykové t i radiální p v průřezu $\xi = l/2r$ jsou dána ve tvaru Fourierových řad

$$t(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin n\varphi \,, \quad p(\varphi) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos n\varphi \,. \tag{4.26}$$

Označíme-li nyní α_i a β_i hodnoty argumentů

$$\alpha_i = \frac{a_i l}{2r} \,, \quad \beta_i = \frac{b_i l}{2r} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2 \,, \tag{4.27}$$

vedou podmínky (4.25) podle vzorců (4.2), (4.5), (4.15) a (4.22) pro každé n ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) k soustavě rovnic

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} [C_{1,i}(\varepsilon_{2,i} \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i - \varepsilon_{1,i} \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i) + \\
&\quad + C_{2,i}(\varepsilon_{1,i} \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i + \varepsilon_{2,i} \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i)] = 0 \,, \\
&\sum_{i=1}^{2} [C_{1,i}(a_i \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i + b_i \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i) - \\
&\quad - C_{2,i}(b_i \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i - a_i \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i)] = 0 \,, \\
&\sum_{i=1}^{2} \{C_{1,i}[(a_i\varepsilon_{3,i} - b_i\varepsilon_{4,i}) \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i + (b_i\varepsilon_{3,i} + a_i\varepsilon_{4,i}) \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i] - \\
&\quad - C_{2,i}[(b_i\varepsilon_{3,i} + a_i\varepsilon_{4,i}) \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i - (a_i\varepsilon_{3,i} - b_i\varepsilon_{4,i}) \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i]\} = (1 + \nu) \frac{2r}{Eh} t_n \,, \\
&\sum_{i=1}^{2} \{C_{1,i}[a_i(3b_i^2 - a_i^2) \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i - b_i(3a_i^2 - b_i^2) \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i] + \\
&\quad + C_{2,i}[b_i(3a_i^2 - b_i^2) \operatorname{ch} \alpha_i \sin \beta_i + a_i(3b_i^2 - a_i^2) \operatorname{sh} \alpha_i \cos \beta_i]\} = (1 - \nu^2) \frac{12r^3}{Eh^3} p_n \,.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Při daném okrajovém zatížení (4.26) stanovíme tedy řešením soustavy (4.28) všechny neznámé integrační konstanty. Podle odvozených vzorců můžeme pak v každém bodě střednicové plochy konstrukce určit její přetvoření i napjatost s libovolnou přesností.

4.2 *Řešení okrajové úlohy užitím zpřesněné rovnice* (2.10)

Dosadíme-li příslušné derivace třetí funkce (4.1) do zpřesněné rovnice (2.10), dostaneme opět pro rotačně souměrnou úlohu základní rovnici (4.6) a pro obecný okrajový problém nekonečně mnoho rovnic tvaru

$$w_n^{(8)} - 4n^2 w_n^{(6)} + 6n^4 w_n^{(4)} - 4n^6 w_n'' + n^8 w_n + (4\kappa^4 - 2{,}3n^2)\, w_n^{(4)} = 0 \,. \tag{4.29}$$

Pro zjednodušení záznamu byla zde opět dosazena za koeficient druhého členu rovnice (2.10) hodnota (4.16).

K relaci (4.29) přísluší rovnice charakteristická

$$(4.30) \qquad (\mu_n^2 - n^2)^4 + (4\kappa^4 - 2{,}3n^2)\,\mu_n^4 = 0\,.$$

Tvar kořenů této rovnice zřejmě závisí na znaménku jejího druhého členu. Této skutečnosti není ovšem v Donnellově rovnici dbáno.

Pro dosti malá n, kdy platí $n\sqrt{2{,}3} < 2\kappa^2$, má osm kořenů rovnice (4.30) tvar daný vzorci (4.9), platí-li nyní

$$(4.31) \qquad a_{n,1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(16n^4 - 2{,}3n^2 + 4\kappa^4)^{\frac{1}{2}} + 4n^2]^{\frac{1}{2}} + (4\kappa^4 - 2{,}3n^2)^{\frac{1}{4}}\}\,,$$

$$b_{n,1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(16n^4 - 2{,}3n^2 + 4\kappa^4)^{\frac{1}{2}} - 4n^2]^{\frac{1}{2}} + (4\kappa^4 - 2{,}3n^2)^{\frac{1}{4}}\}\,,$$

$$a_{n,2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(16n^4 - 2{,}3n^2 + 4\kappa^4)^{\frac{1}{2}} + 4n^2]^{\frac{1}{2}} - (4\kappa^4 - 2{,}3n^2)^{\frac{1}{4}}\}\,,$$

$$b_{n,2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{[(16n^4 - 2{,}3n^2 + 4\kappa^4)^{\frac{1}{2}} - 4n^2]^{\frac{1}{2}} - (4\kappa^4 - 2{,}3n^2)^{\frac{1}{4}}\}\,.$$

Řešení rovnice (4.29) je pak dáno funkcí (4.11), do jejíchž argumentů je třeba dosadit čísla (4.31). Zanedbáme-li ve vzorcích (4.31) hodnotu $2{,}3n^2$, dostaneme ovšem opět parametry (4.10).

Existuje-li celé číslo n takové, že platí $n\sqrt{2{,}3} = 2\kappa^2$, je při tomto n řešením rovnice (4.29) funkce

$$(4.32) \qquad w_n = (C_{n,1} + C_{n,2}\xi + C_{n,3}\xi^2 + C_{n,4}\xi^3)\,\mathrm{sh}\, n\xi + \\ + (C_{n,5} + C_{n,6}\xi + C_{n,7}\xi^2 + C_{n,8}\xi^3)\,\mathrm{ch}\, n\xi\,.$$

Konečně pro n splňující podmínku $n\sqrt{2{,}3} > 2\kappa^2$ má osm kořenů rovnice (4.30) tvar

$$(4.33) \qquad \mu_{n,1,2} = \pm\, a_{n,1}\,, \quad \mu_{n,3,4} = \pm\, b_{n,1}\,, \quad \mu_{n,5,6,7,8} = \pm\, a_{n,2} \pm b_{n,2}\mathrm{i}\,,$$

kde $a_{n,1}$, $b_{n,1}$, $a_{n,2}$ a $b_{n,2}$ značí reálná čísla

$$(4.34) \qquad a_{n,1} = \tfrac{1}{2}\{[(2{,}3n^2 - 4\kappa^4)^{\frac{1}{2}} + 4n^2]^{\frac{1}{2}} + (2{,}3n^2 - 4\kappa^4)^{\frac{1}{4}}\}\,,$$

$$b_{n,1} = \tfrac{1}{2}\{[(2{,}3n^2 - 4\kappa^4)^{\frac{1}{2}} + 4n^2]^{\frac{1}{2}} - (2{,}3n^2 - 4\kappa^4)^{\frac{1}{4}}\}\,,$$

$$a_{n,2} = \tfrac{1}{2}[4n^2 - (2{,}3n^2 - 4\kappa^4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$b_{n,2} = \tfrac{1}{2}(2{,}3n^2 - 4\kappa^4)^{\frac{1}{4}}\,.$$

Řešením rovnice (4.29) je proto v tomto případě funkce

$$(4.35) \qquad w_n = C_{n,1}\,\mathrm{sh}\, a_{n,1}\xi + C_{n,2}\,\mathrm{ch}\, a_{n,1}\xi + C_{n,3}\,\mathrm{sh}\, b_{n,1}\xi + C_{n,4}\,\mathrm{ch}\, b_{n,1}\xi + \\ + C_{n,5}\,\mathrm{sh}\, a_{n,2}\xi \sin b_{n,2}\xi + C_{n,6}\,\mathrm{sh}\, a_{n,2}\xi \cos b_{n,2}\xi + C_{n,7}\,\mathrm{ch}\, a_{n,2}\xi \sin b_{n,2}\xi + \\ + C_{n,8}\,\mathrm{ch}\, a_{n,2}\xi \cos b_{n,2}\xi\,.$$

4.2.1 Případ $n\sqrt{2{,}3} < 2\kappa^2$

Pro okrajový problém souměrný ke střednímu průřezu $\xi = 0$ je tedy v daném případě řešením základní rovnice (4.29) funkce (4.15) s hodnotami parametrů $a_{n,i}$, $b_{n,i}$ podle vzorců (4.31). Dosaďme nyní funkce (4.1) do rovnic (2.11). Tím dostaneme opět rovnice (4.12), kdežto na místě rovnic (4.13) nyní bude s užitím hodnoty (4.16) platit

$$(4.36)\qquad u_n^{(4)} - 2n^2u_n'' + n^4u_n = \left(\nu - n^2k\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)w_n''' + n^2w_n',$$

$$v_n^{(4)} - 2n^2v_n'' + n^4v_n = n^3w_n - 2{,}3nw_n'' + nk\frac{2}{1-\nu}w_n^{(4)}.$$

Vyjádříme-li výrazy na pravých stranách těchto rovnic příslušnými derivacemi funkce tvaru (4.15), dostaneme

$$\begin{aligned}(4.37)\quad u_n^{(4)} - 2n^2u_n'' + n^4u_n = \sum_{i=1}^{2}\Bigg\{&C_{1,i}b_i\left[\left(\nu - n^2k\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3a_i^2 - b_i^2) + n^2\right] - \\ &- C_{2,i}a_i\left[\left(\nu - n^2k\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3b_i^2 - a_i^2) - n^2\right]\Bigg\}\operatorname{sh} a_i\xi\cos b_i\xi - \\ -\sum_{i=1}^{2}\Bigg\{&C_{1,i}a_i\left[\left(\nu - n^2k\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3b_i^2 - a_i^2) - n^2\right] + \\ &+ C_{2,i}b_i\left[\left(\nu - n^2k\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3a_i^2 - b_i^2) + n^2\right]\Bigg\}\operatorname{ch} a_i\xi\sin b_i\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_n^{(4)} - 2n^2v_n'' + n^4v_n = \sum_{i=1}^{2}n\Bigg\{&C_{1,i}\left[n^2 - 2{,}3(a_i^2 - b_i^2) - \frac{2k}{1-\nu}(6a_i^2b_i^2 - a_i^4 - b_i^4)\right] + \\ &+ C_{2,i}\,.\,2a_ib_i\left[2{,}3 - \frac{4k}{1-\nu}(a_i^2 - b_i^2)\right]\Bigg\}\operatorname{sh} a_i\xi\sin b_i\xi + \\ +\sum_{i=1}^{2}n\Bigg\{&-C_{1,i}2a_ib_i\left[2{,}3 - \frac{4k}{1-\nu}(a_i^2 - b_i^2)\right] + \\ &+ C_{2,i}\left[n^2 - 2{,}3(a_i^2 - b_i^2) - \frac{2k}{1-\nu}(6a_i^2b_i^2 - a_i^4 - b_i^4)\right]\Bigg\}\operatorname{ch} a_i\xi\cos b_i\xi.\end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic jsou opět funkce tvaru (4.22) ovšem s jinými koeficienty, které určíme užitím pomocných vzorců (4.21)

(4.38)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,i} = \frac{b_i}{L_i}\Bigg\{&\left[\left(\nu - n^2k\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3a_i^2 - b_i^2) + n^2\right][4a_i^2b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2] - \\ &- 4a_i^2\left[\left(\nu - n^2k\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3b_i^2 - a_i^2) - n^2\right](a_i^2 - b_i^2 - n^2)\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{2,i} = \frac{a_i}{L_i}\left\{\left[\left(\nu - n^2 k \frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3b_i^2 - a_i^2) - n^2\right]\left[4a_i^2 b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 4b_i^2\left[\left(\nu - n^2 k \frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3a_i^2 - b_i^2) + n^2\right](a_i^2 - b_i^2 - n^2)\right\},$$

$$\varepsilon_{3,i} = \frac{n}{L_i}\left\{\left[2{,}3(a_i^2 - b_i^2) + \frac{2k}{1-\nu}(6a_i^2 b_i^2 - a_i^4 - b_i^4) - n^4\right] \times \right.$$

$$\times \left[4a_i^2 b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2\right] -$$

$$\left. - 8a_i^2 b_i^2\left[2{,}3 - \frac{4k}{1-\nu}(a_i^2 - b_i^2)\right](a_i^2 - b_i^2 - n^2)\right\},$$

$$\varepsilon_{4,i} = \frac{2na_i b_i}{L_i}\left\{\left[2{,}3 - \frac{4k}{1-\nu}(a_i^2 - b_i^2)\right]\left[4a_i^2 b_i^2 - (a_i^2 - b_i^2 - n^2)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2\left[2{,}3(a_i^2 - b_i^2) + \frac{2k}{1-\nu}(6a_i^2 b_i^2 - a_i^4 - b_i^4) - n^4\right](a_i^2 - b_i^2 - n^2)\right\}.$$

Při okrajových podmínkách (4.25) stanovíme proto neznámé integrační konstanty řešením soustavy rovnic tvaru (4.28), dosadíme-li za koeficienty této soustavy hodnoty udané vzorci (4.31) a (4.38).

4.2.2 Případ $n\sqrt{2{,}3} = 2\kappa^2$

S vynecháním lichých funkcí i indexů n u integračních konstant a s jejich přečíslováním nabude řešení (4.32) tvaru

$$w_n = (C_1\xi + C_2\xi^3)\operatorname{sh} n\xi + (C_3 + C_4\xi^2)\operatorname{ch} n\xi\,. \tag{4.39}$$

Dosazením příslušných derivací této funkce do rovnic (4.36) dostaneme

$$\begin{aligned} u_n^{(4)} - 2n^2 u_n'' + n^4 u_n &= A_1 \operatorname{sh} n\xi + n^2 A_2 \xi^2 \operatorname{sh} n\xi + nA_3\xi \operatorname{ch} n\xi + \\ &\quad + n^3 A_4 \xi^3 \operatorname{ch} n\xi\,, \\ v_n^{(4)} - 2n^2 v_n'' + n^4 v_n &= nB_1\xi \operatorname{sh} n\xi + n^3 B_2 \xi^3 \operatorname{sh} n\xi + B_3 \operatorname{ch} n\xi + \\ &\quad + n^2 B_4 \xi^2 \operatorname{ch} n\xi\,, \end{aligned} \tag{4.40}$$

kde symboly A_1 až A_4 a B_1 až B_4 označují tyto lineární kombinace integračních konstant funkce (4.39)

$$\begin{aligned} A_1 &= (3n^2 C_1 + 6C_2 + n^3 C_3 + 6nC_4)\left(\nu - n^2 k \frac{1+\nu}{1-\nu}\right) + n^2(C_1 + nC_3)\,, \\ A_2 &= (9C_2 + nC_4)\left(\nu - n^2 k \frac{1+\nu}{1-\nu}\right) + 3C_2 + nC_4\,, \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$A_3 = (n^2C_1 + 18C_2 + 6nC_4)\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) + n(nC_1 + 2C_4)\,,$$

$$A_4 = C_2\left(1 + \nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right),$$

$$B_1 = n^2k\,\frac{2}{1-\nu}\,(n^2C_1 + 36C_2 + 8nC_4) - 2{,}3(n^2C_1 + 6C_2 + 4nC_4) + n^2C_1\,,$$

$$B_2 = C_2\left(n^2k\,\frac{2}{1-\nu} - 1{,}3\right),$$

$$B_3 = n^2k\,\frac{2}{1-\nu}\,(4n^2C_1 + 24C_2 + n^3C_3 + 12nC_4) - 2{,}3n(2nC_1 + n^2C_3 + $$

$$+ 2C_4) + n^3C_3\,,$$

$$B_4 = n^2k\,\frac{2}{1-\nu}\,(12C_2 + nC_4) - 2{,}3(6C_2 + nC_4) + nC_4\,.$$

Řešení rovnic (4.40) nalezneme ve tvaru

$$(4.42)\quad u_n = \frac{1}{16n^2}\,(2A_1 + 3A_2 - 2A_3 - 6A_4)\,\xi^2 \operatorname{sh} n\xi + \frac{1}{48}\,(A_2 - 3A_4)\,\xi^4 \operatorname{sh} n\xi +$$

$$+ \frac{1}{48n}\,(-4A_2 + 2A_3 + 9A_4)\,\xi^3 \operatorname{ch} n\xi + \frac{n}{80}\,A_4\xi^5 \operatorname{ch} n\xi\,,$$

$$v_n = \frac{1}{48n}\,(2B_1 + 9B_2 - 4B_4)\,\xi^3 \operatorname{sh} n\xi + \frac{n}{80}\,B_2\xi^5 \operatorname{sh} n\xi +$$

$$+ \frac{1}{16n^2}\,(-2B_1 - 6B_2 + 2B_3 + 3B_4)\,\xi^2 \operatorname{ch} n\xi + \frac{1}{48}\,(-3B_2 + B_4)\,\xi^4 \operatorname{ch} n\xi\,.$$

Funkce (4.39) a (4.42) opět zřejmě splňují podmínky (4.24) souměrnosti úlohy k průřezu $\xi = 0$. Neznámé integrační konstanty C_1 až C_4 stanovíme pak užitím okrajových podmínek (4.25).

4.2.3 Případ $n\sqrt{2{,}3} > 2\kappa^2$

Pro problém souměrný ke střednímu průřezu $\xi = 0$ píšeme funkci (4.35) ve tvaru

$$(4.43)\quad w_n = C_1 \operatorname{ch} a_1\xi + C_2 \operatorname{ch} b_1\xi + C_3 \operatorname{sh} a_2\xi \sin b_2\xi + C_4 \operatorname{ch} a_2\xi \cos b_2\xi\,.$$

Dosazením příslušných derivací této funkce do pravých stran rovnic (4.36) vyplývá

$$(4.44)\quad u_n^{(4)} - 2n^2u_n'' + n^4u_n = C_1a_1\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)a_1^2 + n^2\right]\operatorname{sh} a_1\xi +$$

$$+ C_2b_1\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)b_1^2 + n^2\right]\operatorname{sh} b_1\xi +$$

$$+ \left\{C_3b_2\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3a_2^2 - b_2^2) + n^2\right] -\right.$$

$$\left.- C_4a_2\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3b_2^2 - a_2^2) - n^2\right]\right\}\operatorname{sh} a_2\xi\cos b_2\xi -$$

$$- \left\{C_3a_2\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3b_2^2 - a_2^2) - n^2\right] +\right.$$

$$\left.+ C_4b_2\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)(3a_2^2 - b_2^2) + n^2\right]\right\}\operatorname{ch} a_2\xi\sin b_2\xi\,,$$

$$v_n^{(4)} - 2n^2v_n'' + n^4v_n = C_1n\left(\frac{2}{1-\nu}\,ka_1^4 - 2{,}3a_1^2 + n^2\right)\operatorname{ch} a_1\xi +$$

$$+ C_2n\left(\frac{2}{1-\nu}\,kb_1^4 - 2{,}3b_1^2 + n^2\right)\operatorname{ch} b_1\xi +$$

$$+ \left\{C_3n\left[n^2 - 2{,}3(a_2^2 - b_2^2) - \frac{2k}{1-\nu}\,(6a_2^2b_2^2 - a_2^4 - b_2^4)\right] +\right.$$

$$\left.+ C_4\,2na_2b_2\left[2{,}3 - \frac{4k}{1-\nu}\,(a_2^2 - b_2^2)\right]\right\}\operatorname{sh} a_2\xi\sin b_2\xi +$$

$$+ \left\{- C_3\,2na_2b_2\left[2{,}3 - \frac{4k}{1-\nu}\,(a_2^2 - b_2^2)\right] +\right.$$

$$\left.+ C_4n\left[n^2 - 2{,}3(a_2^2 - b_2^2) - \frac{2k}{1-\nu}\,(6a_2^2b_2^2 - a_2^4 - b_2^4)\right]\right\}\operatorname{ch} a_2\xi\cos b_2\xi\,.$$

Řešením rovnic (4.44) jsou funkce

$$(4.45)\quad u_n = C_1\,\frac{a_1}{(a_1^2 - n^2)^2}\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)a_1^2 + n^2\right]\operatorname{sh} a_1\xi +$$

$$+ C_2\,\frac{b_1}{(b_1^2 - n^2)^2}\left[\left(\nu - n^2k\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)b_1^2 + n^2\right]\operatorname{sh} b_1\xi +$$

$$+ (-\,\varepsilon_{1,2}C_3 + \varepsilon_{2,2}C_4)\operatorname{sh} a_2\xi\cos b_2\xi + (\varepsilon_{2,2}C_3 + \varepsilon_{1,2}C_4)\operatorname{ch} a_2\xi\sin b_2\xi\,,$$

$$v_n = C_1 \frac{n}{(a_1^2 - n^2)^2} \left(\frac{2}{1 - \nu} k a_1^4 - 2{,}3 a_1^2 + n^2 \right) \operatorname{ch} a_1 \xi +$$

$$+ C_2 \frac{n}{(b_1^2 - n^2)^2} \left(\frac{2}{1 - \nu} k b_1^4 - 2{,}3 b_1^2 + n^2 \right) \operatorname{ch} b_1 \xi +$$

$$+ (\varepsilon_{3,2} C_3 - \varepsilon_{4,2} C_4) \operatorname{sh} a_2 \xi \sin b_2 \xi + (\varepsilon_{4,2} C_3 + \varepsilon_{3,2} C_4) \operatorname{ch} a_2 \xi \cos b_2 \xi \, .$$

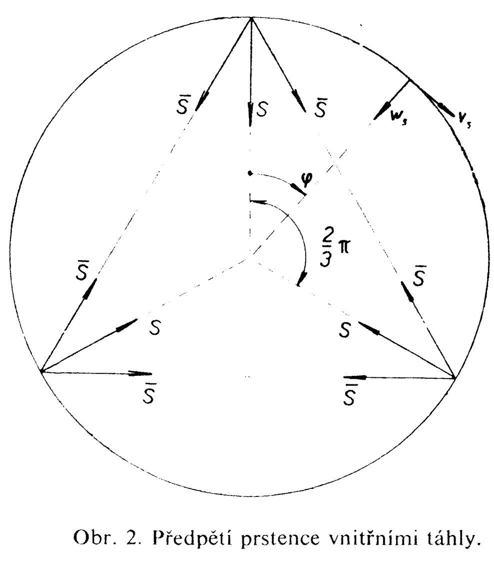
Přitom koeficienty $\varepsilon_{1,2}$ až $\varepsilon_{4,2}$, obsažené v těchto vzorcích, určíme dosazením hodnot a_2 a b_2 podle vzorců (4.34) do vzorců (4.38). Hodnoty integračních konstant C_1 až C_4 vyplývají pak opět ze soustavy rovnic, k níž vedou okrajové podmínky (4.25).

5. TLAKOVÁ NÁDOBA S PRUŽNÝMI NÁKRUŽKY PŘEDPJATÝMI VNITŘNÍMI TÁHLY

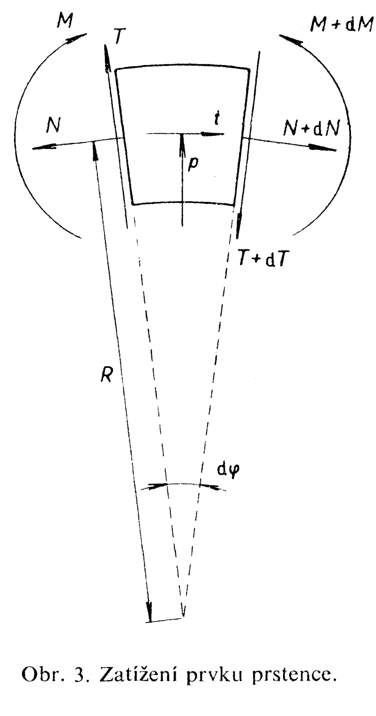
Vyšetřeme nyní napjatost a přetvoření válcové nádoby vyztužené pružnými prstenci, které jsou předpjaty vnitřními táhly podle obr. 2. Označíme-li $w_d(\varphi)$, $v_d(\varphi)$ složky výsledného posunutí bodů střednicové plochy skořepiny v průřezu $\xi = l/2r$ nasazení nákružku, $w_s(\varphi)$, $v_s(\varphi)$ složky přetvoření pružného prstence vyvozené jeho předpětím a $w_p(\varphi)$, $v_p(\varphi)$ složky přetvoření prstence odpovídající jeho zatížení pružným odporem skořepiny proti přetvoření, vyplývá z podmínky společné deformace prstence i skořepiny podle principu superposice

(5.1) $\quad w_d \equiv w_s + w_p \, , \quad v_d \equiv v_s + v_p \, .$

Funkce $w_d(\varphi)$ a $v_d(\varphi)$ byly stanoveny v předchozích odstavcích jako jisté lineární kombi-



Obr. 2. Předpětí prstence vnitřními táhly.



Obr. 3. Zatížení prvku prstence.

nace integračních konstant, tvořící koeficienty příslušných Fourierových řad. Zbývá proto stanovit funkce $w_s(\varphi)$, $v_s(\varphi)$, $w_p(\varphi)$ a $v_p(\varphi)$.

Označme R poloměr křivosti střednice nákružku, E_p, F_p a J_p modul pružnosti v tahu, průřezovou plochu a moment setrvačnosti průřezu nákružku. Budeme-li označovat tečkami derivace podle proměnné φ, platí při malých deformacích prstence pro jeho přetvoření

$$v^{\cdot} - w = \frac{NR}{E_p F_p}\,, \quad v^{\cdot} + w^{\cdot\cdot} = -\frac{MR^2}{E_p J_p}\,. \tag{5.2}$$

Kladný smysl normálné síly N (tah) a ohybového momentu M je naznačen na obr. 3.

5.1 *Přetvoření prstence vlivem předpětí*

Vyšetřeme přetvoření prstence vyvozené podle obr. 2 silami $\bar{S}$, které jsou ekvivalentní soustavě sil S

$$S = \bar{S}\sqrt{3}\,. \tag{5.3}$$

Danému zatížení prstence odpovídají jeho vnitřní síly

$$N = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\,S[\cos\varphi + (\sqrt{3})\sin\varphi]\,, \quad T = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\,S[(\sqrt{3})\cos\varphi - \sin\varphi]\,, \tag{5.4}$$

$$M = M_0 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,SR[(\sqrt{3})\sin\varphi + \cos\varphi - 1]\,.$$

Jedinou staticky neurčitou veličinou je tedy ohybový moment M_0 v průřezu $\varphi = 0$. Tento moment je třeba určit z příslušné přetvárné výminky.

Eliminací funkce v dostaneme z rovnic (5.2)

$$w^{\cdot\cdot} + w = -\frac{MR^2}{E_p J_p} - \frac{NR}{E_p F_p}\,. \tag{5.5}$$

Dosazením podle vzorců (5.4) vyplývá

$$w_s^{\cdot\cdot} + w_s = -\frac{R^2}{E_p J_p}\,M_0 - \frac{SR^3}{2(\sqrt{3})\,E_p J_p}\left\{1 - \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right)[(\sqrt{3})\sin\varphi + \cos\varphi]\right\}. \tag{5.6}$$

Řešením rovnice (5.6) je funkce

$$w_s = -\frac{R^2}{E_p J_p}\,M_0 - \tag{5.7}$$

$$-\frac{SR^3}{4(\sqrt{3})\,E_p J_p}\left\{2 - \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right)[\varphi\sin\varphi - (\sqrt{3})\,\varphi\cos\varphi]\right\} + A\sin\varphi + B\cos\varphi\,,$$

kde A a B jsou integrační konstanty. Dosazením této funkce a prvého výrazu (5.4) do prvé rovnice (5.2) a integrací dostaneme

$$v_s = -\frac{R^2}{E_p J_p} M_0 \varphi - \frac{SR^3}{4(\sqrt{3}) E_p J_p} \left\{ 2\varphi - \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right) \left[-\varphi \cos\varphi + \sin\varphi - (\sqrt{3}) \varphi \sin\varphi - (\sqrt{3}) \cos\varphi \right] \right\} - \frac{SR}{2(\sqrt{3}) E_p F_p} \left[\sin\varphi - (\sqrt{3}) \cos\varphi \right] - A \cos\varphi + B \sin\varphi + C , \tag{5.8}$$

kde C je další integrační konstanta. Stanovme ještě derivaci funkce (5.7)

$$w_s^{\cdot} = \frac{SR^3}{4(\sqrt{3}) E_p J_p} \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right) \left[\sin\varphi + \varphi \cos\varphi - (\sqrt{3}) \cos\varphi + (\sqrt{3}) \varphi \sin\varphi \right] + A \cos\varphi - B \sin\varphi . \tag{5.9}$$

Funkce (5.7) a (5.8) obsahují tedy čtyři neznámé konstanty M_0, A, B a C, které je třeba určit z okrajových podmínek

$$w_s^{\cdot} = 0 , \quad v_s = 0 \quad \text{pro} \quad \varphi = 0 \quad \text{a} \quad \varphi = \tfrac{2}{3}\pi . \tag{5.10}$$

Z těchto podmínek vyplývá podle vzorců (5.8) a (5.9) soustava rovnic

$$\begin{aligned} & -\frac{SR^3}{4E_p J_p} \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right) + A = 0 , \\ & \frac{SR^3}{4E_p J_p} \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right) \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi\right) - \frac{1}{2} A - \frac{\sqrt{3}}{2} B = 0 , \\ & -\frac{SR^3}{4E_p J_p} \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right) + \frac{SR}{2E_p F_p} - A + C = 0 , \\ & -\frac{2\pi R^2}{3E_p J_p} M_0 - \frac{SR^3}{4E_p J_p} \left[\frac{4}{3\sqrt{3}} \pi + \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right) \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \pi - 1 \right) \right] - \frac{SR}{2E_p F_p} + \\ & \quad + \frac{1}{2} A + \frac{\sqrt{3}}{2} B + C = 0 , \end{aligned} \tag{5.11}$$

jejímž řešením dostaneme

$$A = \frac{SR^3}{4E_p J_p} \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right), \quad B = \frac{SR^3}{4E_p J_p} \left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{9}\pi\right), \tag{5.12}$$

$$C = \frac{SR^3}{2E_p J_p} , \qquad M_0 = \frac{SR}{2\pi\sqrt{3}} (3\sqrt{3} - \pi) .$$

Dosazením těchto veličin do vzorců (5.7) a (5.8) vyplývá hledané přetvoření prstence vyvozené jeho uvažovaným předpětím

$$w_s = -\frac{3SR^3}{2\pi E_p J_p} + \frac{SR^3}{4E_p J_p}\left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right)\left[\sin\varphi + \right. \tag{5.13}$$

$$\left. + \frac{1}{9}(3\sqrt{3} + 4\pi)\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi\sin\varphi - \varphi\cos\varphi\right],$$

$$v_s = \frac{SR^3}{2\pi E_p J_p}(\pi - 3\varphi) + \frac{SR^3}{4E_p J_p}\left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right)\left[\frac{2}{9}(3\sqrt{3} + 2\pi)\sin\varphi - 2\cos\varphi - \right.$$

$$\left. - \varphi\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi\cos\varphi\right] - \frac{SR}{2(\sqrt{3})\, E_p F_p}\left[\sin\varphi - (\sqrt{3})\cos\varphi\right].$$

Vyjádřeme funkce (5.13) Fourierovými řadami

$$w_s = d_0 + \sum_{n=3,6,\dots}^{\infty} d_n \cos n\varphi\,, \quad v_s = \sum_{n=3,6,\dots}^{\infty} e_n \sin n\varphi\,, \tag{5.14}$$

které splňují okrajové podmínky (5.10). Užitím známých vzorců pro Fourierův rozvoj dostaneme

$$w_s = \frac{3SR^3}{2\pi E_p J_p}\left[\frac{J_p}{R^2 F_p} + 2\left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}\right)\sum_{n=3,6,\dots}^{\infty}\frac{1}{(n^2 - 1)^2}\cos n\varphi\right], \tag{5.15}$$

$$v_s = \frac{3SR^3}{\pi E_p J_p}\sum_{n=3,6,\dots}^{\infty}\frac{1}{n(n^2 - 1)^2}\left(1 + \frac{J_p}{R^2 F_p}n^2\right)\sin n\varphi\,.$$

5.2 *Přetvoření prstence vyvozené jeho spojitým zatížením*

Stanovme přetvoření prstence vyvozené spojitým zatížením daným ve tvaru Fourierových řad

$$p = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos n\varphi\,, \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin n\varphi\,, \tag{5.16}$$

přičemž předpokládejme, že smykové zatížení t působí na prstenec v jeho střednici.

Z výminek rovnováhy prvku prstence plyne podle obr. 3 soustava rovnic

$$T^{\cdot} + N - pR = 0\,, \quad N^{\cdot} - T + tR = 0\,, \quad M^{\cdot} - TR = 0\,. \tag{5.17}$$

Eliminací funkce $T(\varphi)$ posouvající síly dostaneme

$$N^{\cdot\cdot} + N = R(p - t^{\cdot})\,, \quad M^{\cdot\cdot\cdot} + M^{\cdot} = R^2(p^{\cdot} + t)\,. \tag{5.18}$$

Z rovnic (5.2) odvodíme

$$N^{\cdot\cdot} + N = \frac{E_p F_p}{R}(v^{\cdot\cdot\cdot} + v^{\cdot} - w^{\cdot\cdot} - w)\,, \tag{5.19}$$

$$M^{\cdot\cdot\cdot} + M^{\cdot} = -\frac{E_p J_p}{R^2}(v^{::} + v^{\cdot\cdot} + w^{:::} + w^{\cdot\cdot\cdot})\,.$$

Podle relací (5.18) a (5.19) tedy platí

$$(5.20)\qquad v^{\cdots} + v^{\cdot} - w^{\cdot\cdot} - w = \frac{R^2}{E_pF_p}(p - t^{\cdot}),$$

$$v^{::} + v^{\cdot\cdot} + w^{:\cdot:} + w^{\cdots} = -\frac{R^4}{E_pJ_p}(p^{\cdot} + t).$$

Dosadíme-li do rovnic (5.20) funkce (5.16) a funkce

$$(5.21)\qquad w = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\varphi\,, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \sin n\varphi\,,$$

dostaneme soustavu rovnic

$$(5.22)\qquad d_0 = -\frac{R^2}{E_pF_p}p_0\,, \quad (n^2 - 1)(d_n - ne_n) = \frac{R^2}{E_pF_p}(p_n - nt_n)\,,$$

$$n^2(n^2 - 1)(nd_n - e_n) = -\frac{R^4}{E_pJ_p}(np_n - t_n)\,,$$

jejímž řešením vyplývá

$$(5.23)\qquad d_n = -\frac{R^4}{E_pJ_p}\frac{1}{(n^2-1)^2}\left[\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}\right)p_n - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}n^2\right)t_n\right],$$

$$e_n = -\frac{R^4}{E_pJ_p}\frac{1}{n(n^2-1)^2}\left[\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}n^2\right)p_n - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}n^4\right)t_n\right].$$

Funkce (5.21) tedy nabudou tvaru

(5.24)

$$w = -\frac{R^2}{E_pF_p}p_0 - \frac{R^4}{E_pJ_p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)^2}\left[\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}\right)p_n - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}n^2\right)t_n\right]\cos n\varphi\,,$$

$$v = -\frac{R^4}{E_pJ_p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)^2}\left[\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}n^2\right)p_n - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}n^4\right)t_n\right]\sin n\varphi\,.$$

5.3 *Přetvárné podmínky konstrukce*

Ze vzorců (5.15) je zřejmo, že vyšetřovaný problém je superposicí rotačně souměrné úlohy vyjádřené prvým členem funkce w_s a úlohy souměrné k rovině $\varphi = 0$, definované příslušnými nekonečnými řadami. Podle odst. 3 a 4 obsahuje řešení v případě konstrukce souměrné ke střednímu průřezu $\xi = 0$ pro rotačně souměrné přetvoření tři integrační konstanty a pro každé n čtyři integrační konstanty. Předpokládejme, že průřezy konstrukce mohou volně dilatovat. Potom při dlouhé nádobě s mnoha nákružky užijeme k určení integračních konstant okrajových podmínek

$$(5.25)\qquad n_{0,x} = 0\,, \quad w'_{0,d} = 0\,, \quad w_{0,d} = w_{0,s} + w_{0,p}\,,$$

$$(5.26)\qquad u_{n,d} = 0\,, \quad w'_{n,d} = 0\,, \quad w_{n,d} = w_{n,s} + w_{n,p}\,, \quad v_{n,d} = v_{n,s} + v_{n,p}\,,$$

kde index 0 označuje rotačně souměrnou složku přetvoření a index d průřez $\xi = l/2r$ nasazení nákružku.

Podle vzorců (4.2) a (4.5) platí při splnění podmínek (5.26)

$$(5.27)\qquad n_{x\varphi,d} = (1 - \nu)\,\frac{D}{2r}\sum_{n=1}^{\infty} v'_{n,d} \sin n\varphi,$$

$$\bar{q}_{x,d} = -\frac{K}{r^3}\,w'''_{0,d} - \frac{K}{r^3}\sum_{n=1}^{\infty} w'''_{n,d} \cos n\varphi\,.$$

Tyto měrné síly působí ovšem zleva i zprava na vyšetřovaný nákružek, a proto jejich dvojnásobné hodnoty vyjadřují pružný odpor skořepiny proti přetvoření (5.21). Ze srovnání se vzorci (5.16) pak vyplývá

$$(5.28)\qquad p_0 = -\frac{2K}{r^3}\,w'''_{0,d}\,, \quad p_n = -\frac{2K}{r^3}\,w'''_{n,d}\,, \quad t_n = -(1 - \nu)\,\frac{D}{r}\,v'_{n,d}$$

a užitím vzorců (5.24) stanovíme

(5.29)

$$w_{0,p} = \frac{2KR^2}{E_pF_pr^3}\,w'''_{0,d} = \frac{H}{2\kappa^3}\,w'''_{0,d}\,,$$

$$w_{n,p} = \frac{2KR^4}{E_pJ_pr^3}\,\frac{1}{(n^2 - 1)^2}\left[\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}\right)w'''_{n,d} - \frac{1 - \nu}{2kn}\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}\,n^2\right)v'_{n,d}\right],$$

$$v_{n,p} = \frac{2KR^4}{E_pJ_pr^3}\,\frac{1}{n(n^2 - 1)^2}\left[\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}\,n^2\right)w'''_{n,d} - \frac{1 - \nu}{2kn}\left(1 + \frac{J_p}{R^2F_p}\,n^4\right)v'_{n,d}\right],$$

kde je symbolem H označena poměrná tuhost (3.15).

Při platnosti prvé podmínky (5.25) je podle vzorců (3.2), (3.4), (3.10) a (3.11) řešením rovnice (2.14) resp. (4.6) funkce

$$(5.30)\qquad w_0 = A_1 \operatorname{sh} \kappa\xi \sin \kappa\xi + A_4 \operatorname{ch} \kappa\xi \cos \kappa\xi\,.$$

Dosazením této funkce a příslušných členů podle vzorců (5.15) a (5.29) do posledních dvou podmínek (5.25) dostaneme soustavu rovnic

$$(5.31)\qquad A_1(\operatorname{ch}\beta \sin\beta + \operatorname{sh}\beta\cos\beta) - A_4(\operatorname{ch}\beta\sin\beta - \operatorname{sh}\beta\cos\beta) = 0\,,$$

$$A_1[\operatorname{sh}\beta\sin\beta + H(\operatorname{ch}\beta\sin\beta - \operatorname{sh}\beta\cos\beta)] +$$

$$+ A_4[\operatorname{ch}\beta\cos\beta + H(\operatorname{ch}\beta\sin\beta + \operatorname{sh}\beta\cos\beta)] = \frac{3SR}{2\pi E_pF_p}\,.$$

kde argument β označuje hodnotu (3.13). Soustavy (5.31) a (3.14) se liší pouze pravou stranou, z čehož vyplývá, že zůstanou v platnosti všechny vzorce (3.16) až (3.24), nahradíme-li v nich rozdíl ΔR veličinou $3SR/2\pi E_p F_p$ .Stejná analogie platí i při zamezené dilataci, a proto v tomto případě užijeme vzorců odst. 3.2.

Konstanty $C_{n,i}$, obsažené ve funkcích (4.15) a (4.22), resp. v příslušných funkcích odvozených v odst. 4.2, stanovíme pro každé n užitím okrajových podmínek (5.26), přičemž ze tvaru funkcí (5.15) vyplývá, že tyto konstanty mají nenulovou hodnotu jen pro $n = 3, 6, 9, \ldots = 3m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Dosazením podle vzorců (5.15) a (5.29) nabudou pak poslední dvě podmínky (5.26) tvaru

$$\begin{gathered}\frac{E_p J_p r^3}{2KR^4}(9m^2-1)^2 w_{3m,d} - \left(1+\frac{J_p}{R^2F_p}\right) w'''_{3m,d} + \\ + \frac{1-\nu}{6km}\left(1+\frac{9J_p}{R^2F_p}m^2\right) v'_{3m,d} = \frac{3Sr^3}{2\pi KR}\left(1+\frac{J_p}{R^2F_p}\right), \\ \frac{3E_p J_p r^3}{2KR^4} m(9m^2-1)^2 v_{3m,d} - \left(1+\frac{9J_p}{R^2F_p}m^2\right) w'''_{3m,d} + \\ + \frac{1-\nu}{6km}\left(1+\frac{81J_p}{R^2F_p}m^4\right) v'_{3m,d} = \frac{3Sr^3}{2\pi KR}\left(1+\frac{9J_p}{R^2F_p}m^2\right).\end{gathered} \tag{5.32}$$

Levé strany těchto rovnic a prvých dvou rovnic (5.26) jsou pro každé m podle vzorců odst. 4 jistými lineárními, navzájem nezávislými kombinacemi čtyř neznámých integračních konstant. Řešením této soustavy lze tedy vypočíst všechny integrační konstanty. Podle příslušných vzorců odst. 4 pak stanovíme odpovídající napjatost i přetvoření vyšetřované konstrukce.

Literatura

[1] *W. Flügge*: Statik und Dynamik der Schalen, Springer-Verlag, Berlin 1934.

[2] *L. H. Donnell*: Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion, NACA Techn. Rep. 479, 1933.

[3] *L. S. D. Morley*: An Improvement on Donnell's Approximation for Thin-Walled Circular Cylinder, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959.

[4] *В. З. Власов:* Общая теория оболочек, Москва 1949.

[5] *R. Dąbrowski*: Die Berechnung der allseitig starr gestützten Kreiszylinderschalen, Der Bauingenieur 37, 1962.

[6] *H. Schorer*: Line Load Action on Thin Cylindrical Shells, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 1935.

[7] *V. Panc*: Stabilita tenkostěnných trub a nádob se ztuženým pláštěm při rovnoměrném vnějším radiálním přetlaku, Aplikace matematiky, sv. 1, 1956.

[8] *V. Panc*: Die statische Untersuchung von dünnwandigen Rohrleitungen und Zylinderbehältern, Acta Tech. Ac. Sc. Hung., Tom. XXXV—XXXVI, 1961.

Резюме

ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРОВ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ УПРУГИМИ КОЛЬЦАМИ

ВЛАДИМИР ПАНЦ (Vladimír Panc)

Настоящая статья содержит сводку общеизвестных основных уравнений, примененных разными авторами к решению краевых задач в теории круговых цилиндрических оболочек, и уточненное уравнение (2.8), обоснованное на соотношениях (2.1) и (2.3). Для решения краевой задачи при расчетах цилиндрических резервуаров предлагается упрощенное основное уравнение (2.10), которое представляет собой особенное дополнение уравнения Донела (1.2). Оба эти уравнения сравниваются посредством их применения к решению общей краевой задачи.

Как особенную осесимметричную задачу рассматривает автор напряженное и деформированное состояние тонкостенных резервуаров и трубопроводов, предварительно напряженных упругими кольцами, надетыми при их нагревании. Равно как и слоистые предварительно напряженные сосуды имеют эти конструкции в современном строительном деле большое значение, так как у них возможно достигнуть лучшего использования материала. Практическим применением соотношений, приведенных для общей краевой задачи, является предложенный автором метод решения напряженного состояния цилиндрических резервуаров с упругими кольцевыми ребрами, предварительно напряженными согласно рисунку 2.

Zusammenfassung

THEORIE DER DURCH ELASTISCHE RINGE VORGESPANNTEN DRUCKBEHÄLTER

VLADIMÍR PANC

Die vorliegende Abhandlung bringt eine Übersicht der bekanntesten Grundgleichungen, die von verschiedenen Verfassern zur Lösung von Randwertproblemen in der Theorie der Kreiszylinderschalen benutzt wurden, und eine auf den Beziehungen (2.1) und (2.3) gegründete genauere Gleichung (2.8). Zur Lösung des Randwertproblems bei der Berechnung der zylindrischen Behälter wird dann vom Verfasser eine vereinfachte Grundgleichung (2.10) empfohlen, die eine Vervollständigung der Donnellschen Gleichung (1.2) vorstellt. Beide diese Gleichungen werden im Beitrag durch Lösung des allgemeinen Randwertproblems der hier gestellten Aufgabe verglichen.

Als eine spezielle drehsymmetrische Aufgabe untersucht der Verfasser Spannungs- und Verformungszustand von dünnwandigen Druckbehältern und Rohrleitungen, die durch elastische vor dem Aufpflanzen erwärmte Zugringe vorgespannt werden. Ähnlich wie Druckbehälter mit mehrschichtigem vorgespanntem Mantel sind auch diese Konstruktionen, mit Rücksicht auf die Möglichkeit der besseren Ausnützung des Materials, für die technische Praxis von beträchtlicher Bedeutung. Eine praktische Anwendung der für das allgemeine Randwertproblem entwickelten Formeln ist dann an Hand vom entworfenen Verfahren der Untersuchung des Spannungszustandes von Ringrippenbehältern, deren elastische Ringe durch innere Zugbände nach Abb. 2 vorgespannt werden, vorgeführt.

Adresa autora: Ing. *Vladimír Panc* C.Sc., Bělocerkevská 1297, Praha 10.