

Aplikace matematiky

Josef Heřt

Pružné průhyby konsolové desky zatížené osamělou silou v obecném bodě

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 6, 411–441

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102875>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PRUŽNÉ PRŮHYBY KONSOLOVÉ DESKY ZATÍŽENÉ OSAMĚLOU SILOU V OBEČNÉM BODĚ

JOSEF HEŘT

(Došlo dne 5. ledna 1963.)

V článku je provedeno exaktní řešení průhybů konsolového pásu konstantní tloušťky. Pro pás, jehož tloušťka je ve směru jeho šířky proměnná, je odvozeno řešení variační. Číselné výsledky jsou vyjádřeny tabelárně i graficky pro pás konstantní a lineárně proměnné tloušťky.

1. ÚVOD

Odvodíme řešení elastických průhybů desky, která má tvar nekonečného pásu, jehož jeden podélný okraj je pevně vetknutý a protější okraj volný. Pás je zatížen v obecném bodě silou kolmou k jeho střední rovině. (Pás budeme nadále nazývat „konsolový pás“.)

Většina prací zabývajících se řešením konsolového pásu se omezuje na případ, kdy zatížení působí na volném okraji pásu — viz např. [1]÷[5]. Pouze dvě práce uvádějí řešení pro zátěžnou sílu působící v obecném bodě. V první z nich [6] T. J. JARAMILLO postupoval tak, že myšleným podélným řezem proloženým působišťem zátěžné síly rozdělil pás na pásy dva. Složitě podmínky souvislosti na rozhraní obou pásů vedou k poměrně nepřehlednému řešení, získanému ve formě Fourierových integrálů. Pro dvě polohy zátěžné síly jsou použitím teorie residuí vyjádřeny příslušné integrály a získány hodnoty průhybů v celé síti bodů. Bohužel však již z grafického znázornění průhybových čar (uvedených na str. 4 této práce) je patrna nereálnost vyznačených průhybů.

Stejný problém řešil později C. WEBER [7] metodou postupných aproximací, kdy řešení vyjádřil potenciálními funkcemi vykazujícími singularitu. Řešení je pouze obecné.

Řešení pásu, jehož tloušťka je proměnná ve směru šířky pásu, uvádí H. D. CONWAY [8]. Omezuje se však na speciální případ, kdy tloušťka se vzdáleností od vetknutí je vázána exponenciální závislostí a naznačuje řešení pouze pro sílu působící na volném okraji.

Všechny uváděné práce vycházejí z předpokladu, že vetknutí okraje pásu je dokonalé. Výjimku tvoří práce N. C. SMALLA [9], v níž je řešen případ tenkého konsolového pásu konstantní tloušťky vetknutého do pružného poloprostoru. Důležitým výsledkem této práce je zjištění, že výsledný průhyb pružně vetknutého konsolového pásu lze získat superposicí průhybu vypočteného za předpokladu tuhého vetknutí a průhybu, závislého pouze na rozložení silových veličin ve vetknutí.

Jak vyplývá z provedeného přehledu, nebyly dosud uspokojivě vyřešeny průhyby konsolového pásu konstantní tloušťky při zatížení silou působící v obecném bodě, a pásu proměnné tloušťky byla věnována pozornost minimální. V předkládaném článku je proto kromě pásu konstantní tloušťky řešen pás, jehož tloušťka je ve směru jeho šířky proměnná. Podrobné numerické řešení je provedeno pro tloušťku lineárně proměnnou.

POUŽITÉ OZNAČENÍ

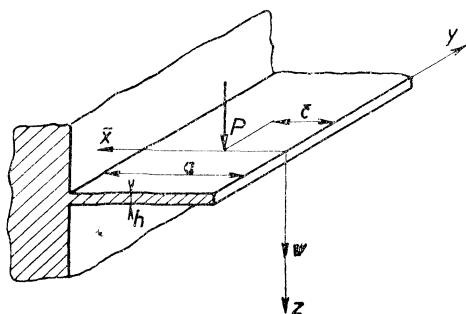
x, y	cm	souřadnice,
ξ, η	—	bezrozměrné souřadnice,
c	cm	vzdálenost působíště síly od okraje,
ζ	—	poměrná vzdálenost síly od okraje,
w	cm	průhyb,
h	cm	tloušťka desky (pásu),
l	cm	poloviční délka desky,
P	kg	zátěžná síla,
p	kg/cm ²	spojité zatížení,
μ	—	Poissonův poměr,
E	kg/cm ²	modul pružnosti v tahu,
D	kgcm	ohybová tuhost $\left(D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \right)$,
$m_{x,y}$	kgcm/cm	měrný ohybový moment,
i, j, m, n	—	přirozená čísla,
K	—	měrný průhyb.

2.0 PRŮHYBY TENKÉHO KONSOLOVÉHO PÁSU KONSTANTNÍ TLOUŠŤKY

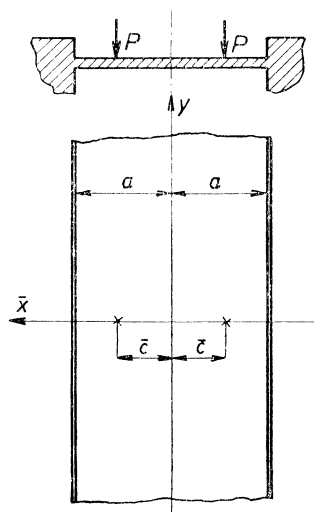
V této kapitole odvodíme vztahy pro výpočet pružných průhybů nekonečně dlouhého konsolového pásu konstantní tloušťky h a šířky a , který je znázorněn na obr. 1. Předpokládáme, že vetknutí pásu je dokonalé. Zátěžná síla P kolmá k povrchu pásu působí v obecném bodě, jehož vzdálenost od volného okraje označíme \bar{c} , přičemž $0 \leq \bar{c} < a$. Předpokládáme, že průhyby pásu jsou malé ve srovnání s jeho tloušťkou, a dále, že tloušťka pásu je mnohonásobně menší než jeho šířka. Za těchto předpokladů můžeme při řešení napjatosti a deformací vycházet z teorie tenkých desek.

Souřadný systém \bar{x}, y, z volíme tak, aby jedna osa (y) splynula s volným okrajem desky, neboť to bude výhodné při výpočtech v této kapitole. Druhá osa (\bar{x}) prochází působištem zátěžné síly, což vzhledem k nekonečné délce pásu neubírá nic na obecnosti případu. Konečně třetí osu (z) orientujeme souhlasně s orientací síly P , takže průhyby w budou vesměs kladné.

Řešení vytčené úlohy nám usnadní následující úvaha: U oboustranně vetknutého pásu dvojnásobné šířky – tj. šířky $2a$, symetricky zatíženého dvěma stejně velikými silami P (obr. 2), jsou ve středním řezu $\bar{x} = 0$ smykové síly q_x nulové, jak vyplývá ze symetrie. Působí zde pouze ohybový moment $m_x = m_0$.



Obr. 1.



Obr. 2.

Představme si nyní, že z takového pásu oddělíme řezem $\bar{x} = 0$ jednu jeho polovinu, aniž by se tím změnila jeho napjatost a volný okraj vzniklého „polovičního“ pásu zatížíme ještě momentem ohybovým $m_x = -m_0$. Výsledkem je pak takový stav, že celkový moment m_x a stejně tak i smyková síla q_x na jeho volném okraji jsou nulové. To odpovídá podmínkám na volném okraji našeho původního pásu znázorněného na obr. 1, a protože i ostatní podmínky, tj. zatížení silou P a vetknutí protějšího okraje, jsou v obou případech shodné, je zřejmě celkový průhyb „polovičního“ pásu roven průhybu hledanému.

Z provedené úvahy vyplývá postup, jehož pro výpočet průhybů pásu dále použijeme. Lze jej shrnout do těchto čtyř bodů:

1. Určíme průhyb oboustranně vetknutého pásu šířky $2a$ souměrně zatíženého dvěma stejně velikými silami P . Tento průhyb budeme nadále označovat symbolem w_1 .
2. Zjistíme velikost ohybového momentu m_x působícího ve středním řezu $\bar{x} = 0$ tohoto pásu.
3. Konsolový pás šířky a zatížíme na volném okraji záporně vzatým momentem zjištěným ad 2 a vypočteme průhyb tohoto pásu. Označíme jej w_2 .

4. Součet průhybů $w_1 + w_2 = w$ je hledaný průhyb konsolového pásu zatíženého osamělou silou.

(Použitý superposiční postup je schematicky znázorněn na obr. 4.)

Výhodou takto prováděného superposičního řešení je, že poměrně složitou pružnostní úlohu rozkládá na dvě úlohy podstatně jednodušší (popsané body 1 a 3), z nichž první byla již obecně vyřešena A. NÁDAIEM [10], [11], který též uvádí způsob číselného zpracování výsledků.

Následující řešení rozdělíme podle shora uvedených bodů.

Ad 1. Průhyb oboustranně vetknutého pásu zatíženého osamělou silou P v bodě ($\bar{x} = \bar{c}$, $y = 0$) vyjadřuje Nádaí vzorci, které pro pás šířky $2a$ a souřadný systém znázorněný na obr. 2 mají tvar

$$(1) \quad w_1 = w_1^* + w_1^{**},$$

kde

$$(2) \quad w_1^* = \frac{2Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n\pi y/2a}}{n^3} \left(1 + \frac{n\pi y}{2a}\right) \sin n\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{c}}{2a}\right) \cdot \sin n\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{x}}{2a}\right),$$

$$(y \geq 0),$$

udává průhyb pásu prostě podepřeného na okrajích $\bar{x} = \pm a$ a zatíženého silou P . Průhyb je tímto vzorcem definován pouze v oblasti $y \geq 0$, avšak vzhledem k symetrii podle osy \bar{x} stačí se omezit na tuto polovinu pásu – zde i v dalších výpočtech.

Druhá část pravé strany rov. (1) je vyjádřena vzorcem

$$(3) \quad w_1^{**} = -\frac{Pa^2}{\pi D} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{c}}{2a}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} \right\} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{x}}{2a}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} \right\} \frac{\cosh \alpha + 1}{\sinh \alpha + \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\sinh \frac{\alpha \bar{c}}{2a}}{\sinh \frac{\alpha}{2}} \right\} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\sinh \frac{\alpha \bar{x}}{2a}}{\sinh \frac{\alpha}{2}} \right\} \frac{\cosh \alpha - 1}{\sinh \alpha - \alpha} \right] \cos \frac{\alpha y}{2a} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Tento výraz definuje funkci w_1^{**} v celé oblasti $-a \leq \bar{x} \leq a$, $-\infty < y < \infty$ a značí průhyb pásu prostě podepřeného, zatíženého na obou okrajích ohybovými momenty m_x , jejichž velikost je určena tak, aby pro $\bar{x} = \pm a$ byla splněna podmínka

$$\frac{\partial w^*}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial w^{**}}{\partial \bar{x}}.$$

Dosadíme-li do vzorců (2) a (3) za \bar{c} hodnotu $(-\bar{c})$ dostaneme vztahy pro průhyb

pásu zatíženého v bodě $\bar{x} = -\bar{c}$, $y = 0$. Jejich přičtením k výrazům (2) a (3) získáváme vzorce pro průhyb pásu symetricky zatíženého dvěma stejně velkými silami P

$$(4) \quad w_1^* = \frac{4Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n\pi y/2a}}{n^3} \left(1 + \frac{n\pi y}{2a}\right) \cos \frac{n\pi \bar{c}}{2a} \cdot \cos \frac{n\pi \bar{x}}{2a}$$

a

$$(5) \quad w_1^{**} = -\frac{2Pa^2}{\pi D} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{c}}{2a}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} \right\} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{x}}{2a}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} \right\} \frac{\cosh \alpha + 1}{\sinh \alpha + \alpha} \cdot \cos \frac{\alpha y}{2a} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Ad 2. Ohybový moment m_x určíme ze vzorce

$$(6) \quad m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Nejprve vypočítáme m_x^{**} . Dosazením parciálních derivací rov. (5) do (6) dostáváme

$$m_x^{**} = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{c}}{2a}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} \right\} \frac{\cosh \alpha + 1}{\sinh \alpha + \alpha} \cdot \left[2 \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{x}}{2a}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} + \alpha(1 - \mu) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{x}}{2a}}{\cosh \frac{\alpha}{2}} \right\} \right] \cos \frac{\alpha y}{2a} d\alpha.$$

Dosadíme-li do pravé strany této rovnice $\bar{x} = 0$ a provedeme-li změnu integrační proměnné formální substitucí $\frac{1}{2}\alpha = \alpha$, dostáváme pro moment m_x^{**} působící v osovém řezu $\bar{x} = 0$ výraz

$$(7) \quad [m_x^{**}]_{\bar{x}=0} = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{c}}{a}}{\cosh \alpha} \right\} \frac{\cosh \alpha}{\sinh 2\alpha + 2\alpha} [4 - 2\alpha(1 - \mu) \operatorname{tgh} \alpha] \cos \frac{\alpha y}{a} d\alpha.$$

Integrál v této rovnici představuje v intervalu $-\infty < y < \infty$ spojitou funkci proměnné y , takže označíme

$$(7a) \quad [m_x^{**}]_{\bar{x}=0} = f^{**}(y).$$

Pro moment m_x^* dostáváme podobně po dosazení derivací funkce w_1^* (rov. (2)) do (6) výraz

$$m_x^* = \frac{P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n\pi y/2a}}{n} \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{n\pi y}{2a} \right] \cos \frac{n\pi \bar{c}}{2a} \cdot \cos \frac{n\pi \bar{x}}{2a},$$

který pro $\bar{x} = 0$ je

$$(8) \quad [m_x^*]_{\bar{x}=0} = \frac{P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n\pi y/2a}}{n} \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{n\pi y}{2a} \right] \cos \frac{n\pi \bar{c}}{2a}$$

a definuje opět nějakou funkci proměnné y

$$(8a) \quad [m_x^*]_{\bar{x}=0} = f^*(y).$$

Pro další výpočty je nutné vyjádřit tuto funkci ve stejném tvaru jako je vyjádřena $f^{**}(y)$, tj. Fourierovým integrálem

$$(9) \quad f^*(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda y \, d\lambda \int_0^{\infty} f^*(\beta) \cos \lambda \beta \, d\beta.$$

Vnitřní integrál

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} f^*(\beta) \cos \lambda \beta \, d\beta = \\ & = \frac{P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi \bar{c}}{2a} \int_0^{\infty} e^{-n\pi\beta/2a} \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{n\pi\beta}{2a} \right] \cos \lambda \beta \, d\beta \end{aligned}$$

pomocí vzorců

$$\int_0^{\infty} e^{-v\beta} \cos \lambda \beta \, d\beta = \frac{v}{\lambda^2 + v^2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\infty} \beta e^{-v\beta} \cos \lambda \beta \, d\beta = \frac{v^2 - \lambda^2}{(\lambda^2 + v^2)^2},$$

kde

$$v = \frac{n\pi}{2a},$$

přejde na

$$(10) \quad \int_0^{\infty} f^*(\beta) \cos \lambda \beta \, d\beta = \frac{P}{a} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos v \bar{c} \cdot \frac{v^2 + \mu \lambda^2}{(v^2 + \lambda^2)^2}.$$

Součet řady na pravé straně poslední rovnice lze určit použitím vzorce, uvedeného KURATOU v práci [12]

$$\begin{aligned} \psi(x) & \equiv \frac{1}{\cosh \frac{m\pi a}{2b}} \left\{ \frac{\sinh \frac{m\pi x}{b}}{2 \cosh \frac{m\pi a}{2b}} + \frac{x}{a} \sinh \frac{m\pi \left(\frac{a}{2} - x \right)}{b} \right\} = \\ & = \frac{8ma}{\pi^2 b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2 + \frac{m^2 a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{n\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Nahradíme-li zde a hodnotou $2a$ a zavedeme-li označení

$$\lambda = \frac{m\pi}{b}, \quad \nu = \frac{n\pi}{2a},$$

dostáváme

$$(11) \quad \psi(x) \equiv \frac{1}{2 \cosh \lambda a} \left\{ \frac{\sinh \lambda x}{\cosh \lambda a} + \frac{x}{a} \sinh \lambda(a-x) \right\} = \frac{2\lambda}{a^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\nu}{(\nu^2 + \lambda^2)^2} \sin \nu x, \\ (0 \leq x \leq 2a).$$

Derivací tohoto vzorce obdržíme

$$(12) \quad \frac{a}{2\lambda} \cdot \frac{d\psi(x)}{dx} \equiv \frac{1}{4} \frac{1}{\cosh \lambda a} \left\{ \frac{a \cosh \lambda x}{\cosh \lambda a} + \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda(a-x) - x \cosh \lambda(a-x) \right\} = \\ = \frac{1}{a} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\nu^2}{(\nu^2 + \lambda^2)^2} \cos \nu x$$

a integrací

$$(13) \quad -\frac{a\lambda}{2} \int_a^x \psi(x) dx \equiv \frac{1}{4} \frac{1}{\cosh \lambda a} \left\{ -\frac{a \cosh \lambda x}{\cosh \lambda a} + \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda(a-x) + x \cosh \lambda(a-x) \right\} = \\ = \frac{1}{a} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\lambda^2}{(\nu^2 + \lambda^2)^2} \cos \nu x.$$

Oba poslední vztahy jsou opět definovány pro $0 \leq x \leq 2a$.

Pravou stranu rov. (10) nyní vyjádříme pomocí vzorců (12) a (13), v nichž položíme $x = \bar{c}$. Dostáváme tak

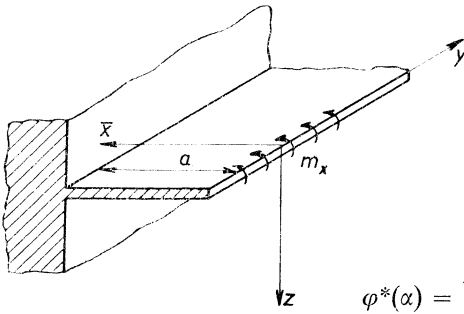
$$\int_0^{\infty} f^*(\beta) \cos \lambda \beta d\beta = \\ = \frac{P}{\cosh \lambda a} \left\{ (1 - \mu) \left[\frac{a \cosh \lambda \bar{c}}{\cosh \lambda a} - \bar{c} \cosh \lambda(a - \bar{c}) \right] + (1 + \mu) \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda(a - \bar{c}) \right\}.$$

Funkce $f^*(y)$ definovaná vzorcí (8a) a (8) je tedy určena Fourierovým integrálem

$$(14) \quad f^*(y) = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ (1 - \mu) \left[\frac{\cosh \alpha \frac{\bar{c}}{a}}{\cosh \alpha} - \frac{\bar{c}}{a} \cosh \alpha \left(1 - \frac{\bar{c}}{a} \right) \right] + \right. \\ \left. + (1 + \mu) \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha \left(1 - \frac{\bar{c}}{a} \right) \right\} \frac{\cos \alpha \frac{y}{a}}{\cosh \alpha} d\alpha,$$

v němž jsme místo λ zavedli novou integrační proměnnou vztahem $\alpha = a\lambda$.

Celkový moment m_x působící ve středním řezu $\bar{x} = 0$ oboustranně vetknutého pásu symetricky zatíženého, který je dán součtem výrazů $f^*(y) + f^{**}(y) = f(y)$, lze nyní pomocí vzorců (7) a (14) vyjádřit jednotným způsobem – integrálem



$$(15) \quad f(y) = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \frac{\alpha y}{a} d\alpha,$$

kde

$$(16) \quad \varphi(\alpha) = \varphi^*(\alpha) + \varphi^{**}(\alpha)$$

a dále

$$\varphi^*(\alpha) = \left\{ (1 - \mu) \left[\frac{\cosh \frac{\alpha \bar{c}}{a}}{\cosh \alpha} - \frac{\bar{c}}{a} \cosh \alpha \left(1 - \frac{\bar{c}}{a} \right) \right] + (1 + \mu) \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha \left(1 - \frac{\bar{c}}{a} \right) \right\} \frac{1}{\cosh \alpha}$$

Obr. 3.

a

$$\varphi^{**}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\cosh \frac{\alpha \bar{c}}{a}}{\cosh \alpha} \right\} \frac{\cosh \alpha}{\sinh 2\alpha + 2\alpha} [4 - 2\alpha(1 - \mu) \operatorname{tgh} \alpha].$$

Po provedení naznačené derivace v poslední rovnici a po dosazení funkcí $\varphi^*(\alpha)$ a $\varphi^{**}(\alpha)$ do (16) a úpravě dostáváme

$$(16a) \quad \varphi(\alpha) = \frac{\alpha \left(1 - \frac{\bar{c}}{a} \right) \left[(1 - \mu) \alpha \cosh \frac{\alpha \bar{c}}{a} - (1 + \mu) \sinh \frac{\alpha \bar{c}}{a} \right] - \sinh \alpha \left(1 - \frac{\bar{c}}{a} \right) \cdot \left[(1 - \mu) \frac{\alpha \bar{c}}{a} \cosh \alpha - (1 + \mu) \sinh \alpha \right]}{\alpha (\sinh \alpha \cdot \cosh \alpha + \alpha)}.$$

Ad 3. Konsolový pás šířky a znázorněný na obr. 3 je na volném okraji zatížen momentem $m_x = -f(y)$, kde funkce $f(y)$ je dána rov. (15).

Jak známo (viz např. TIMOSHENKO [13]), je průhyb tenké desky, resp. pásu, určen takovým řešením biharmonické rovnice

$$(17) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \bar{x}^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0,$$

které vyhovuje příslušným (Kirchhoffovým) okrajovým podmínkám. Tyto v našem případě znějí:

pro okraj $\bar{x} = a$ je

$$(18) \quad w = 0$$

a

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} = 0,$$

pro okraj $\bar{x} = 0$ je

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -f(y)$$

a

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x}^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \bar{x} \partial y^2} \right] = 0.$$

K těmto čtyřem podmínkám přistupují ještě podmínky další, vyjadřující, že průhyb pásu pro $y \rightarrow \infty$ je nulový. Odtud a vzhledem k symetrii podle osy \bar{x} a k podmínce $\partial w / \partial y = 0$ pro $y = 0$ lze řešení rov. (17) nalézt ve tvaru

$$(19) \quad w_2 = \int_0^\infty \left[\left(A_1 + A_2 \frac{\alpha \bar{x}}{a} \right) \cosh \frac{\alpha \bar{x}}{a} + \left(A_3 + A_4 \frac{\alpha \bar{x}}{a} \right) \sinh \frac{\alpha \bar{x}}{a} \right] \cos \frac{\alpha y}{a} d\alpha.$$

Veličiny $A_1 \div A_4$, nezávislé na \bar{x} a y , určíme dosazením příslušných derivací rov. (19) do podmínek (18). Pro jejich určení tak dostáváme po úpravě soustavu čtyř lineárních rovnic

$$\begin{aligned} A_1 + \alpha A_2 + \operatorname{tgh} \alpha \cdot A_3 + \alpha \operatorname{tgh} \alpha \cdot A_4 &= 0, \\ \operatorname{tgh} \alpha \cdot A_1 + (\alpha \operatorname{tgh} \alpha + 1) A_2 + A_3 + (\operatorname{tgh} \alpha + \alpha) A_4 &= 0, \\ (1 - \mu) A_1 + 2A_4 &= \frac{Pa^2}{2\pi D} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^2}, \\ (1 + \mu) A_2 - (1 - \mu) A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy obdržíme $A_1 \div A_4$ jako funkce α

$$(20) \quad A_1 = \frac{(1 + \mu) \sinh^2 \alpha + (1 - \mu) \alpha}{4 \cosh^2 \alpha - (1 + \mu)^2 \sinh^2 \alpha + (1 - \mu)^2 \alpha^2} \frac{Pa^2}{2\pi D} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^2},$$

$$A_2 = (1 - \mu) \frac{(1 + \mu) \sinh^2 \alpha \cdot (\alpha \sinh \alpha - \cosh \alpha) - 2\alpha \sinh \alpha \cdot \cosh^2 \alpha - (1 - \mu) \alpha^2 \cosh \alpha}{[(1 + \mu) \sinh \alpha + \alpha(1 - \mu) \cosh \alpha] \cdot [4 \cosh^2 \alpha - (1 + \mu)^2 \sinh^2 \alpha + (1 - \mu)^2 \alpha^2]} \cdot \frac{Pa^2}{2\pi D} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^2},$$

$$A_3 = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} C_2,$$

$$A_4 = \frac{2 \cosh^2 \alpha - (1 + \mu) \sinh^2 \alpha}{4 \cosh^2 \alpha - (1 + \mu)^2 \sinh^2 \alpha + (1 - \mu)^2 \alpha^2} \frac{Pa^2}{2\pi D} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^2},$$

keré dosadíme do rov. (19). Ta pak po úpravě zní

$$w_2 = \frac{Pa^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\alpha \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) \left[(1 - \mu) \alpha \cosh \frac{\alpha \bar{x}}{a} - (1 - \mu) \sinh \frac{\alpha \bar{x}}{a} \right] - \sinh \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) \cdot \left[(1 - \mu) \frac{\alpha \bar{x}}{a} \cosh \alpha - (1 + \mu) \sinh \alpha \right]}{4 \cosh^2 \alpha - (1 + \mu)^2 \sinh^2 \alpha + (1 - \mu)^2 \alpha^2} \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^2} \cos \frac{\alpha y}{a} d\alpha .$$

Vidíme, že čitatel prvního zlomku integrandu má tvar totožný s čitatelem funkce $\varphi(\alpha)$. Použijeme-li pro funkci $\varphi(\alpha)$ definovanou výrazem (16a) označení $\varphi(\alpha, \bar{c})$, můžeme vzorec dále vyjádřit ve formě symetrické pro \bar{x} a \bar{c} , tj.

$$(21) \quad w_2 = \frac{Pa^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\sinh \alpha \cdot \cosh \alpha + \alpha}{4 \cosh^2 \alpha - (1 + \mu)^2 \sinh^2 \alpha + (1 - \mu)^2 \alpha^2} \cdot \frac{\varphi(\alpha, \bar{x}) \cdot \varphi(\alpha, \bar{c})}{\alpha} \cdot \cos \frac{\alpha y}{a} d\alpha .$$

Ad 4. Průhyby konsolového pásu zatíženého osamělou silou P v bodě ($\bar{x} = \bar{c}$, $y = 0$) (viz obr. 1) můžeme nyní snadno vypočítat, neboť jsou dány součtem již zjištěných průhybů. Je totiž

$$(22) \quad w = w_1^* + w_1^{**} + w_2 .$$

Pro výpočet i pro tabelární vyjádření výsledků bude výhodné zavést bezrozměrné souřadnice $\bar{\xi}$, η , $\bar{\zeta}$ vztahy

$$(23) \quad \frac{\bar{x}}{a} = \bar{\xi}, \quad \frac{y}{a} = \eta, \quad \frac{\bar{c}}{a} = \bar{\zeta}$$

a vzorec pro průhyb udávat ve tvaru

$$(24) \quad w = \frac{Pa^2}{D} K(\bar{\xi}, \eta, \bar{\zeta}),$$

kde $K(\bar{\xi}, \eta, \bar{\zeta})$ je bezrozměrná funkce parametrů $\bar{\xi}$, η , $\bar{\zeta}$ (event. μ). Ve shodě se vzorcem (22) píšeme též

$$(25) \quad K = K_1^* + K_1^{**} + K_2 . \quad (25)$$

Výrazy pro členy pravé strany této rovnice jsou určeny rovnicemi (4), (5) a (21), takže, upravíme-li je do konečného tvaru vhodného pro výpočet, máme

$$(26) \quad K_1^* = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-n\pi\eta/2}}{n^3} \left(1 + \frac{n\pi\eta}{2}\right) \cdot \cos \frac{n\pi\bar{\xi}}{2} \cdot \cos \frac{n\pi\bar{\zeta}}{2},$$

$$(27) \quad K_1^{**} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_1^{**}(\bar{\xi}) \cdot \kappa_1^{**}(\bar{\zeta})}{\alpha(\sinh 2\alpha + 2\alpha)} \cos \alpha\eta \, d\alpha,$$

kde

$$\kappa_1^{**}(\gamma) = \cosh \alpha\gamma \cdot \operatorname{tgh} \alpha - \gamma \sinh \alpha\gamma, \\ (\gamma = \bar{\xi}, \bar{\zeta})$$

a

$$(28) \quad K_2 = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa_2(\bar{\xi}) \cdot \kappa_2(\bar{\zeta})}{\alpha^3(\sinh 2\alpha + 2\alpha) [4 \cosh^2 \alpha - (1 + \mu)^2 \sinh^2 \alpha + (1 - \mu)^2 \alpha^2]} \cos x\eta \, d\alpha,$$

kde

$$\kappa_2 = \alpha(1 - \gamma) [(1 - \mu) \alpha \cosh \alpha\gamma - (1 + \mu) \sinh \alpha\gamma] - \\ - \sinh \alpha(1 - \gamma) \cdot [(1 - \mu) \alpha\gamma \cosh \alpha - (1 + \mu) \sinh \alpha], \\ (\gamma = \bar{\xi}, \bar{\zeta}).$$

Vidíme, že všechny poslední vzorce jsou symetrické pro $\bar{\xi}$ a $\bar{\zeta}$, a proto musí pro určité hodnoty souřadnic $\bar{\xi}$, η , $\bar{\zeta}$ platit

$$(29) \quad K(\bar{\xi}, \eta, \bar{\zeta}) \equiv K(\bar{\zeta}, \eta, \bar{\xi}),$$

což odpovídá Maxwellovu teorému o reciprocitě posuvů. Vzhledem k nekonečné délce pásu platí vztah (29) pro všechna η .

2.1 ČÍSELNÝ VÝPOČET PRŮHYBŮ

resp. hodnot K , jehož způsob (především numerická integrace) je popsán v práci [14], jsme provedli pro čtyři polohy zátěžné síly určené hodnotami $\bar{\zeta} = 0; 0,25; 0,5; 0,75$. Pro každý z těchto čtyř případů jsme vypočítali průhyby ve všech 24 bodech, jejichž poloha je určena kombinacemi souřadnic $\bar{\xi} = 0; 0,25; 0,5; 0,75$ a $\eta = 0; 0,25; 0,5; 1; 1,5; 2$. Výsledky těchto výpočtů – hodnoty K – jsou přehledně sestaveny v tabulce 1, některé výsledky jsou pak vyneseny graficky na obr. 4, 5 a 6.

Při výpočtech v další části práce se ukázalo výhodným použití souřadného systému x, y, z , jehož počátek leží na vetknutém okraji pásu. Tento systém je znázorněn např. na obr. 7. Nutnost jednotného zpracování výsledků celé práce vyžaduje, aby i výsledky

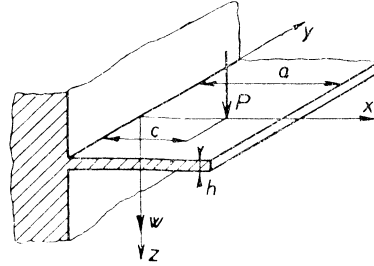
Tabulka 1

Průhyby tenkého konsolového pásu konstantní tloušťky — výsledky exaktního řešení

$$w = \frac{Pa^2}{D} K.$$

Přehled hodnot $K \cdot 10^4$

(v závorce hodnoty uváděné Jaramillem)



ξ, ζ	η	1; 1	1; 0,75	1; 0,5	1; 0,25	0,75; 0,75	0,75; 0,5	0,75; 0,25	0,5; 0,5	0,5; 0,25	0,25; 0,25
0		1664,8 (1669,5)	1010,2 (1011,6)	494,9 (507,7)	138,6 (158,8)	705,0 (700,6)	374,7 (376,5)	110,8 (123,5)	241,9 (252,7)	86,36 (86,58)	53,06 (53,47)
0,25		1496,8 (1497,0)	935,6 (936,5)	463,3 (463,1)	130,0 (130,2)	639,7	342,1 (343,7)	101,9 (74,2)	212,6	72,45	32,8
0,5		1208,9 (1210,8)	775,4 (775,1)	387,8 (387,7)	108,4 (108,5)	531,6	275,5 (275,9)	81,0 (65,9)	158,3	50,23	16,7
1		685,4 (685,6)	441,0 (438,9)	219,7 (219,9)	60,26 (60,16)	289,7	146,9 (147,3)	40,7 (36,9)	76,49	22,0	6,3
1,5		342,7 (342,5)	218,3 (218,7)	106,5 (106,6)	28,14 (28,2)	140,2	68,82 (69,07)	18,3 (17,3)	33,54	8,85	2,3
2		157,1 (157,5)	98,5 (99,3)	47,4 (46,8)	12,76 (12,06)	63,3	31,35 (29,89)	8,59 (4,52)	15,63	4,46	1,9

této kapitoly byly vyjádřeny ve shodě s výsledky ostatních kapitol. Docílíme toho substitucí

$$x = a - \bar{x} \quad \text{a podobně} \quad c = a - \bar{c}.$$

Stejně tak platí

$$\xi = 1 - \bar{\xi} \quad \text{a} \quad \zeta = 1 - \bar{\zeta},$$

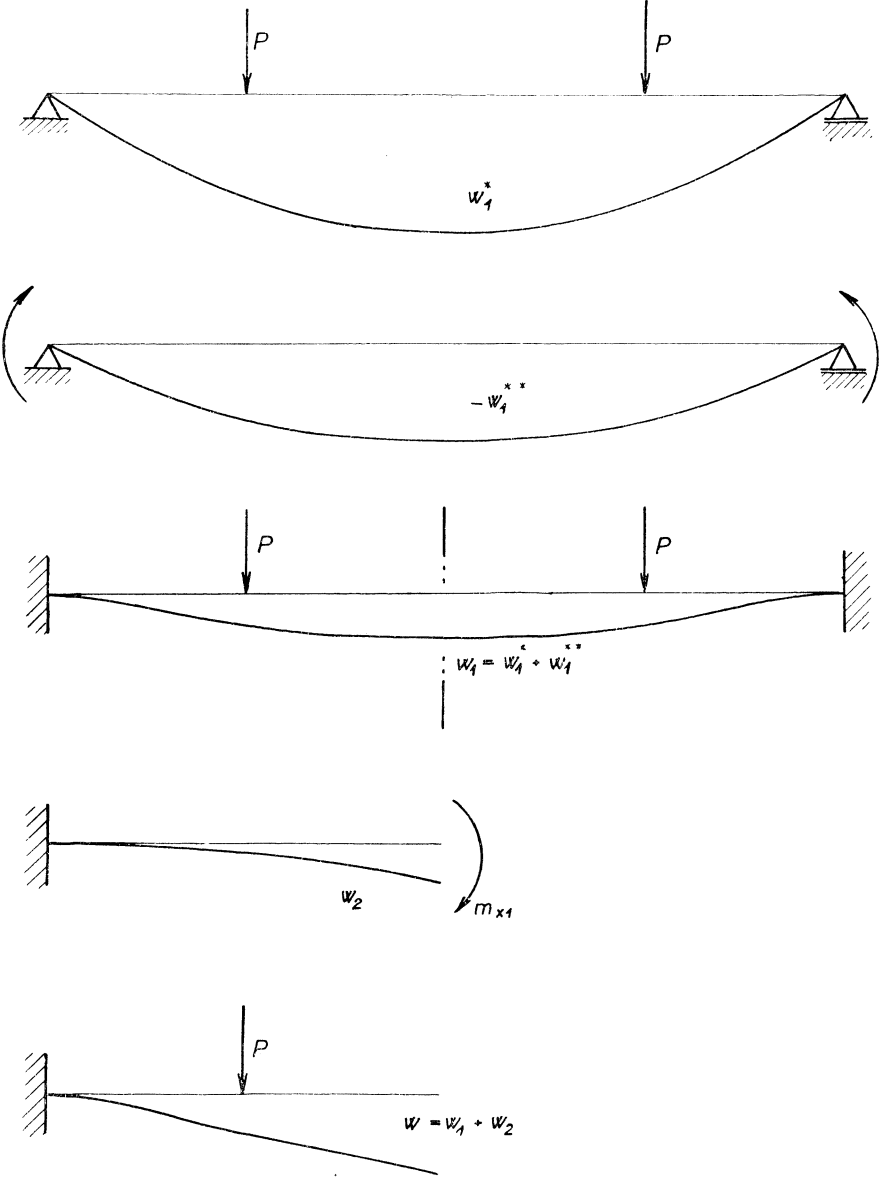
jestliže bezrozměrné souřadnice ξ a ζ mají význam (analogicky s $\bar{\xi}$ a $\bar{\zeta}$)

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{c}{a}.$$

Ve všech tabulkách a diagramech je pak použito souřadnic ξ, η, ζ . Aby nedocházelo k nejasnostem, je na tab. I znázorněn souřadný systém platný pro všechny tabulky i grafy.

V tabulce I a dalších je využito totožnosti (29), a to v tom smyslu, že pro dané ξ, η, ζ je vždy uvedena pouze jedna z hodnot $K(\xi, \eta, \zeta), K(\zeta, \eta, \xi)$. Uvedené hodnoty

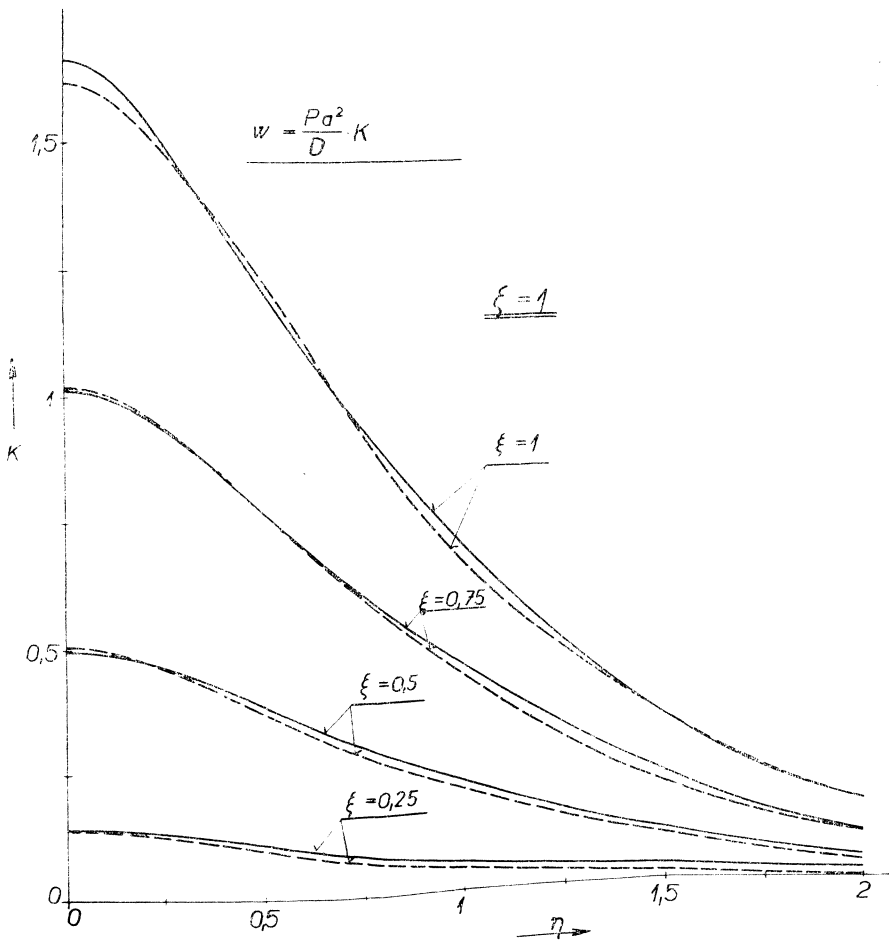
K jsou vypočítány pro Poissonův poměr $\mu = 0,3$. Funkce K_2 a tedy i K je na rozdíl od K_1^{**} a K_1^{**} funkcí μ , což je způsobeno odlišným charakterem okrajových podmínek; avšak je možno se přesvědčit, že i pro hodnoty μ dosti odlišné od $\mu = 0,3$ je změna K prakticky zanedbatelná.



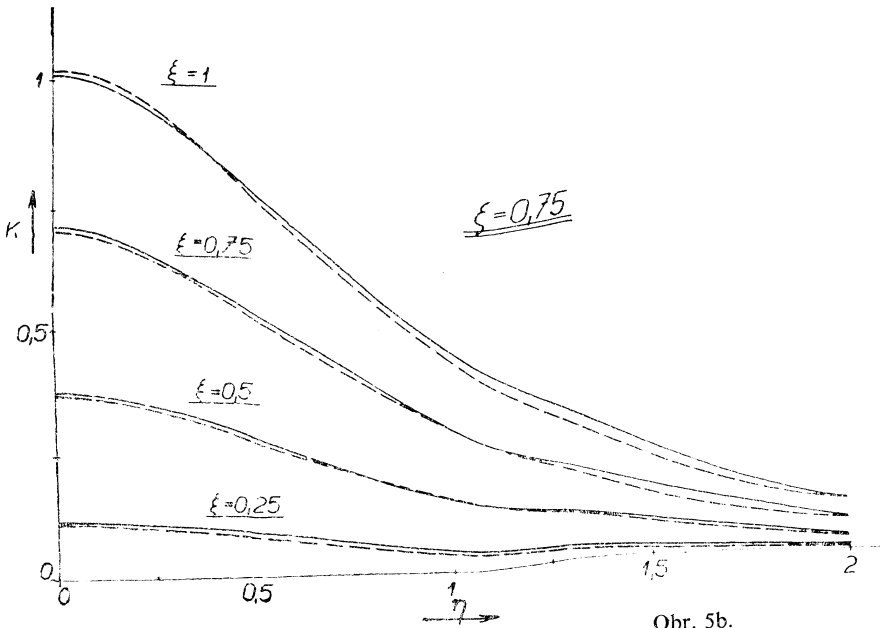
Obr. 4. Deformace řezu $\eta = 0$ pásu konstantní tloušťky (pro $\zeta = 0,5$) -- schéma superpozičního řešení.

V obdobné tabulce, avšak pouze pro dvě polohy zátěžné síly ($\zeta = 1, \zeta = 0,75$) uvádí Jaramillo [6] hodnoty $w : (Pa^2/\pi D)$, které určil rovněž pro $\mu = 0,3$. Abychom měli možnost přímého porovnání, jsou tyto hodnoty (ovšem dělené π) uvedeny v závorkách vždy u odpovídajících, námi určených hodnot K . Jak je patrné, ve většině případů je shoda jeho a našich výsledků velice dobrá, kdy rozdíly jsou často menší než 0,1% uváděných hodnot, avšak na druhé straně je celá řada hodnot uváděných Jaramillem spočítána se značnou chybou. Již z pouhého porovnání výsledků je jasné, že výpočtový postup citované práce je správný, avšak náročnému číselnému výpočtu nebyla věnována náležitá péče.

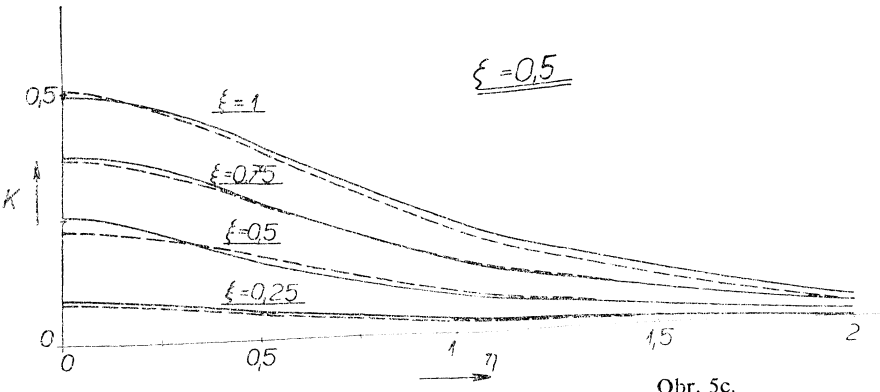
Abychom si učinili obraz o velikosti jednotlivých složek průhybů, jejichž superposicí jsme obdrželi výsledné řešení, jsou jako příklad na obr. 4 znázorněny v určitém měřítku průhybové čáry $w_1^*, w_1^{**}, w_1, w_2$ a w středního příčného řezu $\eta = 0$ pro sílu



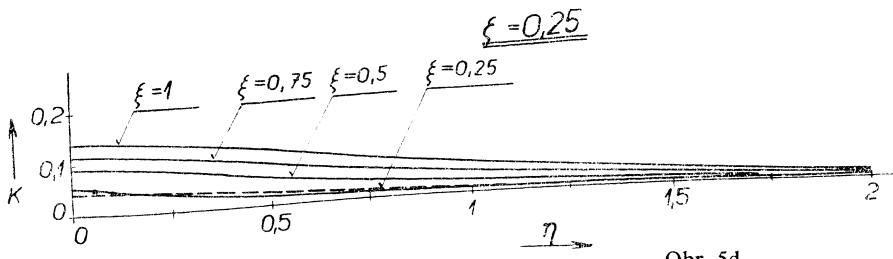
Obr. 5a.



Obr. 5b.



Obr. 5c.



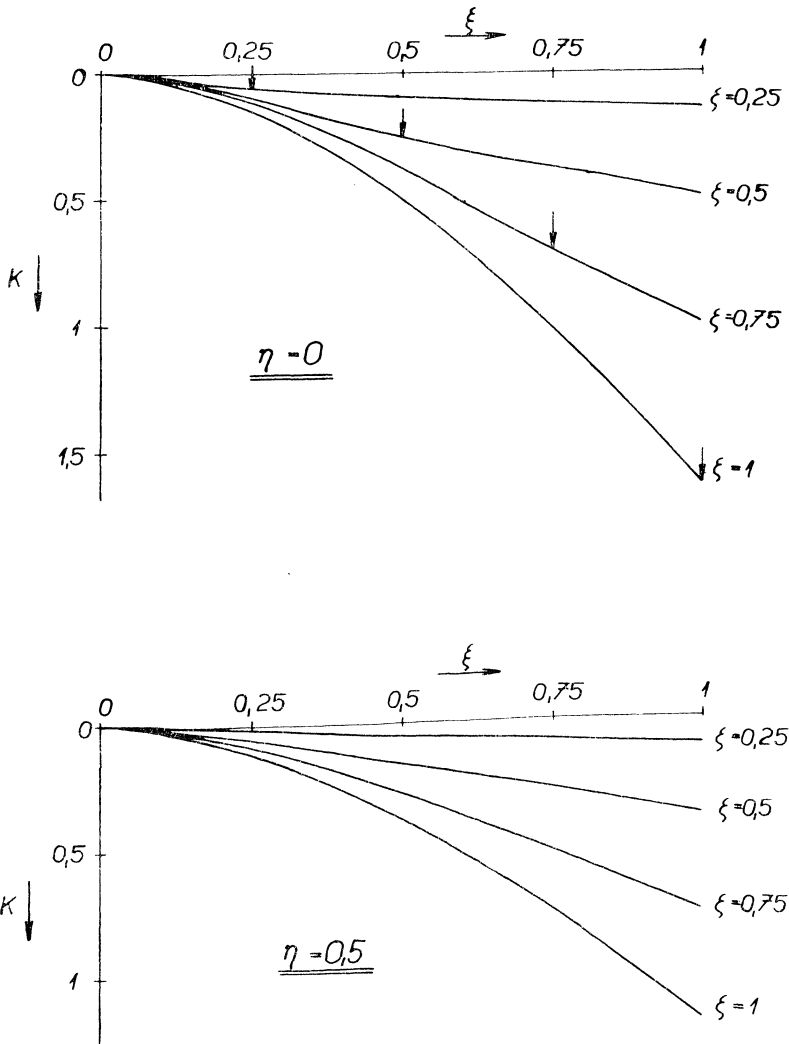
Obr. 5d.

Obr. 5. Průhyby pásu konstantní tloušťky — $w = (Pa^2/D) K$; plně ... exaktní řešení, čárkovane ... variační řešení.

působící v bodě $\zeta = 0,5$. Obrázek je přitom upraven tak, že znázorňuje schematicky postup superposice.

Na základě hodnot K uváděných v tab. I jsou v diagramech na obr. 5 nakresleny průhybové čáry podélných řezů $\xi = 1; 0,75; 0,5; 0,25$ konsolového pásu, a to postupně pro všechny čtyři polohy zátěžné síly. Podobně na obr. 6 jsou pro stejná zatížení znázorněny deformace dvou řezů příčných – $\eta = 0$ a $\eta = 0,5$. Na vertikální osu těchto diagramů jsou vynášeny bezrozměrné veličiny $K = w : (Pa^2/D)$.

Z výsledků této kapitoly je důležité připomenout, že průhyb pásu závisí na bezrozměrných souřadnicích $\xi = x/a$ a $\eta = y/a$, na relativní poloze zátěžné síly $\zeta = c/a$



Obr. 6. Deformace příčných řezů $\eta = 0$ a $\eta = 0,5$ pásu konstantní tloušťky.

a též na hodnotě Poissonova poměru μ . Pro pevné hodnoty ξ , η , ζ a μ je pak průhyb přímo úměrný výrazu Pa^2/D .

Jak je nejlépe patrné z diagramů, největší průhyb je na ose symetrie, a to na volném okraji pásu. Se stoupající vzdáleností ξ od vetknutého okraje roste i hodnota průhybu – při jakékoliv poloze zátěžné síly. Ve směru podélném – η – průhyb pásu velmi rychle doznívá a pro hodnoty $\eta > 2$ je již tak malý, že jej prakticky můžeme zanedbat.

3.0 PRŮHYBY KONSOLOVÉHO PÁSU PROMĚNNÉ TLOUŠTKY

V této kapitole odvodíme vztahy pro výpočet pásu (obr. 7), jehož tloušťka je ve směru příčném proměnná, tj. $h = h(x)$ a provedeme číselný výpočet pro speciální případ – pás lichoběžníkového průřezu zatížený silou P v obecném bodě. Předpokládáme opět, že tloušťka pásu je malá proti jeho šířce, takže pás můžeme pokládat za tenký a při výpočtu vycházet z teorie tenkých desek.

Exaktní řešení napjatosti a deformací desky proměnné tloušťky je možné jen v některých zvláštních případech, zpravidla pouze tam, kde řešení lze vhodnou substitucí převést na řešení biharmonické rovnice. V našem případě se musíme spokojit s řešením přibližným, založeným na některé energetické metodě.

Zvolíme takovýto postup řešení: Průhyby pásu w vyjádříme řadou

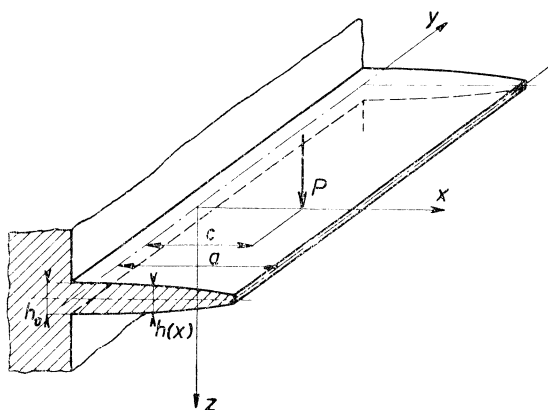
$$(30) \quad w = \sum_{i=1}^{i=n} C_i w_i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

kde $w_i(x, y)$ je soustava konečného počtu n vhodně volených funkcí a C_i jsou konstanty, jejichž hodnotu určíme použitím Rayleigh-Ritzovy metody, tzn. řešením soustavy rovnic

$$(31) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Symbolem Π je označena úhrnná potenciální energie soustavy, která podle [15] je dána součtem

$$(32) \quad \Pi = U - W,$$



Obr. 7.

v němž U – potenciální energie napjatosti pásu – je

$$(32a) \quad U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^a D(x) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

a W – potenciální energie vnějších sil – je v případě zatížení jedinou silou rovna

$$(33) \quad W = P w(c, 0).$$

Funkce $w_i(x, y)$ volíme ve tvaru součinů dvou funkcí

$$(34) \quad w_i(x, y) = f_i(x) g_i(y),$$

kteřé musí vyhovovat některým podmínkám, aby totiž soustava (30) mohla co nejlépe vyjádřit průhyb desky.

Jak známo – viz např. PONOMAREV [16] – okrajové podmínky v pružných soustavách se zpravidla dělí na geometrické a silové. Pod pojmem geometrické se rozumějí ty, které vyjadřují posuvy ať lineární nebo úhlové; jako silové jsou pak označovány podmínky, které jsou definovány momenty a smykovými silami. Při řešení úloh Ritzovou metodou není nutné vyhovět všem okrajovým podmínkám. Obvykle stačí vyhovět geometrickým.

Za $f_i(x)$ volíme tedy takové funkce, které pro $x = 0$ splňují podmínky $f_i(x) = f_i'(x) = 0$. Kromě toho budeme vyžadovat, aby v intervalu $0 < x < a$ byly spojitě nejen funkce samotné, ale i jejich derivace alespoň do druhého řádu (tento požadavek, jak snadno nahlédneme, odpovídá charakteru zatížení, kdy nepůsobí žádná vnější silová dvojice). Zvoleným $f_i(x)$ pak přiřadíme příslušné funkce $g_i(y)$, které určíme minimalisací deformační energie pásu, tzn., že funkce $g_i(y)$ nalezneme jako extrémály funkcionálu $U(w_i)$. Vycházíme tedy z představy, že pro předepsaný průhyb $f_i(x)$ v řezu $y = 0$ určíme takovou funkci $g_i(y)$, aby pro součin $f_i(x) g_i(y)$ byla deformační energie minimální.

Na základě uvedených metody odvodíme nyní konkrétní postup, jehož dále použijeme pro výpočet dvou případů – pásu konstantní tloušťky a pásu lichoběžníkového průřezu. Výsledky prvního případu nám poslouží k ověření správnosti použité metody, neboť máme možnost porovnat je s výsledky exaktního řešení provedeného v předcházející kapitole. Na základě takového srovnání budeme moci odhadnout, do jaké míry může provedené přibližné řešení vystihnout skutečnost i v případě druhém. Řešení druhého případu pak je vlastním cílem této kapitoly.

Pro zjednodušení zápisu zavedeme opět bezrozměrné souřadnice ξ, η, ζ .

Funkce w_i pak vyjádříme ve tvaru

$$w_i(\xi, \eta) = k_i \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta),$$

kde ovšem konstanta k_i může být zcela libovolná, a proto ji položíme rovnu 1. Máme pak

$$(35) \quad w_i(\xi, \eta) = \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta).$$

Dále si postavíme podmínku, aby pro $\xi = 1, \eta = 0$, bylo $w_i = 1$ a $\varphi_i = 1$, což bude výhodné při numerických výpočtech, takže při volbě $\varphi_i(\xi)$ musí být celkem splněny okrajové podmínky

$$(36) \quad \left. \begin{aligned} \varphi_i(\xi) &= 0 \\ \varphi_i'(\xi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pro } \xi = 0$$

a

$$\varphi_i(\xi) = 1 \quad \text{pro } \xi = 1.$$

Výběr vhodných funkcí $\varphi_i(\xi)$ může usnadnit jistá analogie s nosníkem, takže za $\varphi_i(\xi)$ je možno brát průhybové čáry konsolového nosníku.

Ke každé zvolené funkci $\varphi_i(\xi)$ přiřadíme tu funkci $\psi_i(\eta)$, která činí energii napjatosti $U(w_i)$ minimální. Dosadíme proto výraz (35) do rov. (32a), která v bezrozměrných souřadnicích, vyjádříme-li dále ohybovou tuhost tvarem

$$(37) \quad D(\xi) = D_0 \chi(\xi),$$

kde

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu^2)},$$

je

$$(38) \quad U(w_i) = \frac{D_0}{a^2} \int_0^\infty \int_0^1 \chi(\xi) [\varphi_i''(\xi) \varphi_i^2(\eta) + \varphi_i^2(\xi) \psi_i''(\eta) + 2\mu \varphi_i''(\xi) \varphi_i(\xi) \psi_i'(\eta) \psi_i(\eta) + 2(1 - \mu) \varphi_i'^2(\xi) \psi_i'^2(\eta)] d\xi d\eta.$$

Vzhledem k symetrii pásu podle osy x se při výpočtech můžeme omezit pouze na jednu polovinu pásu — dejme tomu na tu, která odpovídá hodnotám $\eta \geq 0$. Proto již i ve vzorci (38) integrujeme v mezích $0 \leq \eta < \infty$ a vzorec tak vlastně vyjadřuje dvojnásobnou energii jedné poloviny pásu.

Pravou stranu rovnice (38) můžeme poněkud zjednodušit, uvážíme-li, že $\psi_i(\eta)$ musí vyhovovat podmínkám

$$(39) \quad \left. \begin{aligned} \psi(\eta) &= 0 \\ \psi'(\eta) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pro } \eta \rightarrow \infty$$

a

$$\left. \begin{aligned} \psi(\eta) &= 1 \\ \psi'(\eta) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pro } \eta = 0.$$

(Poslední podmínka plyne ze symetrie.)

Integraci per partes dostáváme

$$\int_0^\infty \psi(\eta) \psi''(\eta) d\eta = \psi(\eta) \psi'(\eta) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \psi'^2(\eta) d\eta = - \int_0^\infty \psi'^2(\eta) d\eta,$$

takže

$$(40) \quad U(w_i) = \frac{D_0}{a^2} \int_0^\infty [\kappa_{ii} \psi_i^2(\eta) + 2v_{ii} \psi_i'^2(\eta) + \omega_{ii} \psi_i''^2(\eta)] d\eta,$$

kde jsme označili

$$(41) \quad \begin{aligned} \kappa_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \varphi_i^{n^2}(\xi) d\xi, & \omega_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) \varphi_i^2(\xi) d\xi, \\ v_{ii} &= \int_0^1 \chi(\xi) [(1 - \mu) \varphi_i'^2(\xi) - \mu \varphi_i(\xi) \varphi_i''(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Podmínkou pro extrém funkcionálu (40) je, že jeho první variace musí být rovna nule, tj.

$$\delta U_i = 0.$$

Jak známo, viz např. [16], tato podmínka bude splněna, jestliže funkce $\psi_i(\eta)$ bude vyhovovat Eulerově diferenciální rovnici daného variačního problému. V našem případě je to rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty

$$(42) \quad \omega_{ii} \psi_i^{IV}(\eta) - 2v_{ii} \psi_i''(\eta) + \kappa_{ii} \psi_i(\eta) = 0.$$

Její obecný integrál je závislý na tvaru kořenů odpovídající charakteristické rovnice. Nebudeme se zabývat podrobným rozбором všech možných případů, které by přitom mohly nastat, a omezíme se na případ jediný, odpovídající hodnotě poměru

$$(43) \quad \frac{\omega_{ii} \kappa_{ii}}{v_{ii}^2} > 1.$$

Jak je totiž možno se přesvědčit, všechny zvolené funkce $\varphi_i(\xi)$ při dále uvedeném praktickém výpočtu průhybů splňují tuto nerovnost.

V tom případě má charakteristická rovnice dva páry kořenů komplexně sdružených a obecný integrál rov. (42) je dán výrazem

$$(44) \quad \psi_i(\eta) = A_i e^{(\alpha_i + i\beta_i)\eta} + B_i e^{(-\alpha_i + i\beta_i)\eta} + C_i e^{(\alpha_i - i\beta_i)\eta} + D_i e^{(-\alpha_i - i\beta_i)\eta},$$

kde koeficienty α_i, β_i jsou určeny vztahy

$$(45) \quad \begin{aligned} \alpha_i &= \sqrt[4]{\frac{\kappa_{ii}}{\omega_{ii}}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_{ii}}{\sqrt{\kappa_{ii} \omega_{ii}}} \right)}, \\ \beta_i &= \sqrt[4]{\frac{\kappa_{ii}}{\omega_{ii}}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_{ii}}{\sqrt{\kappa_{ii} \omega_{ii}}} \right)}. \end{aligned}$$

Konstanty $A_i \div D_i$ určíme dosazením (44) do okrajových podmínek (39). Po jejich určení a po úpravě dostaneme výraz

$$(46) \quad \psi_i(\eta) = e^{-\alpha_i \eta} \left(\cos \beta_i \eta + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \sin \beta_i \eta \right),$$

který definuje funkci ψ_i pro všechna $\eta \geq 0$. Řešení pro $\eta < 0$ bychom dostali záměnou $\eta = -\eta$ na pravé straně této rovnice, avšak jak již bylo řečeno dříve, omezíme se na hodnoty $\eta \geq 0$.

Tak jsme dospěli k výsledku, že náhradní funkce mají tvar

$$(47) \quad w_i(\xi, \eta) = \varphi'_i(\xi) e^{-\alpha_i \eta} \left(\cos \beta_i \eta + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \sin \beta_i \eta \right).$$

Po určení tvaru funkcí $w_i(\xi, \eta)$ můžeme nyní vyšetřit tvar průhybové plochy $w(\xi, \eta)$ pásu zatíženého osamělou silou P , tzn. určit hodnoty konstant C_i ve vzorcích (30), který přepíšeme do tvaru

$$(48) \quad w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta).$$

Pro jejich určení máme soustavu n rovnic (31). Vyjádříme-li Π ve tvaru (32) až (33) a dosadíme-li za w podle (48) a za $D(x)$ výraz (37), mají rovnice této soustavy tvar

$$(49) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} \equiv \frac{2D_0}{a^2} \sum_{j=1}^{j=n} C_j \int_0^1 \int_0^\infty \chi(\xi) \{ \varphi'_i(\xi) \varphi'_j(\xi) \psi_i(\eta) \varphi_j(\eta) + [2(1-\mu) \varphi'_i(\xi) \varphi'_j(\xi) - \mu(\varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi))'] \cdot \psi'_i(\eta) \psi'_j(\eta) + \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) \psi''_i(\eta) \psi''_j(\eta) \} d\xi d\eta - P \varphi_i(\xi) = 0,$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Zavedeme-li analogicky jako u rov. (41) označení

$$(50) \quad \kappa_{ij} = \int_0^1 \chi(\xi) \varphi'_i(\xi) \varphi'_j(\xi) d\xi, \quad \omega_{ij} = \int_0^1 \chi(\xi) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

$$v_{ij} = \int_0^1 \chi(\xi) \left[(1-\mu) \varphi'_i(\xi) \varphi'_j(\xi) - \frac{\mu}{2} (\varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) + \varphi''_i(\xi) \varphi_j(\xi)) \right] d\xi,$$

lze rov. (49) přepsat do tvaru

$$(51) \quad \sum_{j=1}^{j=n} C_j \int_0^\infty \{ \kappa_{ij} \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) + 2v_{ij} \psi'_i(\eta) \psi'_j(\eta) + \omega_{ij} \psi''_i(\eta) \psi''_j(\eta) \} d\eta = \frac{Pa^2}{2D_0} \varphi_i(\xi),$$

resp.

$$(51a) \quad \sum_{j=1}^{j=n} C_j \left\{ \kappa_{ij} \int_0^\infty \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) d\eta + 2v_{ij} \int_0^\infty \psi'_i(\eta) \psi'_j(\eta) d\eta + \omega_{ij} \int_0^\infty \psi''_i(\eta) \psi''_j(\eta) d\eta \right\} = \frac{Pa^2}{2D_0} \varphi_i(\xi).$$

Tři integrály stojící na levé straně rovnice (51a) můžeme snadno vyjádřit díky jednotné stavbě funkcí $\psi_i(\eta)$ určené vzorcem (46).

Je možno psát

$$(52) \quad \int_0^\infty \psi_i \psi_j d\eta = J_{c_i c_j} + \frac{\alpha_i}{\beta_i} J_{s_i c_j} + \frac{\alpha_j}{\beta_j} J_{c_i s_j} + \frac{\alpha_i \alpha_j}{\beta_i \beta_j} J_{s_i s_j},$$

$$\int_0^\infty \psi_i' \psi_j' d\eta = \frac{(\alpha_i^2 + \beta_i^2)(\alpha_j^2 + \beta_j^2)}{\beta_i \beta_j} J_{s_i s_j},$$

$$\int_0^\infty \psi_i'' \psi_j'' d\eta = (\alpha_i^2 + \beta_i^2)(\alpha_j^2 + \beta_j^2) \left(J_{c_i c_j} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} J_{s_i c_j} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} J_{c_i s_j} + \frac{\alpha_i \alpha_j}{\beta_i \beta_j} J_{s_i s_j} \right),$$

kde symboly J značí následující integrály

$$(53) \quad J_{c_i c_j} = \int_0^\infty e^{-(\alpha_i + \alpha_j)\eta} \cos \beta_i \eta \cdot \cos \beta_j \eta d\eta = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_i + \alpha_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i + \beta_j)^2} + \frac{\alpha_i + \alpha_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2} \right],$$

$$J_{s_i c_j} = \int_0^\infty e^{-(\alpha_i + \alpha_j)\eta} \sin \beta_i \eta \cdot \cos \beta_j \eta d\eta = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_i + \beta_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i + \beta_j)^2} + \frac{\beta_i - \beta_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2} \right],$$

$$J_{c_i s_j} = \int_0^\infty e^{-(\alpha_i + \alpha_j)\eta} \cos \beta_i \eta \cdot \sin \beta_j \eta d\eta = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_i + \beta_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i + \beta_j)^2} - \frac{\beta_i - \beta_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2} \right],$$

$$J_{s_i s_j} = \int_0^\infty e^{-(\alpha_i + \alpha_j)\eta} \sin \beta_i \eta \cdot \sin \beta_j \eta d\eta = \frac{1}{2} \left[-\frac{\alpha_i + \alpha_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i + \beta_j)^2} + \frac{\alpha_i + \alpha_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2} \right].$$

3.1 PRŮHYBY PÁSU KONSTANTNÍ TLOUŠTKY

Pro $h = \text{konst.}$ je i $D = \text{konst.}$, takže funkce $\chi(\xi)$ definovaná vztahem (37) je $\chi = 1$. Tím se některé z odvozených vzorců poněkud zjednoduší. Výpočet provedeme pro hodnotu Poissonova poměru $\mu = 0,3$.

Za funkce $\varphi_i(\xi)$ volíme mnohočleny vyhovující podmínkám (36).¹⁾ Využíváme přitom analogie s nosníkem, tzn., že funkce $\varphi_i(\xi)$ pokládáme za průhybové čáry

¹⁾ Je jisté, že numerický výpočet by se značně zjednodušil, kdyby funkce $\varphi_i(\xi)$ byly ortogonální. Bohužel však se nám nepodařilo nalézt systém takových ortogonálních funkcí, které by vyhovovaly podmínkám (36).

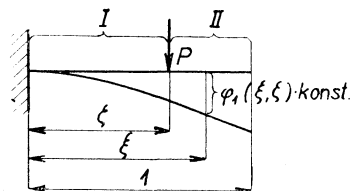
konsolového nosníku zatíženého spojitým nebo osamělým břemenem, ne však silovou dvojicí.

Výpočet provedeme pro čtyři polohy zátěžné síly P určené souřadnicemi $\eta = 0$, $\zeta = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. První z funkcí $-\varphi_1$ volíme tak, aby odpovídala průhybové čáře prismatického nosníku zatíženého silou P v bodě $\xi = \zeta$, jak je znázorněno na obr. 8. Tzn., že v úseku I $(0 \leq \xi \leq \zeta)$ je dána výrazem

$$(54a) \quad \varphi_1^I(\xi, \zeta) = \frac{\xi^2(3\zeta - \xi)}{\zeta^2(3 - \zeta)},$$

kdežto v úseku II $(\zeta < \xi \leq 1)$ výrazem

$$(54b) \quad \varphi_1^{II}(\xi, \zeta) = \frac{3\xi - \zeta}{3 - \zeta}.$$



Obr. 8.

Funkce jsou voleny tak, aby splňovaly podmínku $\varphi_1(1, \zeta) = 1$.

Další náhradní funkce volíme již nezávisle na ζ , a to tak, aby odpovídaly průhybovým čarám nosníku ohýbaného spojitým zatížením, určeným parabolou $(i - 2)$ -ho stupně, tj. zatížením tvaru $\text{konst.} \cdot (1 - \xi)^{i-2}$, kde postupně volíme $i = 2, 3, \dots$. Funkce $\varphi_i(\xi)$ mají tedy tvar

$$(55) \quad \varphi_i(\xi) = \frac{1}{(i + 1)} [(1 - \xi)^{i+2} - (i + 2)(1 - \xi) + (i + 1)],$$

takže je

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi) &= \frac{1}{3} [(1 - \xi)^4 - 4(1 - \xi) + 3], \\ \varphi_3(\xi) &= \frac{1}{4} [(1 - \xi)^5 - 5(1 - \xi) + 4]. \end{aligned}$$

Je pochopitelné, že připojením každé další funkce rychle vzrůstá práce potřebná k řešení daného problému, a proto se omezíme pouze na čtyři první náhradní funkce, kdy pro každou ze čtyř poloh síly P použijeme příslušnou $\varphi_1(\xi, \zeta)$ a tři další funkce $\varphi_i(\xi)$ pro $i = 2, 3, 4$. Ke každé takto zvolené funkci $\varphi_i(\xi)$ nalezneme dále funkci $\psi_i(\eta)$ ve tvaru (46). Koeficienty α_i a β_i , které určíme pomocí vzorců (45), jsou přehledně sestaveny v následující tabulce:

i	ζ	α_i	β_i
1	0,25	1,861	1,046
	0,5	1,786	0,722
	0,75	1,802	0,527
	1	1,837	0,439
2		1,792	0,564
3		1,782	0,675
4		1,787	0,765

Dosazením hodnot α_i a β_i do rov. (51) a pomocí (52) a (53) dostaneme pro každou polohu síly P (pro každé ζ) soustavu čtyř rovnic pro určení čtyř konstant $C_1(\zeta) \div C_4(\zeta)$. Jejich vyřešením dostáváme hodnoty konstant, uvedené v další tabulce:

ζ	$C_1(\zeta)/(Pa^2/D)$	$C_2(\zeta)/(Pa^2/D)$	$C_3(\zeta)/(Pa^2/D)$	$C_4(\zeta)/(Pa^2/D)$
0,25	0,03823	-0,03834	0,10207	-0,08792
0,5	0,11614	0,05731	-0,25174	0,12880
0,75	0,17059	-0,12075	0,02774	0,02422
1,0	0,19893	-0,05050	-0,02432	0,03787

Takovým způsobem je zcela popsán průhyb pásu $h = \text{konst.}$ Vyjádříme-li jej ve formě, které jsme použili k vyjádření průhybů v odstavci 2.0, tj.

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{Pa^2}{D} \cdot K(\xi, \eta, \zeta),$$

je funkce $K(\xi, \eta, \zeta)$ určena vztahem

$$(56) \quad K(\xi, \eta, \zeta) = C_1(\zeta) \varphi_1(\xi, \zeta) \psi_1(\eta, \zeta) + \sum_{i=2}^{i=4} C_i(\zeta) \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta).$$

Hodnoty funkce K byly vypočteny pro všechny možné kombinace těchto souřadnic: $\xi, \zeta = 0,25; 0,5; 0,75; 1, \eta = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2$. Jak vyplývá z podstaty provedeného přibližného řešení, vypočtené hodnoty K vyhovovaly podmínce (29) vyjadřující Maxwellův teorém pouze přibližně, avšak rozdíly mezi příslušnými hodnotami $K(\xi, \eta, \zeta)$ a $K(\zeta, \eta, \xi)$ nebyly zásadního charakteru. Je pravděpodobné, že skutečný průhyb pásu lépe vystihne nějaká hodnota K ležící mezi $K(\xi, \eta, \zeta)$ a $K(\zeta, \eta, \xi)$. Proto v přehledu hodnot K – v tab. IIa – jsou vždy pro určité hodnoty souřadnic ξ, η a ζ uvedeny střední hodnoty, tj.

$$(57) \quad K = \frac{K(\xi, \eta, \zeta) + K(\zeta, \eta, \xi)}{2}.$$

Pomocí tabulky IIa jsou pak na diagramech (obr. 5) vyneseny čárkovaně křivky, jejichž význam je shodný s významem křivek plně vytažených, tzn., že znázorňují v určitém měřítku průhybové čáry podélných řezů pásu. Plně vytažené křivky jsou výsledkem exaktního řešení průhybů tenkého pásu, a proto ze vzájemné polohy obou systémů křivek můžeme soudit na přesnost provedeného variačního výpočtu. Z diagramů je zřejmé, že přesnost provedeného řešení je pro praktické účely zcela vyhovující.

Na základě tohoto porovnání můžeme plným právem očekávat, že přibližný vý-

počet průhybů lichoběžníkového pásu, provedený obdobným způsobem jako výpočet pásu konstantní tloušťky, bude též s dostatečnou přesností aproximovat průhyb skutečný.

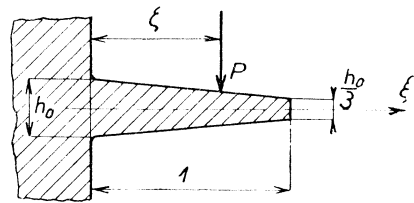
3.2 KONSOLOVÝ PÁS LICHOBĚŽNÍKOVÉHO PRŮŘEZU

Při výpočtu průhybů pásu lichoběžníkového průřezu se omezíme na případ, kdy tloušťka pásu na volném okraji je $\frac{1}{3}$ tloušťky ve vetknutí, jak je znázorněno na obr. 9. Tloušťka je tedy určena vztahem

$$(58) \quad h(\xi) = h_0(1 - k\xi),$$

kde v našem případě $k = \frac{2}{3}$. Proto funkce $\chi(\xi)$ definovaná vztahem (37) a použitá v dalších vztazích je

$$\chi(\xi) = \frac{1}{27}(3 - 2\xi)^3.$$



Obr. 9.

Číselný výpočet je proveden opět pro $\mu = 0,3$.

Jak již bylo řečeno, dokonalost náhrady skutečných průhybů hodnotami zjištěnými přibližným – variačním řešením, a stejně tak i pracnost řešení je značně ovlivněna volbou funkcí $\varphi_i(\xi)$. Proto využijeme při jejich volbě zkušeností získaných při výpočtu provedeném v odst. 3.1. Především již nebudeme volit pro každou polohu zátěžné síly zvláštní tvar funkce φ_1 , ale všechny funkce φ_i vyjádříme vždy jen v jediném tvaru nezávislém na ζ . Tím značně klesne pracnost výpočtu.

Při řešení pásu $h = \text{konst.}$ se dále ukázalo nevýhodným, že průběhy funkcí $\varphi_i(\xi)$ měly v zásadě stejný charakter, a proto jsme obdrželi hodnoty α_i vzájemně velmi blízké. To vedlo k tomu, že i hodnoty stojící u konstant C_i v soustavě rovnic (51) se vzájemně odlišovaly velice nepatrně, takže výpočet bylo nutno provádět se značnou pečlivostí, abychom hodnoty konstant určili dostatečně přesně.

Při řešení lichoběžníkového pásu postupujeme proto při volbě funkcí $\varphi_i(\xi)$ zcela jinak. Za $\varphi_1(\xi)$ volíme co nejjednodušší funkci, která alespoň zhruba může vystihnout charakter průhybu desky a vyhovuje přitom podmínkám (36), tj. kvadratickou parabolu

$$(59) \quad \varphi_1(\xi) = \xi^2.$$

Další funkce $\varphi_i(\xi)$ ($i = 2, 3, \dots$) volíme ve tvaru mnohočlenů $(i + 1)$ -ho stupně, jejichž všechny kořeny jsou reálné. Podmínky (36) vyžadují, aby funkce $\varphi_i(\xi)$ měly dvojný kořen v bodě $\xi = 0$; pro ostatních $(i - 1)$ kořenů klademe podmínku, aby všechny byly jednoduché a dělily interval $(0, 1)$ na i stejných dílů. Tím jsou funkce $\varphi_i(\xi)$ jednoznačně definovány. Při výpočtu se opět omezíme na první čtyři, které jsou

$$(59a) \quad \begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \xi^2, \\ \varphi_2(\xi) &= \xi^2(2\xi - 1), \\ \varphi_3(\xi) &= \xi^2(3\xi - 1)(3\xi - 2), \\ \varphi_4(\xi) &= \xi^2(4\xi - 1)(4\xi - 2)(4\xi - 3). \end{aligned}$$

Funkce $\varphi_i(\xi)$ splňují nerovnost (43), takže jim přidružené $\psi_i(\eta)$ budou mít tvar určený vzorcem (46), a přísluší jim tyto hodnoty α_i a β_i

$$(60) \quad \begin{array}{ll} \alpha_1 = 2,657, & \beta_1 = 1,234, \\ \alpha_2 = 4,462, & \beta_2 = 1,765, \\ \alpha_3 = 6,604, & \beta_3 = 2,722, \\ \alpha_4 = 9,012, & \beta_4 = 4,001. \end{array}$$

Z velikosti hodnot α_i vyplývá, že se vzrůstajícím i funkce $w_i(\xi, \eta)$ velmi rychle doznívají v podélném směru (obsahují součinitel $e^{-\alpha_i \eta}$). Proto na síť funkcí $w_i(\xi, \eta)$ můžeme nahlížet tak, že zatímco w_1 má význam jakési funkce základní, ostatní – w_2, w_3, \dots vystupují jako její korekční členy. Je zřejmé, že záleží především na volbě této základní funkce, do jaké míry uvedeným přibližným řešením vystihneme skutečnost. Jak ukážeme dále, v daném případě je volba w_1 jako funkce základní vcelku vyhovující.

Jak jsme předpokládali, provedená volba funkcí $\varphi_i(\xi)$ výpočet značně usnadňuje, neboť výsledné konstanty dostáváme s přesností řádově stejnou s jakou provádíme celý výpočet. Prakticky to pro nás znamená, že v celém výpočtu se omezíme na čísla s maximálním počtem 5 platných míst na rozdíl od výpočtu předcházejícího (pás $h = \text{konst.}$), kde pro dosažení stejné přesnosti výsledků jsme museli počítat s čísly se 7–8 platnými místy.

Hodnoty konstant $C_i(\zeta)$ jsme dostali řešením systému čtyř rovnic (51) vždy pro každou polohu zátěžné síly určenou souřadnicí ζ . Jsou uvedeny v následující tabulce:

ζ	$C_1(\zeta)/(Pa^2/D_0)$	$C_2(\zeta)/(Pa^2/D_0)$	$C_3(\zeta)/(Pa^2/D_0)$	$C_4(\zeta)/(Pa^2/D_0)$
0,25	+0,06372	−0,07663	+0,05894	−0,02053
0,5	+0,18698	−0,08176	−0,01581	+0,02211
0,75	+0,31920	+0,00545	−0,03159	−0,00627
1	+0,45182	+0,10184	+0,04572	+0,02599

V úlohách, kde není známo řešení exaktní, bývá velice nesnadné určit, jak „energetické“ řešení vyjádřené lineární kombinací několika náhradních funkcí vystihuje skutečnost. Dokonalost aproximace lze posoudit zpravidla pouze podle konvergence posloupnosti výsledků získaných postupným přidáváním jednotlivých náhradních funkcí. Provádět podrobný rozbor dosažené přesnosti výsledků by v našem případě bylo velmi pracné, omezíme se proto jen na přidání ještě jedné náhradní funkce k dosavadním w_1, w_2, w_3 a w_4 .

Shora bylo již poukázáno na důležitost volby funkce „základní“ a proto přidanou funkci, kterou označíme w_0 , určíme tak, aby svým charakterem odpovídala představě takové základní funkce. Toho dosáhneme např. volbou

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{3}\xi^2(\xi^2 - 4\xi + 6),$$

jak vyplývá z vypočítaných hodnot

$$\alpha_0 = 2,644, \quad \beta_0 = 1,335,$$

odpovídajících velikostí hodnotám α_1, β_1 , uvedeným v rov. (60). Výpočtem podle uvedeného postupu získáme hodnoty konstant $C_0(\zeta) \div C_4(\zeta)$, které jsou sestaveny v přehlednou tabulku:

ζ	$C_0(\zeta)/(Pa^2/D_0)$	$C_1(\zeta)/(Pa^2/D_0)$	$C_2(\zeta)/(Pa^2/D_0)$	$C_3(\zeta)/(Pa^2/D_0)$	$C_4(\zeta)/(Pa^2/D_0)$
0,25	0,06576	-0,06390	0,04618	-0,01594	-0,01315
0,5	0,05165	-0,02717	-0,02347	0,01979	0,06154
0,75	0,11804	0,04958	-0,03946	0,00002	0,08390
1	0,38638	0,05555	0,04088	0,01721	-0,03663

Určením konstant $C_i(\zeta)$ je úloha prakticky vyřešena a nyní již snadno vypočítáme hodnoty průhybů w pomocí vzorce (48). Podobně jako v předcházejících odstavcích zavedeme bezrozměrné veličiny $K_l(\xi, \eta, \zeta)$ (indexem l vyjadřujeme, že hodnoty K_l přísluší lichoběžníkovému pásu) vztahem

$$K_l(\xi, \eta, \zeta) = \frac{w(\xi, \eta, \zeta)}{\frac{Pa^2}{D_0}}$$

Hodnoty K_l by měly i v uvažovaném případě vyhovovat Maxwellovu teorému (29), avšak stejně jako u pásu $h = \text{konst.}$, není vzhledem k přibližnosti řešení tato rovnost v některých bodech splněna. Proto opět za směrodatné budeme brát hodnoty střední

$$\frac{K_l(\xi, \eta, \zeta) + K_l(\zeta, \eta, \xi)}{2}$$

Tyto jsme vypočítali jak pro řešení vyjádřené pomocí čtyř funkcí w_i , tak i pro řešení vyjádřené 5 funkcemi, a shoda hodnot v obou těchto případech byla velmi dobrá. Lze tedy soudit, že i aproximace skutečného průhybu bude vyhovující. Dokonalejší aproximaci můžeme očekávat od druhého případu, a proto průhyb tenkého lichoběžníkového pásu vyjádříme hodnotami K_l získanými na základě hodnot $C_i(\zeta)$ uváděných v poslední tabulce a příslušných 5 funkcí $w_0 \div w_4$. Takto vypočítané hodnoty K_l jsou pak uvedeny v tabulce 2b pro tatáž ξ, η, ζ , pro něž je vyjádřena funkce K v tabulce 2a.

Tabulka 2

Průhyby konsolového pásu – výsledky přibližného řešení

$$w = \frac{Pa^2}{D} K$$

A) Pás konstantní tloušťky

Přehled hodnot $K \cdot 10^4$

$\eta \backslash \xi, \zeta$	1; 1	1; $\frac{3}{4}$	1; $\frac{1}{2}$	1; $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}; \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}; \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}; \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$
0	1620	1019	504	140	691	366	108	223	74	34
0,25	1486	934	458	125	633	332	97	202	66	31
0,5	1215	764	370	96	517	269	75	161	49	24
0,75	933	584	277	68	395	201	53	118	35	15
1	646	427	199	45	287	143	33	82	23	2
1,5	333	198	92	14	127	63	10	36	6	9
2	155	93	36	6	60	25	4	11	1	—

B) Pás lichoběžníkového průřezu

Přehled hodnot $K_i \cdot 10^4$

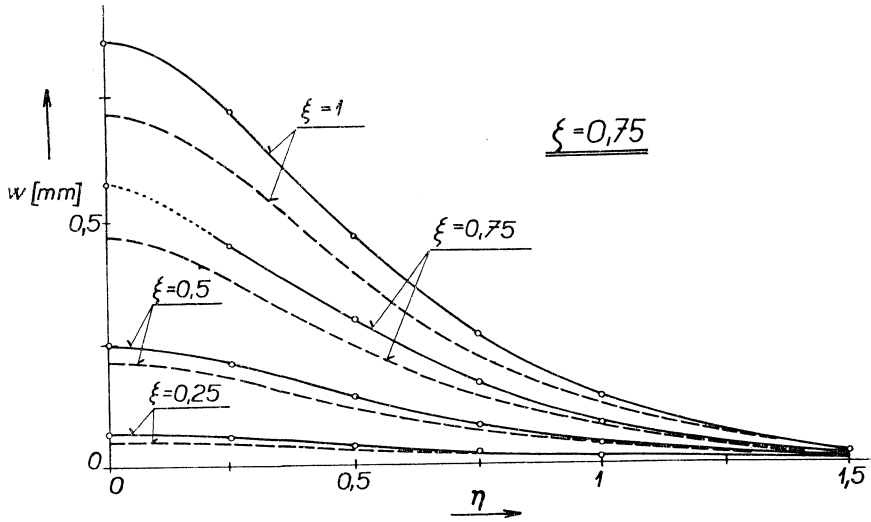
$\eta \backslash \xi, \zeta$	1; 1	1; $\frac{3}{4}$	1; $\frac{1}{2}$	1; $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}; \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}; \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}; \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$
0	4634	2121	8234	1894	1329	605	143	355	103	52
0,25	3481	1765	695	171	1086	507	128	289	88	38
0,5	2109	1149	487	129	699	338	96	188	59	21
0,75	1169	650	294	88	393	197	61	107	34	11
1	601	333	157	53	200	102	34	55	18	5
1,5	119	64	31	13	37	19	7	10	3	1
2	19	8	4	2	3	1	1	1	0	0

4. ZÁVĚR

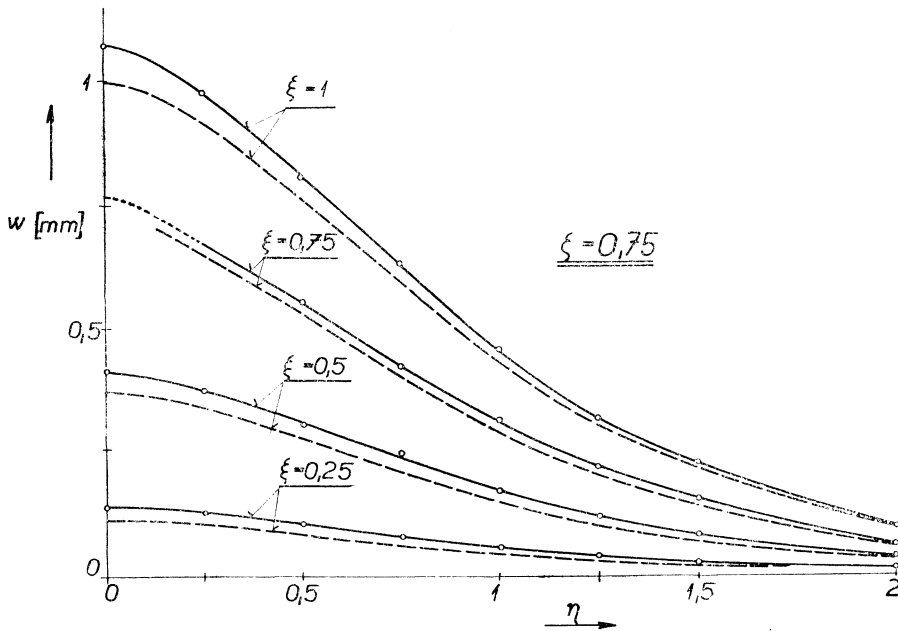
Průhyby konsolového pásu lichoběžníkového průřezu nebyly dosud řešeny ani teoreticky ani experimentálně. Jediným kritériem správnosti provedených výpočtů je tedy porovnání jejich výsledků s výsledky vlastního experimentu. Měřili jsme proto průhyby konsolového pásu zatíženého soustředěným břemenem, a to jednak pásu konstantní tloušťky, jednak pásu lichoběžníkového.

Teoretické řešení bylo provedeno pro nekonečný pás. Při experimentálním ověření jej musíme nahradit deskou délky konečné, avšak takové, aby vliv okrajů neovlivňoval

průhyby v okolí zátěžné síly. Jak patrné z vypočtených hodnot průhybu, doznívá průhyb velmi rychle se zvětšujícím se η ; pro $\eta \geq 3$ je prakticky zanedbatelný. Proto u obou modelů desek (vyrobených z organického skla) jsme se omezili na délku



Obr. 10. Průhyby pásu konstantní tloušťky $h = 3,8$ mm zatíženého silou $P = 10$ kg v bodě $\zeta = 0,75$, plně ... hodnoty změřené, čárkovaně ... hodnoty vypočtené



Obr. 11. Průhyby lichoběžníkového pásu $h_0 = 5,5$ mm zatíženého silou $P = 10$ kg v bodě $\zeta = 0,75$; plně ... hodnoty změřené, čárkovaně ... hodnoty vypočtené.

$2l = 6a$. Obě měřené desky měly stejné půdorysné rozměry, a to: šířku $a = 40$ mm a délku $2l = 240$ mm. Přitom tloušťka první desky byla $h = 3,8$ mm, tloušťka druhé (ve vetknutí) $h_0 = 5,5$ mm.

Podrobný popis měřícího zařízení i výsledků poměrně rozsáhlého měření je obsažen v práci [14]. Zde pouze pro ilustraci je na obr. 10 a 11 znázorněno porovnání změřených a vypočtených hodnot průhybů obou desek, zatížených v bodě $\zeta = 0,75$ silou $P = 10$ kg.

Z porovnání výsledků vyplývá jednotná tendence: změřené hodnoty průhybů jsou poněkud větší než hodnoty vypočtené (zvláště u lichoběžníkové desky, jejíž tloušťka ve vetknutí je větší), avšak přitom tvar průhybových křivek podélných řezů je v obou případech prakticky shodný. Z toho lze soudit, že provedeným upnutím desek se nepodařilo nahradit dokonalé (dokonale tuhé) vetknutí, které bylo jedním ze základních předpokladů výpočtu. Naproti tomu shodnost tvarů křivek změřených i vypočtených v zásadě potvrzuje správnost výpočtu.

Literatura

- [1] *Mac-Gregor C. W.*: Deflection of Long Helical Gear Teeth, Mechanical Engineering, Vol. 59, 1935, str. 225–227.
- [2] *Holl D. L.*: Cantilever Plate with Concentrated Edge Load, Journal of Applied Mechanics, Vol. 4, Trans. ASME, 59, 1937, str. A8–A10.
- [3] *Hopkins H. G.*: Elastic Deformations of Infinite Strips, Proceedings of the Cambridge Philosoph. Soc., Vol. 46, 1950, str. 164–181.
- [4] *Brilla J.*: Statické riešenie anizotropických dosák používaných v stavebníctve, SAV 1960, Závěrečná zpráva úlohy X 11-S/59-III, Ústavu stavebnictva a architektúry.
- [5] *Girkmann K.*: Flächentragwerke, 4. Auflage, Springer, Wien 1956.
- [6] *Jaramillo T. J.*: Deflections and Moments Due to a Concentrated Load on a Cantilever Plate of Infinite Length, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, Trans. ASME, Vol. 72, 1950, str. 67–72, 342–343.
- [7] *Weber C.*: Einseitig eingespannter Plattenstreifen mit Einzellast, ZAMM, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 40, Nr. 12, 1960, str. 558–565.
- [8] *Conway H. D.*: The Flexure of Infinite Rectangular Plates of Varying Thickness, Ingenieur-Archiv, Vol. 26, 1958, str. 143–145.
- [9] *Small N. C.*: Bending of a Cantilever Plate Supported from an Elastic Half Space, Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, Trans. ASME, ser. E, 1961, str. 387–394.
- [10] *Nádai A.*: Über die Biegung der rechteckigen Platte durch Einzellasten, Der Bauingenieur 1921, Heft 11, str. 299–304.
- [11] *Nádai A.*: Über die Spannungsverteilung in einer durch eine Einzelkraft belasteten rechteckigen Platte, Der Bauingenieur 1921, Heft 1, str. 11–16.
- [12] *Kurata M.*: Bending of Simply Supported Rectangular Plates with Clamped Portions Along Arbitrary Sections of the Edges, Ingenieur-Archiv, Bd. XXVII, Nr. 6, 1960, str. 385–416.
- [13] *Timoshenko S.*: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill 1940.
- [14] *Heřt J.*: Řešení průhybů konsolové desky a jeho aplikace na výpočet deformací zubů širokých kol, kandidátská disertační práce ÚVS-ČSAV, Praha 1962.
- [15] *Chi-Teh-Wang*: Applied Elasticity, McGraw-Hill, London—New York 1953.
- [16] *Ponomarev S. D.* a kol.: Расчеты на прочность в машиностроении, I. díl, МАШГИЗ, Moskva 1956.

Резюме

УПРУГИЕ ПРОГИБЫ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ В ОБЩЕЙ ТОЧКЕ

ЙОСЕФ ГЕРЖТ (Josef Heřt)

В статье производится расчет упругих прогибов тонкой консольной пластинки, имеющей форму бесконечно длинной полосы и нагруженной в общей точке силой, перпендикулярной к срединной плоскости пластинки.

В первой части исследуется прогиб полосы постоянной толщины. Производится точное решение, основанное на принципах теории тонких пластинок, первоначальными методами, использующими принцип суперпозиции. Его численные, подробно обработанные результаты позволяют оценить точность произведенного дальше „энергетического“ решения прогибов полосы переменной толщины. Это решение получено методом, представляющим собой комбинацию двух известных вариационных методов. По выведенным общим формулам решены два конкретных примера: прогибы полосы постоянной толщины, значения которых сравниваются с результатами точного решения, причем получается хорошее совпадение, а затем прогибы полосы с трапециевидным сечением.

Результаты произведенной экспериментальной проверки оказываются в хорошем совпадении с теоретическими результатами.

Summary

ELASTIC DEFORMATIONS OF A CANTILEVER PLATE LOADED BY A CONCENTRATED FORCE AT A GENERAL POINT

JOSEF HEŘT

The paper treats the determination of elastic deformations of a thin cantilever plate in the form of an infinite flat strip, loaded at a general point by a force perpendicular to the central plane of the strip.

The first part of the paper considers the deformation of a strip with constant thickness. The exact solution, based on the theory of thin plates, is obtained in a new manner using the principle of superposition. The detailed numerical results then make possible the evaluation of the subsequent “energetic” solution of a strip with a non-constant cross-section. This is obtained by a combination of two known variational methods. The general results are applied to two numerical examples: the deformation of a strip with constant thickness (these exhibit satisfactory agreement with the exact solution), and the deformation of a strip with trapezoidal cross-section.

Experimental verification of these theoretical results was also obtained.

Adresa autora: Ing. Josef Heřt C.Sc., Ústav pro výzkum strojů ČSAV, Puškinovo nám. 9, Praha 6.