Aplikace matematiky

Evžen Jirsa; Carmen Matysková; Jiří Vlach

Aproximace graficky dané funkce samočinným počítačem

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 4, 302–313

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102863

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

APROXIMACE GRAFICKY DANÉ FUNKCE SAMOČINNÝM POČÍTAČEM

Evžen Jirsa, Carmen Matysková, Jiří Vlach

(Došlo dne 19. prosince 1962.)

V článku je popsána metoda, používající pro aproximaci graficky nebo tabelárně dané neperiodické funkce řady Čebyševových polynomů. Pro srovnání jsou uvedeny i jiné možné způsoby aproximace a zdůvodněn použitý postup. Metoda nahrazuje graficky zadanou křivku úsečkami, přičemž postup je proveden tak, že pro aproximaci úsečky stačí počítat pouze s jejími konečnými body. Je uveden program pro samočinný počítač, některé získané výsledky a doba potřebná pro výpočet. Tabulky koeficientů lze použít i pro rychlou aproximaci běžnými výpočtovými prostředky.

1. ÚVOD

Graficky daná křivka je případ, který se v praxi vyskytuje velmi často. Buď je výsledkem fyzikálních nebo technických měření a hledá se jednoduchý analytický výraz pro další teoretické zpracování, nebo — zvláště v technice — je představována určitým tolerančním polem, v němž musí získaná křivka probíhat.

V obou případech je možno použít známých interpolačních metod, které jsou popsány v příručkách. Má-li se však vypracovat program pro samočinný počítač, je třeba věnovat i teoretickému postupu značnou pozornost, aby výsledky byly názorné, konvergence postupu rychlá a platná pro širokou třídu funkcí. V článku je ukázáno, že pro daný úkol je nejvýhodnější metoda, používající pro zjištění koeficientů rozvoje řady Čebyševových polynomů a je popsán program pro samočinný počítač. Na konci článku jsou uvedeny výsledky tří aproximací.

2. ZPŮSOBY APROXIMACE FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Pro řešení uvedené úlohy lze užít zásadně dvou postupů, a to interpolačních vzorců nebo rozvoje do řady ortogonálních polynomů.

Z interpolačních metod jsou nejznámější Newtonova pro stejné vzdálenosti uzlů a Lagrangeova pro volitelné vzdálenosti uzlů v uvažovaném intervalu. Při použití Lagrangeova výrazu závisí konvergence na rozložení uzlů, přičemž rovnoměrné rozložení, vedoucí na Newtonův vzorec, není nejvýhodnější.

Zcela odlišným přístupem je použití ortogonálních polynomů. Budou-li tyto polynomy, ortogonální s určitou váhovou funkcí $p(x)$, označeny $\varphi_i(x)$, lze psát rozvoj ve tvaru

$$f(x) \sim \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) = P_n(x), \tag{1}$$

v němž koeficienty a_i se určí právě použitím podmínky ortogonality [1].

Pro interval $\langle -1, +1 \rangle$, na který lze vždy konečný interval přetransformovat, je známa celá soustava ortogonálních funkcí, které se od sebe liší váhovou funkcí. Jsou to základní polynomy Jacobiho, z nichž lze odvodit postupným zjednodušováním váhové funkce polynomy ultrasférické, Legendrovy, Čebyševovy I. a II. řádu. Čím více zdůrazňují váhové funkce těchto polynomů kraj pásma, tím méně spojitých derivací může mít aproximovaná funkce, aby ji příslušné polynomy aproximovaly rovnoměrně. Tak například ultrasférické polynomy vyžadují spojitou 4. derivaci, Čebyševovy druhého řádu třetí derivaci, Legendrovy polynomy spojitou druhou derivaci. Čebyševovy polynomy 1. řádu aproximují rovnoměrně velmi širokou třídu funkcí, tzv. kategorie Dini-Lipschitze, do níž mezi jinými patří i funkce lomené s omezenými derivacemi. Už toto hledisko zřejmě ukazuje na výhodnost použití Čebyševových polynomů. Existují však ještě jiná hlediska. Čebyševův polynom má také například tu vlastnost, že minimalisuje největší odchylku aproximace od původní funkce v uvažovaném intervalu, atd.

3. VZÁJEMNÁ SOUVISLOST ŘADY ORTOGONÁLNÍCH POLYNOMŮ S INTERPOLAČNÍM MNOHOČLENEM

Předpokládejme, že určitou funkci $f(x)$ je možno aproximovat v intervalu $\langle -1, +1 \rangle$ řadou ortogonálních polynomů (které nemusejí být nezbytně Čebyševovy), tj. řadou (1) tak, že $(n + 1)$ a další členy budou pro uvažované použití zanedbatelně malé. Předpokládejme dále, že rozvoj ukončíme po $(n - 1)$ členu rozvojem $P_{n-1}(x)$. Tím vznikne chyba $e(x)$

$$e(x) = f(x) - P_{n-1}(x). \tag{2}$$

Vzhledem k předpokladu bude téměř rovna $a_n \varphi_n(x)$ a bude téměř nulová v bodech rovných nulovým bodům funkce $\varphi_n(x)$. Jestliže bychom vytvořili interpolační Lagrangeův mnohočlen tak, že za uzly bychom volili právě body se souřadnicemi rovnými kořenům $\varphi_n(x) = 0$, dostali bychom rozvoj, odpovídající velmi blízce rozvoji, získanému řadou polynomů.

V našem případě je při použití Čebyševových polynomů

$$\varphi_n(x) = T_n(x) = \cos [n \arccos x] \tag{3}$$

a průsečíky této funkce s osou x jsou určeny vztahem

$$X = \cos \frac{2k + 1}{2n} \pi . \tag{4}$$

Z této úvahy vyplývá také postup, kterého je možno používat k určení interpolačního polynomu: použije se interpolačního Lagrangeova výrazu, jehož uzly však volíme v bodech, určených vztahem (4). Také tato aproximace vede na stejnoměrnou konvergenci funkcí, patřících do kategorie Dini-Lipschitze, jak je dokazováno např. v [2].

I když obě metody vedou na rozvoje, které se od sebe málo liší, přece s hlediska početního postupu je rozdíl podstatný. U rozvoje v řadu ortogonálních polynomů každý koeficient a_i v (1) zůstává platný, i když pro lepší přiblížení je třeba přibírat další členy rozvoje. Naproti tomu při použití Lagrangeova polynomu s Čebyševovým rozložením uzlů musíme pro každou aproximaci volit v závislosti na nejvyšším stupni nové rozložení uzlů podle (4), takže žádný koeficient nezůstává při zvýšení stupně zachován.

4. ODHADY PŘESNOSTI

Odhady přesnosti lze zakládat při použití obou uváděných metod na postupu, naznačeném v předcházejícím odstavci [3]. Jestliže by byl proveden rozvoj s dostatečným počtem členů, takže další členy by měly zanedbatelně malý koeficient, pak lze brát za odhad absolutní hodnotu koeficientu prvního nepoužitého členu rozvoje $|a_n|$. Jestliže by další členy byly nulové, pak by se tento koeficient právě rovnal součtu všech předcházejících koeficientů při uvažování jejich znamének. Odhad přesnosti lze tedy provádět tím, že se sečtou hodnoty všech koeficientů rozvoje. Tento postup by měl výhodu, že by nebylo třeba zmíněný další koeficient rozvoje určovat. Při praktickém použití se však mnohdy jedná o aproximaci, která se má původní funkci blížit pouze v určitém tolerančním poli, aniž by se kladla otázka, zda zanedbaný zbytek má už skutečně malé koeficienty. Zkušenosti při řešení řady případů ukázaly, že výše zmíněný odhad se může dosti značně lišit od skutečné odchylky (odhad až desetkrát příznivější než skutečná hodnota). Tato zkušenost byla vzata v úvahu při sestavení programu, který zajišťuje výpočet funkčních hodnot výsledného polynomu i s vyhodnocením chyby.

5. POUŽITÁ METODA

Na základě úvah z dřívějších odstavců bylo rozhodnuto použít k aproximaci řady Čebyševových polynomů. Pro tyto polynomy platí v intervalu $\langle -1, +1 \rangle$ známé vztahy (např. [4]):

váhová funkce: $$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}},$$

(5) rekurentní vztah: $$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geqq 1,$$

(6) jednotlivé polynomy: $$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = 2x^2 - 1, \quad T_3 = 4x^3 - 3x,$$

a dále vztah (3).

Použije-li se podmínky ortogonality, lze odvodit pro aproximaci výraz

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} a_i T_i(x), \tag{7}$$

v němž

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\, T_i(x)}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx. \tag{8}$$

Dále uváděné úvahy vyplývají z potřeb numerického výpočtu. Je-li $f(x)$ zadána analyticky, je možno provádět například numerickou integraci. Protože se však často vyžaduje aproximace čáry, složené z několika málo úseček, je účelné vzít za nejjednodušší funkci přímku v obecném tvaru

$$f(x) = kx + q. \tag{9}$$

Každý úsek křivky, které lze nahradit s dostatečnou přesností úsečkou, bude pak určován pouze svými koncovými body. Protože pro přímku lze snadno vyřešit integrál (8), odpadá tím nutnost numerické integrace.

Samotný Čebyševův polynom je vyjádřen mocninami nezávisle proměnné (6), takže po dosazení rovnice přímky do (8) bude třeba řešit integrály typu

(10)

$$\int \frac{x^{2m}}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \arcsin x - \sqrt{(1 - x^2)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m)!\,(k!)^2}{2^{2(m-k)}(m!)^2\,(2k + 1)!}\, x^{2k+1},$$

$$\int \frac{x^{2m+1}}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx = -\sqrt{(1 - x^2)} \sum_{k=0}^{m} \frac{2^{2(m-k)}(2k)!\,(m!)^2}{(2m + 1)!\,(k!)^2}\, x^{2k}. \tag{11}$$

Výrazy se získají použitím elementárních rekurentních vztahů a obvykle jsou udány v rozvinutém tvaru. Zde uvedený způsob zápisu má však výhodu v dalším použití.

Především při výpočtu koeficientu a_0 položíme $m = 0$

$$[a_0]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{2}{\pi} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{kx + q}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx = \left[q \arcsin x - k\sqrt{(1 - x^2)}\right]. \tag{12}$$

Provádějme dále aproximaci sudé funkce, při níž budou koeficienty a_i s lichým indexem nulové. Sudý Čebyševův polynom lze obecně vyjádřit výrazem [4]

$$T_{2r}(x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \frac{2r}{2r - m} \frac{(2r - m)!}{(2r - 2m)!\, m!}\, 2^{2r-2m-1}\, x^{2r-2m}.$$

Dosadíme-li tento výraz současně s (9) do (8), bude po úpravě

$$[a_{2i}]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \frac{2r}{2r - m} \frac{(2r - m)!}{(2r - 2m)!\, m!}\, 2^{2r-2m-1} \left\{ k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x^{2r-2m+1}}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx + q \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x^{2r-2m}}{\sqrt{(1 - x^2)}}\, dx \right\}.$$

Řešení naznačených integrálů je však dáno výrazy (10) a (11), jen je třeba psát $(r - m)$ místo m. Meze x_i a x_{i+1} jsou koncové body uvažované úsečky a celkový koeficient a_{2i} je roven součtu všech dílčích koeficientů. Tím lze získat

$$(13)\quad [a_{2i}]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \frac{2r}{2r - m} \frac{(2r - m)!\, 2^{2r-2m-1}}{(2r - 2m)!\, m!} \left\{ q \frac{(2r - 2m)! \arcsin x}{2^{2r-2m}[(r - m)!]^2} - \right.$$
$$- q \sqrt{(1 - x^2)} \sum_{k=0}^{r-m-1} \frac{(2r - 2m)!\, (k!)^2}{2^{2r-2m-2k}[(r - m)!]^2 (2k + 1)!} x^{2k+1} -$$
$$\left. - k \sqrt{(1 - x^2)} \sum_{k=0}^{r-m} \frac{2^{2r-2m-2k}(2k)!\, [(r - m)!]^2}{(2r - 2m + 1)!\, (k!)^2} x^{2k} \right\}_{x_i}^{x_{i+1}} .$$

Příslušný koeficient se tedy počítá na základě tří výrazů. První dává po zkrácení

$$(14)\qquad \arcsin x \,.\, q \,.\, \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \frac{r}{m!} \frac{(2r - m - 1)!}{[(r - m)!]^2} .$$

Tento součet je roven nule pro každé $r \geqq 1$, takže funkce arcsin se ve výpočtu neobjeví s výjimkou členu a_0.

Druhý člen složené závorky lze po vynásobení a po zkrácení převést na tvar

$$(15)\quad - \frac{2}{\pi} q \sqrt{(1 - x^2)} \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \frac{r}{m!} \frac{(2r - m - 1)!}{[(r - m)!]^2} \sum_{k=0}^{r-m-1} \frac{(k!)^2\, 2^{2k}}{(2k + 1)!} x^{2k+1} .$$

Počet členů druhého součtu se mění podle velikosti tak, že se stoupajícím m se počet zmenšuje. Vychází-li $(r - m - 1) < 0$, ztrácí součet smysl, tj. pro stoupající m se béře stále méně členů *prvního* součtu. Tím se velmi usnadňuje výpočet: pro výraz (14) se béřou všechny členy prvního součtu podle m. Tento součet je sice nulový, ale je k disposici jako jednoduchá kontrola správnosti. Pro první mocninu x se vynechá poslední člen prvního součtu (15) a násobí se hodnotou druhého součtu (15) pro $k = 1$. Pro následující mocninu x^3 se vynechají poslední 2 členy prvního součtu a násobí se hodnotou, vycházející z druhého součtu pro $k = 2$ atd. U některých mocnin se získané výrazy krátí a výsledkem jsou celá čísla.

Poslední člen závorky (13) dá po vynásobení a zkrácení výraz

(16)
$$- \frac{2}{\pi} k \sqrt{(1 - x^2)} \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \frac{r}{m!} \frac{(2r - m - 1)!}{(2r - 2m)!} \frac{2^{4(r-m)}[(r - m)!]^2}{(2r - 2m + 1)!} \sum_{k=0}^{r-m} \frac{(2k)!}{(k!)^2\, 2^{2k}} x^{2k} ,$$

který se počítá stejným způsobem jako předcházející, s tím rozdílem, že není k disposici jednoduchá kontrola a nikde nevycházejí celá čísla.

Samotný výpočet hodnot, uvedených výrazy (14) až (16), by bylo ovšem možno provádět přímo bez odvození těchto složitých řad. Při prvním výpočtu bylo také přímého výpočtu použito. Řešení bylo prováděno na samočinné kalkulačce Mercedes R44SM, ale u vyšších stupňů se začaly postupně kumulovat chyby, které vedly k tomu, že nebyly nulové koeficienty při arcsin a také nevycházela celá čísla jak výše uvedeno. Proto bylo přistoupeno k uvedenému postupu a jednotlivé hodnoty vypočteny – místy bez použití kalkulačky – na nejméně 10 platných míst. Přesnost koeficientů je pro uvedenou metodu nutná proto, že jsou řešeny jednou pro vždy a při výpočtu se jako čísla vkládají do paměti stroje. Tyto koeficienty jsou uvedeny v tabulce 1.

Určením koeficientů se úloha redukuje na stanovení hodnoty polynomu v x pro dané dvě meze. Například při výpočtu a_6 bude třeba počítat polynom

$$\left[-\frac{2}{\pi}\sqrt{(1-x^2)}\,\{k[0{,}028571428 + 0{,}51428571x^2 - 4{,}11428571x^4 + 4{,}57142857x^6] + q[x - 5{,}\dot{3}x^3 + 5{,}\dot{3}x^5]\}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}, \tag{17}$$

v němž x_i a x_{i+1} značí meze. Bude-li aproximovaná čára určena třemi úsečkami mezi body $0 < x_1 < x_2 < 1$, bude třeba provést třikrát příslušná dosazení, výsledky sečíst a násobit dvěma (vzhledem k sudé symetrii). Tím bude určen koeficient a_6. Po získání potřebných a_i je třeba při daném stupni polynomu ještě provést přerovnání, aby byly určeny koeficienty u příslušných mocnin proměnné.

6. PROGRAM PRO ŘEŠENÍ APROXIMACE

Program byl sestaven v autokodu Elliott. Tento systém automatického programování používá pseudoinstrukcí, které se ve stroji převádějí pomocí překládacího programu na strojní instrukce. S takto vzniklým strojním programem se pak provádějí výpočty. Programování v autokodu se blíží běžnému psaní matematických výrazů, což značně ulehčuje práci [5].

Program byl upraven tak, aby výsledky, které stroj vydává, obsahovaly co nejvíce informací o aproximaci; tisk je proveden v přehledné tabulce s nadpisy. Čísla, vypočtená podle postupu z předcházejících odstavců jsou děrována jako standartní vstup výpočtu a ukládají se po zavedení strojového programu do paměti. Tím se značně zkracuje čas řešení. Obecně by bylo sice výhodnější uložit tato čísla přímo do programu, ale vzhledem k možnosti rozšíření na vyšší stupně polynomů bylo použito zvláštní děrné pásky.

Program umožňuje:

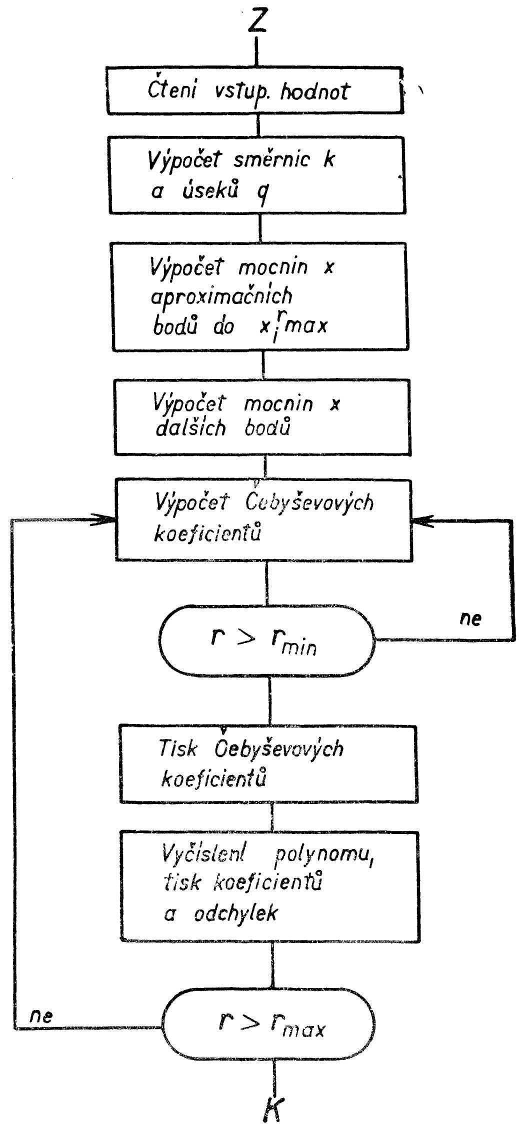
1. stanovení Čebyševových koeficientů a_i.
2. Stanovení aproximačního polynomu v nezávisle proměnné x.
3. Výpočet hodnot polynomu v koncových bodech jednotlivých aproximačních úseček a v dalších libovolně volených bodech uvnitř i vně intervalu.
4. Výpočet a tisk odchylky od zadaných hodnot.
5. Tisk maximální odchylky.

Tab. 1. Koeficienty pro výpočet výrazu $\left[-\frac{2}{\pi}\sqrt{(1-x^2)}\,(k\,\Sigma^j A_n x^j + q\,\Sigma^i B_n x^i)\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$

j	${}^jA_2$	${}^jA_4$	${}^jA_6$	${}^jA_8$	${}^jA_1?$	${}^jA_{12}$	${}^jA_{14}$	${}^jA_{16}$	${}^jA_{18}$	${}^jA_{20}$
0	$+0,\dot{3}$	$-0,0\dot{6}$	+0,028571428	−0,015873016	+0,010101010	−0,006993007	+0,005128205	−0,003843137	+0,003095975	−0,002506265
2	$+0,\dot{6}$	$-0,5\dot{3}$	+0,51428571	−0,507936508	+0,505050505	−0,503496503	+0,502564103	−0,501967861	+0,501547988	−0,501253133
4		+1,6	−4,11428571	+7,61904762	−12,1212121	+17,6223776	−24,1230769	+ 31,6235294	−40,1238390	+49,6240601
6			+4,57142857	−20,3174603	+56,5656566	−125,314685	+241,230769	−421,647059	+686,557275	−1058,64662
8				$+14,\dot{2}$	−90,5050505	+338,34965	−964, 923076	+2319,05882	−4943,25077	+9633,68474
10					+46,5454545	−386,265734	+1819,56923	−6360,84492	+18360,6687	−46241,6842
12						+157,538461	−1617,39487	+9187,890196	−38081,3870	+128624,736
14							$+546,1\dot{3}$	−6682,10196	44448,7926	−211019,549
16								+1927,52941	−27391,2074	+209419,799
18									+6898,52632	−111690,426
20										+24966,0952

i	${}^iB_2$	${}^iB_4$	${}^iB_6$	${}^iB_8$	${}^iB_{10}$	${}^iB_{12}$	${}^iB_{14}$	${}^iB_{16}$	${}^iB_{18}$	${}^iB_{20}$
1	+1	−1	+1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1	+ 1	− 1
3		+2	$-5,\dot{3}$	+10	− 16	$+ 23,\dot{3}$	− 32	+ 42	$- 53,\dot{3}$	+ 66
5			$+5,\dot{3}$	−24	+ 67,2	$-149,\dot{3}$	+288	− 504	$+ 821,\dot{3}$	− 1267,2
7				+16	−102,4	+384	−1097,14286	+2640	− 5634,2857	+ 10982,4
9					+ 51,2	$-426,\dot{6}$	+2011,42857	−7040	+20336,1905	− 51251,2
11						$+170,\dot{6}$	−1755,42857	+9984	$-41415,\dot{1}$	+139776
13							+ 585,142857	−7168	$+47786,\dot{6}$	−231424
15								+2048	$-29142,\dot{5}$	+222822,4
17									$+ 7281,\dot{7}$	−117764,8
19										+ 26214,4

Blokové schéma programu je na obr. 1. Po zavedení programu a pásky standardních čísel čte stroj vstupní údaje prvního příkladu. Tyto vstupní údaje obsahují: počet aproximačních bodů, stupeň nejnižšího a nejvyššího požadovaného polynomu, úsečky a pořadnice aproximačních bodů, počet kontrolních bodů, v nichž má být aproximace vypočtena, a x-ové souřadnice těchto bodů. Všechny vstupní údaje se přetiskují s příslušnými nadpisy. Po přečtení vstupních údajů počítá program směrnice a úseky na ose y (k, q) jednotlivých přímek, tvořících základní funkci. Vypočtená k i q ukládá do paměti. Pro výpočet Čebyševových koeficientů a vyčíslení aproximace v jednotlivých bodech jsou potřebné vyšší mocniny x-ových souřadnic všech bodů. Další část programu provádí toto umocňování a ukládá mocniny do paměti ve formě matice. Totéž se provádí pro kontrolní body a ze získaných mocnin se vytváří druhá matice. Dalším krokem je výpočet pomocných hodnot $\arcsin x$ a $\sqrt{1 - x^2}$ v aproximačních bodech a jejich uložení do paměti.



Obr. 1.

Po ukončení těchto přípravných operací se provádí výpočet Čebyševových koeficientů a_{2i} podle výrazu (13), v němž ovšem jsou koeficienty řad předem vyčísleny, takže lze spíše říci, že výpočet probíhá podle názorného příkladu (17) nebo tab. 1. Koeficient a_0 je určen výrazem (12). Výpočet probíhá v cyklech, které mění aproximační body. Podle pořadového čísla bodu vybírá program z jednotlivých typů buněk paměti příslušná čísla (mocniny, arcsin) a dosazuje je do výrazů podobných výrazu (17). Sečtením dílčích výsledků pro každou úsečku lomené čáry vznikne výsledná hodnota a_{2i}. Podle vztahu (7) vynásobíme touto hodnotou Čebyševův polynom stupně $2i$-tého a přičteme k předcházejícímu polynomu stupně $2(i - 1)$. Tím získáme aproximační polynom stupně $2i$. Program zajišťuje cyklické zvětšování i od nuly počínaje. Jádro programu tedy tvoří dva cykly: vnější, který zvětšuje stupeň polynomu, a vnitřní, který probíhá postupně všechny aproximační body.

Od určitého stupně r_{min}, zadaného na počátku, je pro nás aproximace zajímavá a stroj provádí nejdříve tisk všech Čebyševových koeficientů a_{2i} a koeficientů aproximačního polynomu. Následuje kontrolní výpočet, nakolik se získaný polynom odchyluje od zadaného průběhu. Program vypočítává hodnoty polynomu pro souřadnice koncových bodů úseček, tyto hodnoty se tisknou a dále se stanoví odchylka od zadané hodnoty. Současně se tisknou hodnoty aproximačního polynomu ve všech předem zadaných kontrolních bodech. Kromě toho se nakonec zvlášť tiskne největší z vypočtených odchylek.

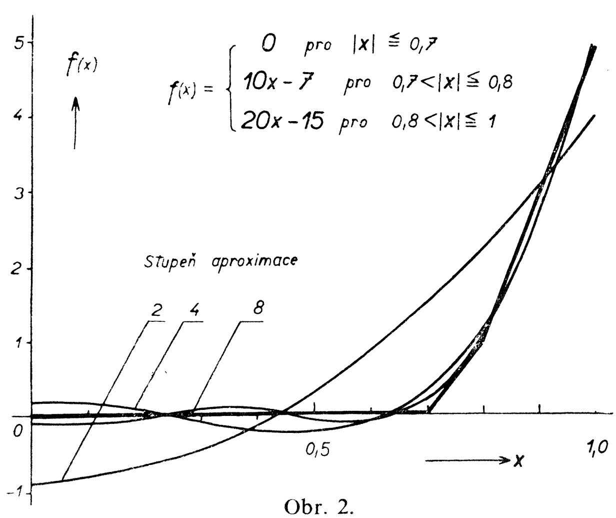
Postup pokračuje až do nejvyššího stupně požadovaného polynomu r_{max}, načež stroj samočinně přejde ke čtení vstupních hodnot dalšího příkladu. Nepatrným zásahem do programu je ovšem možno zajistit, aby stroj tiskl pouze ten polynom nejnižšího stupně, který by se nikde neodchyloval od zadané funkce o více než předem určenou hodnotu.

Program obsahuje přibližně 250 pseudoinstrukcí včetně instrukcí pro ladění a úpravu tisku. Mimo podprogramů zabudovaných přímo v autokódu Elliott byl sestaven a použit podprogram pro umocňování posloupnosti čísel a postupné ukládání těchto čísel ve formě matice do paměti. Vlastní program potřebuje přibližně 1500 buněk. Protože stroj má stránkovou tiskárnu, je proveden výstup výsledků v přehledné tabulce.

7. VÝSLEDKY POUŽITÍ PROGRAMU

Popsaného programu bylo použito k vyřešení příkladů, z nichž některé jsou dále stručně uvedeny.

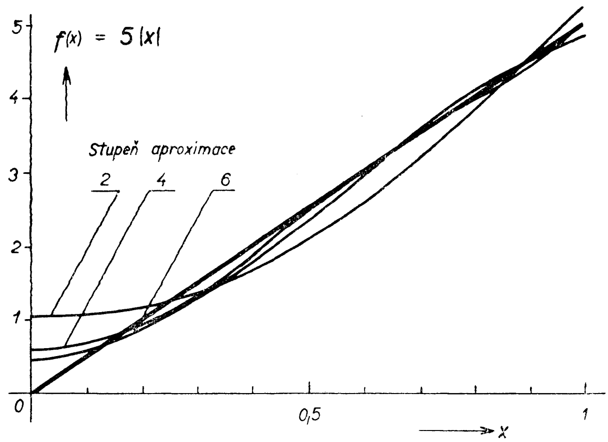
Všechny aproximované průběhy byly voleny tak, že funkce počínají v bodě (0,0) a končí v bodě (1,5) a ve směru záporné osy x se předpokládá sudá symetrie. Na obrázku 2 a 3 jsou dva pro aproximaci značně nepříznivé případy: lomená čára a funkce $y = 5|x|$. Polynom i odchylky byly počítány v jedenácti bodech, jejichž úsečky byly rovnoměrně rozloženy v intervalu po úsecích rovných 0,1. Obrázky ukazují, že při grafickém zobrazení získaných funkcí jsou odchylky malé už při 8. stupni.



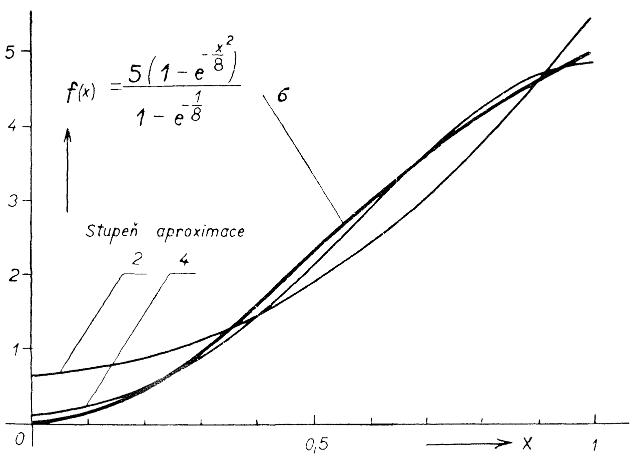
Obr. 2.

Jako příklad křivky zadané analyticky byl volen průběh

$$y = \frac{5}{1 - e^{1/8}} \left(1 - e^{-(x^2/8)}\right),$$



Obr. 3.



Obr. 4.

který je i s vypočtenými aproximacemi vynesen na obr. 4. Aproximace byla provedena opět ve stejných bodech jako předcházející dvě, tj. s poměrně hrubým a ne nejvhodnějším dělením. Už počínaje polynomem šestého stupně (v kvadrátech nezávisle proměnné) je chyba dostatečně malá, aby ji nebylo možno graficky zachytit. Je třeba si ovšem uvědomit, že chyby jsou počítány jen v aproximačních bodech, tj. existuje v zásadě možnost, že někde mezi těmito body by mohla být odchylka od zadané čáry větší; je ovšem zřejmé, že tato odchylka nemůže být podstatná.

Pro informaci jsou v tab. 2 uvedeny absolutní hodnoty maximálních odchylek v závislosti na stupni polynomu. Nahrazení jedné křivky polynomy až do 12. stupně včetně, tj. i s udáním Čebyševových koeficientů, koeficientů polynomu a výpočtu odchylek tohoto polynomu od zadaných hodnot trvá na počítači necelých 5 minut.

Tabulka 2.

Křivka	Maximální odchylka polynomu stupně					
	2	4	6	8	10	12
lomená čára viz obr. 2	1,4949	0,3754	0,3798	0,16858	0,17423	0,10144
$y = 5\|x\|$	1,061	0,6366	0,4547	0,3536	0,2893	0,2449
$y = \frac{5}{1 - e^{-1/8}} (1 - e^{-x^2/8})$	0,6952	0,12497	0,03117	0,021	0,01861	0,01747

8. ZÁVĚR

V článku byla popsána metoda, při níž se k aproximaci graficky nebo tabelárně zadané sudé funkce používá řady Čebyševových polynomů. Původním cílem bylo získat prostředek k rychlé aproximaci amplitudových charakteristik lineárních elektrických obvodů, metoda má však širší použití. Zadanou křivku je třeba transformovat na interval $\langle -1, +1 \rangle$ a hodnoty se udávají jen v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Postup nahrazuje uvažovanou křivku přímkovými úseky, pro něž byly jednou pro vždy vypočteny koeficienty tak, že stačí při daném stupni aproximačního polynomu dosazovat koncové body úseček nahrazujících funkci, a násobit dílčí výsledky příslušnou směrnicí přímky a jejím úsekem na ose y (podle uváděných výrazů). Tímto způsobem není třeba při aproximaci provádět integraci a výpočet je velmi rychlý. Potřebné koeficienty jsou zvláště uváděny v tab. 1 s devíti platnými místy až do dvacátého řádu nezávisle proměnné. Použití tabulky 1 umožňuje provedení rychlé aproximace sudé funkce i běžnými výpočtovými prostředky. Metodu lze snadno rozšířit na křivky s lichou symetrií nebo transformací na interval $\langle 0,1 \rangle$.

Literatura

[1] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.:* Методы функций комплексного переменного; Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва 1951, гл. VII.

[2] *Коровкин П. П.:* Линейные операторы и теория приближений; Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва 1959, гл. 7.

[3] *Lanczos C.:* Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions; Journal of Mathematics and Physics, Vol. XVII, 1938, str. 123—199.

[4] *Данилов В. Л. и др.:* Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби; Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва 1961, гл. IV.

[5] Symbolické programování počítače National Elliott 803. Výzkumné a výpočtové středisko, Kancelářské stroje, n. p., Praha, 1961.

Резюме

АППРОКСИМАЦИЯ ГРАФИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ НА ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ

ЭВЖЕН ЙИРСА, КАРМЕН МАТЫСКОВА, ЙИРЖИ ВЛАХ
(Evžen Jirsa, Carmen Matysková, Jiří Vlach)

В статье описывается метод, использующий ряд полиномов Чебышева для аппроксимации четной функции, заданной графически или в виде таблицы. Рассматриваемая кривая представляется ломанной линией, соединяющей заданные точки. Коэффициэнты для рассчета приводятся в таблице, и метод сводится к операциям с полиномами. Кратко описана программа для электронной вычислительной машины.

Summary

COMPUTER APPROXIMATION OF GRAPHICALLY GIVEN FUNCTIONS

Evžen Jirsa, Carmen Matysková, Jiří Vlach

A method is described for a Tchebysheff polynomial approximation of even functions given either graphically or tabularly. A piecewise linear function is used in either case. The calculation of coefficients is tabulated, reducing the procedure to polynomial operations. A computer programme is described briefly.

Adresa autorů: *Evžen Jirsa, Carmen Matysková, Jiří Vlach*, Výzkumný ústav pro sdělovací techniku A. S. Popova, Novodvorská ul., Praha 4 — Braník.