Vasil Ivanov; Milan Picek

Řešení algebraické rovnice n-stupně s reálnými kladnými kořeny pomocí programu na samočinném elektronickém číslicovém počítači National-Elliott 803

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 3, 216–223

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102855`

ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÉ ROVNICE n-TÉHO STUPNĚ S REÁLNÝMI KLADNÝMI KOŘENY POMOCÍ PROGRAMU NA SAMOČINNÉM ELEKTRONICKÉM ČÍSLICOVÉM POČÍTAČI NATIONAL-ELLIOTT 803

VASIL IVANOV, MILAN PICEK

(Došlo dne 21. března 1962.)

Program k řešení algebraických rovnic n-tého stupně popsaný v následujících odstavcích byl užit v konkrétním případě jako podprogram k vyšetřování parametrů vlastního kmitání mechanických soustav vyššího stupně volnosti.

K jeho samostatnému použití byly náležitě upraveny jeho vstupní a výstupní instrukce.

Program[1]) je založen v podstatě na Newtonově metodě řešení algebraických rovnic n-tého stupně. Jak známo, používá se však obvykle Newtonovy metody jen k zpřesňování předem vypočtených nebo volených přibližných kořenů. Přitom podle vžitých představ se jedná jen o rychlé získání většího počtu přesných desetinných míst hledaných hodnot. Vyžaduje se tedy již u samotných přibližných hodnot kořenů vkládaných do iteračního procesu značná přesnost, aby výpočet byl rychlý nebo vůbec skončil zdárně.[2])

Řešená rovnice:

$$y = f(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_{0i}\lambda^{m-i} = a_{00}\lambda^m + a_{01}\lambda^{m-1} + \ldots + a_{0m} = 0\,.$$

Použité iterační schéma Newtonovo:

$$\varepsilon_k^{(j)} = -\frac{f(\lambda_{j-1}^{(k-1)})}{f'(\lambda_{j-1}^{(k-1)})}, \tag{1}$$

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \sum_{k=1}^{l} \varepsilon_k^{(j)}, \tag{2}$$

[1]) Program je využíván k rozvinutí charakteristického determinantu matice až 24. řádu a k výpočtu složek odpovídajících vlastních vektorů metodou Danilevského. Algebraická rovnice až 24. stupně, která se při řešení vyskytuje, je zpracována způsobem v tomto článku předkládaným.

[2]) *Загускин В. Л.:* „Справочник по численным методам решения уравнений" — viz hodnocení metod, str. 162.

λ_{j-1} ... hodnota opravovaného kořene,

výraz (1) ... běžná oprava přibližné hodnoty vyšetřovaného kořene,

výraz (2) ... kořen rovnice s předem požadovanou přesností odpovídající praktickým účelům úlohy.

Vyčíslení oprav „$\varepsilon_k^{(j)}$" přibližných hodnot kořenů je v konkrétních případech výpočtu vedeno v Hornerově schématu.[3])

V případě popisovaného programu je ve skutečnosti použito způsobu výpočtu, jenž je kombinací metod Lobačevského[4]) a Newtonovy. Nejedná se o novinku. V literatuře jsou zmínky o použití metody Lobačevského ve stejné funkci, avšak v kombinaci s jinými metodami.

Metoda Lobačevského byla v počátcích studia celkového problému míněna jako nevyhnutelný pomocník iteračního schématu Newtonovy metody právě pohotovým vypočtením přibližných hodnot neznámých kořenů rovnice a to v jejich plném počtu.

V průběhu práce na programu se však zjistilo, že z dané rovnice transformované ve smyslu metody Lobačevského,[5]) postačí vypočíst jen hodnotu jednoho kořene, která je pro tento první krok transformace nejpřesnější. Je to přibližná hodnota kořene, vypočtená z posledních tří koeficientů vyšetřované rovnice

$$\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{a'_m}{a'_{m-1}}\right)},$$

kde

$$a'_m = a^2_{0,m}, \tag{3}$$

$$a'_{m-1} = a^2_{0,m-1} - 2a_{0,m}a_{0,m-2}\,. \tag{4}$$

Výrazy (3) a (4) ilustrují první krok úpravy uvedených koeficientů rovnice podle metody Lobačevského.[6])

Tímto prvním přibližným kořenem se uvádí do chodu iterační postup Newtonův, jehož výsledkem je první přesný kořen vyšetřované rovnice[7]) a poněvadž je postup veden v Hornerově schématu, dostanou se takto zároveň koeficienty polynomu, jenž je o stupeň nižší než předchozí, tvaru

$$(a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n})\,, \tag{5}$$

[3]) *Загускин В. Л.:* „Справочник по численным методам решения уравнений", str. 32.

[4]) Tamtéž, str. 62.

[5]) Tamtéž, str. 64.

[6]) K odhadu nejnižšího kořene byla zde užita metoda Lobačevského. Vyhovuje bezpečně požadovaným podmínkám. Je třeba však říci, že k tomuto účelu se mohou osvědčit i jiné metody, například metoda regula falsi.

[7]) Tímto prvním krokem funkce metody Lobačevského končí.

kde

$$n = m - 1 .$$

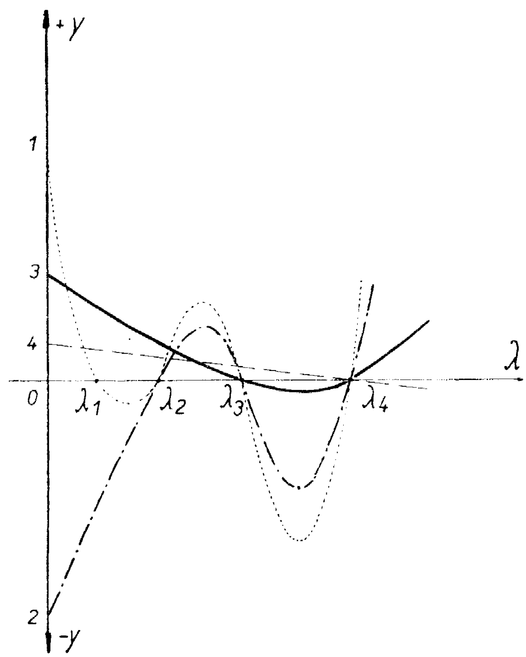
Tento postup je v dalším opakován systematicky s jedinou podstatnou změnou, která obchází nutnost mít pro následující iterační kroky odpovídající přibližné kořeny. Při hledání kteréhokoli z následujících přesných kořenů vkládáme totiž do iterace jako jeho „přibližnou" hodnotu vždy hodnotu přesného kořene, získaného v předchozím kroku. Podle toho tedy druhý přesný kořen se obdrží tím, že se „zpřesňuje" získaný již první přesný kořen. To má za následek opět další snížení stupně předchozího polynomu, který má obecný tvar

$$\sum_{i=0}^{n} a_{(m-n),i} \cdot \lambda^{n-i} , \tag{6}$$

kde

$$0 < n < m ,$$

podle obvyklého postupu v Hornerově schématu.



Obr. 1.

Následující přesné kořeny (třetí až n-tý) a jim odpovídající polynomy nižších stupňů se obdrží podobně jako v případě druhého kořene.

Největší výhoda tohoto způsobu využití Newtonovy metody tkví v tom, že průběh výpočtu se stává zcela jednoznačným a plynulým. Toto zjednodušení výpočtového postupu rozhodujícím způsobem přispělo k výstavbě programu pro samočinný počítač.

Odůvodnění užitého způsobu výpočtu lze ilustrovat grafickým znázorněním funkcí odpovídajícím jednotlivým polynomům získaným postupně v průběhu výpočtu (viz obr. 1). Každá z křivek znázorňující průběh zmíněných funkcí protíná osu λ tolikrát, kolikátého stupně je odpovídající polynom. Znamená to, že kterákoli z funkcí při tomto uspořádání výpočtu je v úseku, ve kterém se další přesný kořen hledá, monotonní a ohraničená. Tato skutečnost zaručuje konvergenci použitého Newtonova iteračního postupu. (K hodnotě přesného kořene se blížíme tak, že hodnota funkce i její derivace nemění znaménko.) Z obr. 1 je dále vidět, že při tomto uspořádání výpočtu velký rozdíl hodnot dvou sousedních přesných kořenů v žádném případě neohrožuje výpočet. Důkladnějším rozborem lze zjistit, že *křivost funkcí odpovídajících* jednotlivým polynomům se postupně zmenšuje – průběhy se narovnávají – tím se podstatně zvyšuje rychlost konvergence iteračního postupu bez ohledu na vzdálenost „přibližného" od přesného kořene, který právě vyšetřujeme.

Je zřejmé, že téhož postupu lze užít i pro algebraické rovnice n-tého stupně s obecnými reálnými kořeny pokud se ve smyslu metody vhodně zvolí „λ_0".

Lze dokázat, že i pokud má polynom násobné kořeny, dojde se touto metodou k cíli, pokud požadovaná přesnost kořenů není tak velká, aby vlivem zaokrouhlovacích chyb došlo k situaci, že

$$\left|\frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}\right| \to \infty .$$

Popsaný způsob řešení rovnic n-tého stupně byl sice v tomto případě využit pro řešení úloh na samočinném počítači, hodí se však i k zpracování úloh jinými prostředky bez ohledu na stupeň mechanisace či automatisace.

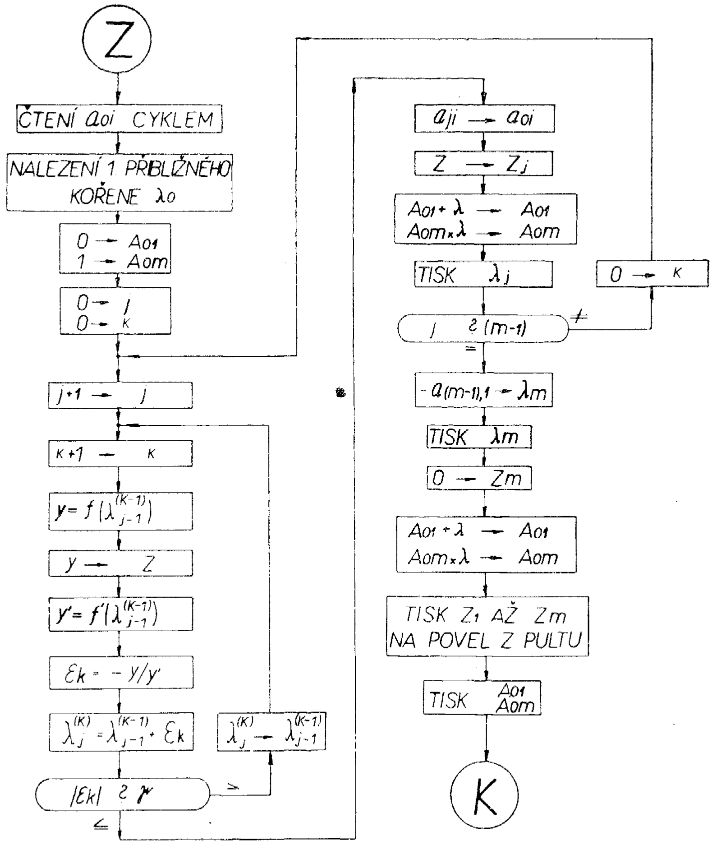
Řešení problému není komplexní a autoři článku chápou popis metody jako příspěvek ke komplexnímu řešení.

PŘÍKLAD ŘEŠENÍ ROVNICE 5. STUPNĚ V ÚPRAVĚ, KTERÁ NAPODOBUJE ÚPRAVU POŘÍZENOU SAMOČINNÝM POČÍTAČEM ELLIOTT 803[8])

KOEFICIENTY SEKULÁRNÍ ROVNICE:

−.350577704/ 02
.364721119/ 03
−.116908255/ 04
.131887664/ 04
−.400159672/ 03

[8]) Samočinný počítač ELLIOTT 803 užívá latinku bez diakritických znaků naší abecedy. Semilogaritmický tvar čísel v našem příkladě jest jeden z možných výstupů informace.



VYSVĚTLIVKY

A_{01} .... SOUČET KOŘENŮ
A_{om} .... SOUČIN KOŘENŮ
a_{oi} .... KOEFICIENTY VÝCHOZÍHO POLYNOMU
a_{ji} .... KOEFICIENTY BĚŽNĚ ZÍSKANÉHO POLYNOMU
j .... INDEX PŘESNÉHO KOŘENE
k .... INDEX BĚŽNÉ OPRAVY KOŘENE
m .... STUPEŇ PŮVODNÍHO POLYNOMU (ROVNICE)
Z .... BĚŽNÁ HODNOTA FUNKCE
Z_j .... HODNOTA FUNKCE PŘESNÉHO KOŘENE
γ .... POŽADOVANÁ PŘESNOST

Obr. 2. Blokové schéma programu.

KORENY SEKULARNI ROVNICE:

.475318461/ 00
.155086613/ 01
.244102055/ 01
.118949895/ 02
.186955760/ 02

Představu o přesnosti výpočtu získáme dosazením vypočtených kořenů do původní rovnice. Průběh a výsledky dosazení pro náš příklad jsou seřazeny v uvedené tabulce.

Dosazování bylo provedeno kalkulačním automatem „Mercedes".

Všimneme-li si vypočtených residuí, můžeme usoudit, že dosažená přesnost je v průměru včetně 5. desetinného místa.

Metody používané k řešení algebraických rovnic n-tého stupně vykazují zpravidla zmenšení přesnosti u hodnot vyšších kořenů. Markantní rozdíl přesnosti u posledního kořene v našem příkladě však je zaviněn hlavně tím, že při použité technice není možno respektovat větší počet desetinných míst.

Přesnost, sledovaná samočinným elektronickým počítačem, je včetně pátého desetinného místa. Výsledky dosazování této skutečnosti odpovídají. Přísnější podmínku přesnosti nebylo možné připustit, uvážíme-li, že v programu bylo zatím užito jednoduché aritmetiky. Znamenalo by to ohrožení stability průběhu výpočtu.

	Rovnice	$+\lambda^5$	$-35.0577704\lambda^4$	$+364.721119\lambda^3$	$-1169.08255\lambda^2$	$+1318.87664\lambda^1$	$-400.159672\lambda^0$	Vypočtena residua
Odpovídající mocniny kořenů	λ_1	0.0242618220	0.0510432982	0.1073875779	0.2259276394	0.475318461	1	0.000002820
	λ_2	8.971634177	5.784918506	3.730121121	2.405185753	1.55086613	1	0.000016046
	λ_3	86.66768140	35.50469142	14.54501947	5.958581326	2.44102055	1	0.00000340
	λ_4	238133.4012	20019.63946	1683.031285	141.4907752	11.8949895	1	0.0000011
	λ_5	2283990.275	122167.4194	6534.563013	340.5245620	18.6955760	1	0.002

Резюме

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ n-ОЙ СТЕПЕНИ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОРНЯМИ ПРИ ПОМОЩИ ПРОГРАММЫ НО АВТОМАТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ МАРКИ NATIONAL-ELLIOTT 803

ВАСИЛ ИВАНОВ, МИЛАН ПИЦЕК (Vasil Ivanov, Milan Picek)

Предлагаемый новый способ решения алгебраических уравнений n-ой степени основан на классической итерационной схеме Ньютона. Необходимые значения функции и соответствующие им производные вычисляются по схеме Горнера. В данном случае используется тот факт, что схема Горнера, помимо приведенных значений, дает также коэффициенты соответствующих многочленов нисших степеней в каждом из последних шагов итерации для соответствующего корня. Количество точек пересечения графика функции соответствующего многочлена нисшей степени (в случае вещественных корней) с осью аргумента равно степени этого многочлена. В интервале между предшествующим вычисленным корнем и искомым корнем функция в данном случае отличается монотонностью.

Таким образом было сделано заключение, что для получения точного значения последующего корня в данном случае нет надобности в специальном нахождении приближенного значения корня; вместо него можно использовать полученное уже при предшествующих вычислениях точное значение корня.

В этом заключается сущность вычисления по предлагаемому новому методу. Естественным результатом такого хода вычисления является полная однозначность процесса итерации, что было проверено в целом ряде примеров.

Для практического использования был описанный метод применен при составлении программы для автоматической электронной вычислительной машины марки NATIONAL-ELLIOTT 803.

Zusammenfassung

LÖSUNG EINER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNG n-TEN GRADES MIT REELLEN POSITIVEN WURZELN DURCH EIN PROGRAMM FÜR DIE PROGRAMMGESTEUERTE ELEKTRONISCHE DIGITALE RECHENANLAGE NATIONAL-ELLIOTT 803

VASIL IVANOV, MILAN PICEK

Die hier entwickelte neue Methode zur Lösung algebraischer Gleichungen n-ter Ordnung beruht auf dem klassischen Newton'schen Iterations-Verfahren. Die nötigen Funktionsgrössen und zugehörigen Derivationen werden nach dem Horner'schen Verfahren berechnet. Hierbei wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass das Horner'sche Verfahren neben den angegebenen Werten auch die Koeffizienten der zuständigen Polynome niedrigerer Ordnung in jedem der letzten Schritte der Iteration für die zugeordnete Wurzel angibt. Die Anzahl der Punkte, in denen die dem zugehörigen Polynom niedrigerer Ordnung (unter der Voraussetzung reeler Wurzeln) entsprechende Funktionskurve die Achse des Arguments schneidet, entspricht der Grössenordnung des zugehörigen Polynoms. Im Intervall zwischen der vorhergehenden zu der gesuchten Wurzel hat die Funktion im gegebenen Fall einen monotonen Verlauf. Dieser Umstand führte zur Enthüllung der Tatsache, dass in diesem Fall zur Bestimmung der nachfolgenden genauen Wurzel der besonders erzielte Annäherungswert der Wurzel nicht benötigt wird und dass vielmehr statt dessen der Wert der vorher berechneten genauen Wurzel angewendet werden kann.

Dies bildet die Grundlage des neuen numerischen Verfahrens. Die natürliche Folge dieser Anordnung ist ein durchaus eindeutiger und glatter Verlauf der Iteration, was an zahlreichen Beispielen bewiesen wurde. Das beschriebene Verfahren wurde für ihre praktische Anwendung als Programm für die automatische Rechenmaschine NATIONAL-ELLIOTT 803 ausgearbeitet.

Adresy autorů: Ing. *Vasil Ivanov*, Energoprojekt, Bubenská 1, Praha 7. — Ing. *Milan Picek*, Energoprojekt, Bubenská 1, Praha 7.