Aplikace matematiky

Miroslav Maňas

Užiti metod matematického programování při aproximaci závislostí lineárními funkcemi

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 3, 206–215

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102854

UŽITÍ METOD MATEMATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ PŘI APROXIMACI ZÁVISLOSTÍ LINEÁRNÍMI FUNKCEMI

MIROSLAV MAŇAS

(Došlo dne 19. ledna 1962.)

V článku je zkoumána možnost použití metod matematického programování při aproximaci závislostí lineárními funkcemi. Je podána jednotná formulace úloh tohoto typu ve formě problému nelineárního programování a ukázána ekvivalence některých úloh s problémem nalezení sedlového bodu jistého lagrangiánu. Některé častěji používané metody aproximace jsou uvedeny jako příklady.

1. ÚVOD. FORMULACE ÚLOHY

Předpokládejme, že je dáno n $(n > 2)$ bodů euklidovské roviny $E_2 : (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Nechť $y = \alpha + \beta x$ je lineární funkce reálné proměnné x, definovaná na E_1, která obsahuje parametry α, β. Označme

(1) $$v_i = |y_i - \alpha - \beta x_i| (1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

(kolmé) vzdálenosti bodů (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, od přímky znázorňující v E_2 funkci $y = \alpha + \beta x$. Konečně budiž dána funkce $z(v)$ reálné proměnné v, definovaná pro $v \geqq 0$, neklesající a taková, že $z(0) = 0$; budeme ji nazývat *váhou proměnné v*. Zabývejme se touto úlohou:

Úloha I. Najít parametry α, β tak, aby součet vah vzdáleností v_i bodů (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, od přímky $y = \alpha + \beta x$ byl minimální, tj. minimalisovat funkci

(2) $$Z = \sum_{i=1}^{m} z(v_i)$$

přes hodnoty α, β.

Funkci Z, jež při pevných (x_i, y_i) je funkcí parametrů α, β, budeme nazývat *celkovou váhou*.

Je nutno si uvědomit, že v_i dané v (1) jako funkce parametrů α, β nemají parciální derivace podle těchto parametrů pro takové dvojice (α, β), pro které platí

$$y_i - \alpha - \beta x_i = 0\,.$$

Pro tyto dvojice (α, β) nemá tedy ani celková váha $Z(\alpha, \beta)$ v obecném případě parciální derivace podle α, β, a proto není možno použít obvyklé techniky hledání extrému položením prvních parciálních derivací za rovny nule.

Tato nesnáz mizí při některých speciálních tvarech váhy $z(v)$. Tak např. lze-li rozšířit definici funkce $z(v)$ na E_1 a je-li pak $z(v) = z(-v) = z(|v|)$, je možno přejít v (2) od závislosti funkce $z(v_i)$ na v_i (při čemž v_i má význam podle (1)) k závislosti této funkce na $(y_i - \alpha - \beta x_i)(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ a derivovatelnost funkce Z podle α, β závisí pak toliko na derivovatelnosti funkce $z(v)$ podle v.

Níže ukážeme na možnost formulovat a řešit uvedené úlohy jako úlohy matematického (tj. lineárního a nelineárního) programování. Obecně půjde o problém programování nelineárního (úloha II) a při speciální volbě funkce $z(v)$ pak o problém programování lineárního.

2. FORMULACE ÚLOHY JAKO ÚLOHY NELINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ A JEJÍ ŘEŠITELNOST

K řešení úlohy I zaveďme $2n$ čísel d_i, h_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ těmito rovnicemi a nerovnostmi:

(3) $$y_i - \alpha - \beta x_i + (d_i - h_i)(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = 0\,,$$

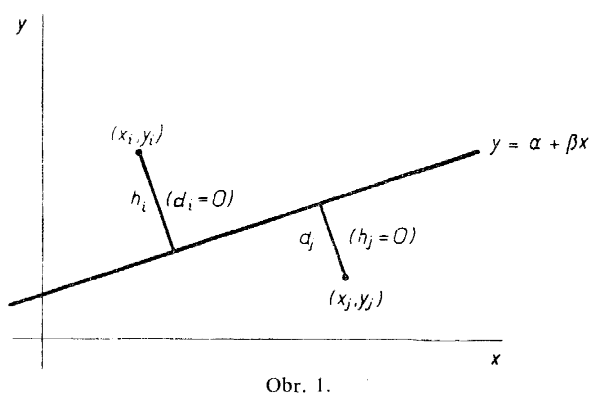
(4) $$d_i h_i = 0\,,$$

(5) $$d_i \geqq 0\,, \quad h_i \geqq 0\,,$$

kde všude $i = 1, 2, \ldots, n$. Tyto vztahy určují d_i, h_i jednoznačně. Je totiž

(6) $$d_i = \max\left[(\alpha + \beta x_i - y_i)(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, 0\right],$$

(7) $$h_i = \max\left[(y_i - \alpha - \beta x_i)(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, 0\right].$$



Obr. 1.

Ze srovnání (1) s (3) plyne, že $v_i = |d_i - h_i|$. Ze vztahu (4) pak plyne, že $v_i = \max[d_i, h_i]$, při čemž alespoň jedno z čísel d_i, h_i je rovno nule. Názorný význam čísel d_i, h_i je patrný z obr. 1.

Nyní můžeme úlohu I formulovat jako s ní ekvivalentní úlohu II:

Úloha II. Najít v $(2n + 2)$ rozměrném prostoru E_{2n+2} bod $\mathbf{t}^* = (\alpha^*, \beta^*, d_1, \ldots, d_n, h_1, \ldots, h_n)$, jehož souřadnice vyhovují rovnicím a nerovnostem (3), (4), (5) a pro který

$$Z(\alpha^*, \beta^*) = \min_{(\alpha,\beta)\in E_2} Z(\alpha, \beta) , \tag{8}$$

při čemž

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [z(d_i) + z(h_i)] .$$

Že úloha II je s úlohou I ekvivalentní, plyne z hořejší poznámky, že jedno z čísel d_i, h_i určených vztahy (3), (4), (5) značí v_i a druhé je rovno nule a dále z toho, že podle definice je $z(0) = 0$, takže $z(d_i) + z(h_i) = z(v_i)$.

Úloha II je úloha nelineárního programování, neboť jde o nalezení extrému funkce obecně nelineární na množině řešení soustavy nelineárních rovnic a nerovností.

Každý bod $\mathbf{t}^* = (\alpha^*, \beta^*, d_1, \ldots, d_n, h_1, \ldots, h_n)$, který splňuje (3), (4), (5) a (8), nazveme *minimálním řešením* úlohy II.

Jak ukazuje následující věta, je možno omezení ještě zjednodušit:

Věta 1. *Pro každou váhu $z(v)$ jsou minimální řešení úlohy II a řešení vyhovující jen podmínkám* (3), (5) *a* (8) *totožná.* (*Jinými slovy: omezení* (4) *plynou již z* (3), (5) *ve spojení s* (8).)

Důkaz. Mějme bod $\mathbf{t} = (\alpha, \beta, d_1, \ldots, d_n, h_1, \ldots, h_n)$ vyhovující (3), (5) a (8), při čemž aspoň pro jeden index i je současně $d_i > 0$, $h_i > 0$. Označme $m_i = \min [d_i, h_i]$. Nahradíme-li souřadnici d_i bodu $\mathbf{t}$ souřadnicí $d_i - m_i$ a jeho souřadnici h_i souřadnicí $h_i - m_i$, pak takto získaný bod $\mathbf{t}'$ splňuje (3), (5) a zřejmě též (4). Při tom (značíme $Z(\mathbf{t})$ místo $Z(\alpha, \beta)$) platí

$$Z(\mathbf{t}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} [z(d_j) + z(h_j)] + z(d_i) + z(h_i) > Z(\mathbf{t}') , \tag{9}$$

neboť alespoň jeden z kladných sčítanců $z(d_i)$ nebo $z(h_i)$ se při přechodu od $\mathbf{t}$ k $\mathbf{t}'$ stal roven nule. Avšak nerovnost (9), totiž $Z(\mathbf{t}) > Z(\mathbf{t}')$, je ve sporu s předpokladem, že $\mathbf{t}$ splňoval (8). Tím je věta dokázána.

Můžeme tedy úlohu II zjednodušit na úlohu II':

Úloha II'. Najít v $(2n + 2)$ rozměrném prostoru E_{2n+2} bod $\mathbf{t}^* = (\alpha^*, \beta^*, d_1, \ldots, d_n, h_1, \ldots, h_n)$, jehož souřadnice vyhovují vztahům (3), (5) a pro který

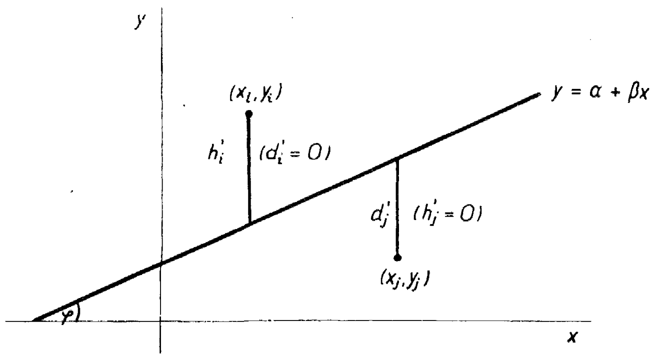
$$Z(\alpha^*, \beta^*) = \min_{(\alpha,\beta)\in E_2} Z(\alpha, \beta) .$$

Minimální řešení nemusí existovat. Existence řešení závisí jednak na tvaru váhy $z(v)$, jednak na poloze bodů (x_i, y_i) v rovině E_2. Je-li např. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, neexistuje řešení pro žádnou váhu $z(v)$. Problém existence a nalezení minimálního řešení lze zkoumat na základě příbuznosti s problémem existence sedlového bodu jistého lagrangiánu. Nejslabší podmínky, za kterých je existence minima funkce $Z(\mathbf{t})$ na množině určené rovnicemi a nerovnostmi

$$g_i(\mathbf{t}) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad \mathbf{t} \geqq 0$$

ekvivalentní existenci sedlového bodu v oboru $\mathbf{t} \geq 0$ lagrangiánu

$$\Phi(\mathbf{t}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i\, g_i(\mathbf{t}) - Z(\mathbf{t})\,, \tag{10}$$



Obr. 2.

jsou podrobně zkoumány v práci [2]. Zde $g_i(\mathbf{t})$ jsou dané funkce proměnné $\mathbf{t}$ a $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je vektor lagrangeových multiplikátorů. *Sedlovým bodem lagrangiánu* $\Phi(\mathbf{t}, \boldsymbol{u})$ *v oboru* $\mathbf{t} \geqq 0$ rozumíme takový bod $(\mathbf{t}^*, \boldsymbol{u}^*)$, pro který platí

$$\Phi(\mathbf{t}, \boldsymbol{u}^*) \leqq \Phi(\mathbf{t}^*, \boldsymbol{u}^*) \leqq \Phi(\mathbf{t}^*, \boldsymbol{u}) \tag{11}$$

pro všechna $\boldsymbol{u} \in E_n$ a $\mathbf{t} \geqq 0$.

Protože zmíněné nejslabší podmínky jsou značně nepřehledné, nebudeme se úlohou zabývat v této obecnosti, nýbrž se zaměříme na některé její speciální případy.

Transformujme proměnné d_i, h_i a v_i těmito vztahy:

$$d_i(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = d_i'\,, \quad h_i(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = h_i'\,, \tag{12}$$
$$v_i(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = v_i'\,.$$

Zřejmě $d_i' \geqq 0$, $h_i' \geqq 0$, $v_i' = \max\,[d_i', h_i']$, při čemž alespoň jedno z čísel d_i', h_i' je rovno nule. Protože β je směrnice hledané přímky, tedy $\beta = \operatorname{tg}\varphi$, při čemž φ je úhel sevřený touto přímkou a kladným směrem osy x, je

$$(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = (|\cos\varphi|)^{-1}$$

a v_i' značí vzdálenost bodu (x_i, y_i) od přímky $y = \alpha + \beta x$, měřenou ve směru osy y (viz obr. 2).

Můžeme pak úlohu II′ formulovat jako úlohu III:

Úloha III. Najít v $(2n + 2)$-rozměrném prostoru E_{2n+2} bod $\mathbf{t} = (\alpha^*, \beta^*, d'_1, \dots, d'_n, h'_1, \dots, h'_n)$ vyhovující rovnicím a nerovnostem

$$y_i - \alpha - \beta x_i + d'_i - h'_i = 0\,, \tag{13}$$

$$d'_i \geqq 0\,, \quad h'_i \geqq 0 \tag{14}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$ a pro který

$$Z(\alpha^*, \beta^*) = \min_{(\alpha,\beta)\in E_2} Z(\alpha, \beta)\,,$$

při čemž

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [z(d'_i(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}) + z(h'_i(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}})]\,. \tag{15}$$

Provedenou transformací se dosáhlo podstatného zjednodušení v tom, že omezení (13) a (14) jsou lineární v α, β, d'_i, h'_i. Není-li množina vymezená vztahy (13) a (14) prázdná, závisí nyní řešitelnost úlohy pouze na tvaru funkce $z(v'(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}})$.

Okolnost, že α, β jsou neomezené, kdežto d'_i, h'_i jsou omezena na nezáporný obor, lze překonat dvěma způsoby. Buď z takových dvou rovnic soustavy (13), pro které $x_i \neq x_j$, vypočteme α, β a dosadíme do zbývajících rovnic (musí být alespoň jedna) a do $Z(\alpha, \beta)$. Dospíváme k úloze s proměnnými d'_i, h'_i omezenými na nezáporný obor (odtud je zřejmá podmínka, že musí být dány aspoň tři body (x_i, y_i) a že aspoň dvě souřadnice x_i musí být navzájem různé). Nebo je možno nahradit proměnné α, β vztahy

$$\alpha = \alpha' - \alpha''\,, \tag{16}$$

$$\beta = \beta' - \beta''\,, \tag{17}$$

při čemž

$$\alpha' \geqq 0\,, \quad \alpha'' \geqq 0\,, \quad \beta' \geqq 0\,, \quad \beta'' \geqq 0\,, \tag{18}$$

čímž opět dospíváme k lineárním omezením v nezáporných proměnných.

Úloha III je řešitelná, jestliže váha $z(v'(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}})$ je konvexní v nezáporném oboru proměnných v', α', α'', β', β''. Platí pak tato věta:

Věta 2. *Bod* $\mathbf{t}^* = (\alpha'^*, \alpha''^*, \beta'^*, \beta''^*, d'_1, \dots, d'_n, h'_1, \dots, h'_n) \geqq 0$ *je řešením úlohy III s modifikací danou vztahy* (16), (17) *a* (18) *tehdy a jen tehdy, existuje-li takový* $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*) \in E_n$, *že* $(\mathbf{t}^*, \mathbf{u}^*)$ *je sedlovým bodem lagrangiánu*

$$\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i - (\alpha' - \alpha'') - (\beta' - \beta'')\, x_i + d'_i - h'_i) - Z(\alpha, \beta) \tag{19}$$

v oboru $\mathbf{t} \geqq 0$, *kde* $Z(\alpha, \beta)$ *má význam z* (15).

Důkaz. Jde o úpravu věty, kterou uvádí KARLIN [4] na str. 203.

Sedlový bod v oboru $\mathbf{t} \geqq 0$ můžeme hledat anulováním derivací (musíme ovšem předpokládat derivovatelnost $z(v)$). Problémem nalezení sedlového bodu se zabývá také práce [2]. Tam popsanou gradientní metodou lze najít sedlový bod řešením jisté soustavy diferenciálních rovnic. Tato soustava obecně není příliš jednoduchá, proto k řešení používáme zpravidla iteračních postupů.

Ostatní obecnější metody nelineárního programování, např. ROSENOVA metoda projekce gradientu [9], [10] nebo ZOUTENDIJKOVA metoda možného směru (feasible direction) [12] mohou znamenat ulehčení numerických výpočtů, neposkytují však algoritmy pro řešení nových úloh. Použitím metody popsané MANNEM a MARKOWITZEM v [8] lze přibližně řešit úlohu II pro případ minimalizace součtu vážených vzdáleností ve směru osy y i při nekonvexní váhové funkci. Problém pak vede na celočíselné lineární programování.

3. PŘÍKLADY

Budeme se zabývat příklady, které obdržíme zvláštní volbou váhy $z(v)$.

Příklad 1. *Absolutní regrese.* Tímto názvem se označují úlohy vésti přímku tak, aby součet absolutních vzdáleností bodů od přímky ve směru jedné z os souřadných byl minimální. Zabýváme-li se vzdálenostmi ve směru osy y, volíme $z(v) = v(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$; pak $z(v'(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}) = v'$ a jde o úlohu: Na množině řešení soustavy

$$y_i - \alpha - \beta x_i + d'_i - h'_i = 0 \,,$$

$$d'_i \geqq 0 \,, \quad h'_i \geqq 0$$

najít minimum funkce

$$\sum_{i=1}^{n} (d'_i + h'_i) \,.$$

To je úloha lineárního programování. Úloha je řešitelná, jsou-li aspoň dvě x_i navzájem různá. Vyloučíme-li triviální případ, kdy y_i jsou si vesměs rovna, můžeme podmínku řešitelnosti úlohy vyjádřit tak, že konvexní obal množiny bodů (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, není úsečka. Řešení nemusí být jediné, jak ukazuje příklad tří bodů, při čemž $x_2 = x_3 \neq x_1$, $y_2 \neq y_3$.

Příklad 2. *Minimalizace maximální odchylky ve směru jedné osy souřadné.* Budeme se zabývat odchylkami ve směru osy y. Tato úloha se vyskytuje např. při proložení distribuční funkce rovnoměrného rozložení, která je nejlepší ve smyslu Kolmogorovova-Smirnovova kritéria, na základě výběru o rozsahu n. Volme

$$z(v) = M\, v(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)^{-1} \,,$$

při čemž

$$M = (1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \max\,[v_1, v_2, \ldots, v_n] \,.$$

Zřejmě, je-li $M' = \max[v'_1, \ldots, v'_n]$, je $z(v) = M' v'(v'_1 + \ldots + v'_n)^{-1}$. Pak lze úlohu formulovat takto: Na množině řešení soustavy

$$\begin{gathered} y_i - \alpha - \beta x_i + d'_i - h'_i = 0\,, \\ d'_i \leqq M'\,, \\ h'_i \leqq M'\,, \\ d'_i \geqq 0\,, \quad h'_i \geqq 0\,, \quad M' \geqq 0 \end{gathered}$$

minimalizovat funkci $Z = M'$.

Jde opět o úlohu lineárního programování. Pro úlohy uvedené v příkladech 1 a 2 jsou metody lineárního programování nejefektivnější vůbec. Úlohy jsou řešeny v pracích [5], [11].

Příklad 3. *Metoda nejmenších čtverců.* Volíme-li

$$z(v) = v^2(1 + \beta^2) \tag{20}$$

a označíme-li $\varepsilon_i = y_i - \alpha - \beta x_i$, jde o úlohu minimalizovat

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\,.$$

Podle poznámky v úvodu lze v tomto případě určit α, β z normální soustavy rovnic, jež se získá tím, že derivace $Z(\alpha, \beta)$ podle α, β položíme rovny nule, za předpokladu, že příslušná soustava má řešení. Méně prakticky lze tuto úlohu řešit jako úlohu kvadratického programování, a to v této formulaci: Na množině řešení soustavy

$$\begin{gathered} y_i - \alpha - \beta x_i + d'_i - h'_i = 0\,, \\ d'_i \geqq 0\,, \quad h'_i \geqq 0 \end{gathered}$$

najít minimum kvadratické formy

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i'^2 + h_i'^2)\,.$$

Obecněji uvažujme případ minimalizace součtu k-tých ($k > 2$) mocnin odchylek ε_i. Tomu odpovídá váhová funkce

$$z(v) = (v(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}})^k\,.$$

Funkce $z(v(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}) = v'^k$ je konvexní ve v' (a tedy i ve v', α', α'', β', β'') a úloha je řešitelná podle věty 2.

Příklad 4. *Ortogonální regrese.* Klademe-li $z(v_i) = v_i^2 = d_i^2 + h_i^2$, minimalizujeme součet čtverců kolmých vzdáleností bodů (x_i, y_i) od prokládané přímky. Jde o úlohu nelineárního programování, již je možno řešit metodami nelineárního programování pouze přibližně [8], [10]. Výhodněji lze ovšem úlohu řešit tak, že položíme rovny nule derivace podle φ a p výrazu

$$Z(\varphi, p) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi - p)^2 .$$

Tato možnost není, volíme-li $z(v_i) = v_i = d_i + h_i$. Zde jsme odkázáni jen na přibližné metody matematického programování. Věty 2 není možné v těchto případech bezprostředně použít, neboť $v_i = v_i'(1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ ani $v_i^2 = (v_i')^2 (1 + \beta^2)^{-1}$ není konvexní ve v_i', β' a β''.

Příklad 5. *Strukturální a regresní relace.* V matematické statistice se vyšetřuje následující model:

$$y' = \beta x' + \alpha ,$$

$$y = y' + y'' , \quad x = x' + x'' ,$$

kde y'' a x'' jsou náhodné veličiny, y', x' náhodné nebo nenáhodné. Pozorovatelnými jsou pouze veličiny y a x. Chceme-li odhadnout α a β z výběru $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, je dokázáno v [3], že odhad β pomocí klasické metody nejmenších čtverců je obecně posunutý, a to směrem k nižším hodnotám. To lze však očekávat již z tvaru váhové funkce (20) (minimalizujeme funkci rostoucí s β), k jejíž volbě v případě uvedeného symetrického modelu není opodstatnění.

LINDLEY [6] a MADANSKY [7] ukazují, že za jistých předpokladů o veličinách vystupujících v modelu je odhad pro β získaný minimalizací výrazu

$$(A + \beta^2 B)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

konsistentní. $A = \operatorname{var} y''$ a $B = \operatorname{var} x''$ jsou populační rozptyly veličin y'' a x''. Odpovídající váhová funkce

$$z(v) = v^2(1 + \beta^2)(A + \beta^2 B)^{-1} \tag{21}$$

vede tedy rovněž ke konsistentním odhadům. Funkce (21) je sudá ve v a je tedy principiálně možno (viz odstavec 1) najít odhad β anulováním derivací. Není možné však použít k řešení věty 2, neboť funkce (21) není konvexní v proměnných v', β' a β''.

Literatura

[1] *Arrow K. J., Hurwicz L., Uzawa H.*: Studies in Linear and Nonlinear Programming. Stanford University Press, Stanford, Calif. 1958.

[2] *Arrow K. J., Hurwicz L., Uzawa H.*: Constraint Qualifications in Maximization Problems. Naval Res. Log. Quarterly, Vol. 8, 1961.

[3] *Durbin J.*: Errors in Variables. Revue de l'Institut international de statistique, Vol. 22, 1954.

[4] *Karlin S.*: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics. Vol. I. Addison-Wesley Publ. Company, Inc. 1959.

[5] *Kelley J. E.*: An Application of Linear Programming to Curve Fitting. Journal of the Society for Indust. and Appl. Mathematics. Vol. 6, 1958.

[6] *Lindley D. V.*: Regression Lines and the Linear Functional Relationship. Journal of the Royal Statistical Society, Supp. 9, 1947.
[7] *Madansky A.*: The Fitting of Straight Lines when Both Variables are Subject to Error. Journal of the American Statistical Association, Vol. 54, 1959.
[8] *Manne A. S., Markowitz H. M.*: On the Solution of Discrete Programming Problems. Econometrica, Vol. 25, 1957.
[9] *Rosen J. B.*: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part I. Linear Constraints. Jour. Soc. Industr. Appl. Mathem., Vol. 8, 1960.
[10] *Rosen J. B.*: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. Part II. Nonlinear Constraints. Jour. Soc. Industr. Appl. Mathem., Vol. 9, 1961.
[11] *Wagner H. M.*: Linear Programming Techniques for Regression Analysis. Jour. of the Amer. Stat. Association, Vol. 54, 1959.
[12] *Zoutendijk G.*: Maximizing a Function in a Convex Region. Jour. of Royal Stat. Soc., Vol. 21, 1959.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ЗАВИСИМОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

МИРОСЛАВ МАНЯС (Miroslav Maňas)

В работе решается задача аппроксимирования зависимости, заданной n точками плоскости, линейной функцией вида $y = \alpha + \beta x$, где α и β — искомые параметры. Расстояния точек от искомой прямой взвешиваются при помощи функции веса $z(v)$, обладающей удобными свойствами. Параметры α и β мы получим из условия, что сумма взвешенных таким образом расстояний от искомой прямой должна быть минимальной. Оказывается, что эту задачу можно формулировать, как проблему нелинейного программирования, в частных случаях функции $z(v)$ как проблему линейного программирования. Ограничения задачи можно всегда сделать линейными.

При условии выпуклости определенной функции, полученной путем подстановки из функции $z(v)$, задача эквивалентна нахождению седловой точки лагранжиана (19). В случае пяти часто применяемых способов аппроксимации приведена функция взвешивания $z(v)$, и сформулирована соответствующая задача линейного или нелинейного программирования, причем сделаны замечания относительно численного решения.

Summary

MATHEMATICAL PROGRAMMING APPLIED TO LINEAR APPROXIMATION OF FUNCTIONS

MIROSLAV MAŇAS

The problem studied is the approximation of a relation given by n points in the plane, by a linear relation in the form $y = \alpha + \beta x$, where α, β are parameters to be determined. The distances of the given points from this line are penalised by a weight-function $z(v)$ with suitable properties. The parameters α, β are then to be determined from the condition that the sum of weighed distances be minimal. It is shown that this problem may be formulated as a problem in non-linear programming, and, for special types of $z(v)$, as a linear programming problem. In all cases the constraints may be made linear.

Under the assumption that a certain function (obtained by substituting in $z(v)$) is convex, the problem is equivalent to that of finding a saddle point of the Lagrangian (19).

In five cases of frequently used approximation methods, the weight-function is exhibited, and the corresponding linear or non-linear programming problem formulated, with remarks on numerical procedures of solution.

Adresa autora: Miroslav Maňas, Katedra vědeckého programování Vysoké školy ekonomické, nám. G. Klimenta 4, Praha 3 — Žižkov.