

Aplikace matematiky

Jan Dvořák

Napětí v desce oslabeně čtvercovou mříží kruhových otvorů

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 3, 180–196

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102851>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NAPĚTÍ V DESCE OSLABENÉ ČTVERCOVOU MŘÍŽÍ KRUHOVÝCH OTVORŮ

JAN DVOŘÁK

(Došlo dne 24. října 1962.)

K řešení úlohy napjatosti v perforované desce je použito theta-funkcí a je provedeno srovnání s jinými postupy. Metoda je aplikována na případ ustáleného teplotního pnutí v okolí volných otvorů při druhé krajové podmínce vedení tepla.

ÚVOD

Některé součásti energetických zařízení mají tvar desky oslabené pravidelnou mříží kruhových otvorů. Jsou to např. dna výměníků tepla, kondensátory, opěrné desky vnitřního zařízení jaderných reaktorů a jejich tlakových nádob. Tyto části jsou jednak zatíženy vnějšími silami, jednak teplotním pnutím. Výpočet koncentrace napětí v okolí otvorů v desce zatížené silami ležícími v její rovině byl obsahem řady prací. V monografiích SAVINOVĚ [1] a NEUBEROVĚ [2] jsou uvedeny výpočty průběhu napětí v okolí osamělých kruhových nebo eliptických otvorů a otvorů, jejichž okraje jsou zesíleny elastickými kroužky. Autoři se rovněž zabývají případy rozložení napětí v okolí otvoru v desce z anizotropního materiálu, pružně-plastického okolí otvoru a případy ohýbané a kroucené desky s otvorem. HOWLAND a HÜTTER [3], [4], [5] řešili úlohu desky oslabené řadou kruhových otvorů. Výpočtem koncentrace napětí v desce oslabené otvory, jež tvoří čtvercovou mříž pokrývající celou její plochu se zabýval SAITO [7].

V této práci je úloha, již se zabýval Saito, řešena theta-funkcemi, které zjednoduší výpočet a dávají přehlednější výsledky.

V první kapitole je odvozena funkce napětí a je provedeno stručné srovnání s řešením pomocí trigonometrických funkcí v komplexní rovině.

Druhá kapitola obsahuje číselný příklad. Odvozený postup je použit k určení stacionárního teplotního napětí v desce perforované čtvercovou mříží volných kruhových otvorů. Předpokládá se, že deska je zhotovena z pružného homogenního isotropního materiálu, že teplo o konstantní hustotě toku je přiváděno okraji otvorů, a povrchem desky při konstantním součiniteli přestupu je odváděno. Je proveden

výpočet teplotního pole, nutný k odvození partikulárního řešení teplotních pnutí, dále řešení okrajové úlohy a konečně číselný příklad s diagramem průběhu dvou složek normálního napětí ve dvou řezech desky.

1. ŘEŠENÍ ÚLOHY

Při výpočtu napjatosti postupoval Saito v podstatě tak, že sčítal Airyho funkce odpovídající jednotlivým otvorům. Jeho vzorce obsahují složité dvojnásobné součty. Zjednodušení je možno dosáhnout tím, že použijeme řešení Hütterova [5] pro desku s řadou otvorů a sčítáme pak Airyho funkce odpovídající jednotlivým řadám otvorů. Pro desku s řadou otvorů o jednotkové rozteči a poloměru $R < \frac{1}{2}$, zatíženou prostým jednoosým tahem p rovnoběžným s osou (x), odvodili Howland a Hütter tuto funkci napětí (viz [3], [4], [5])¹⁾

$$(1,1) \quad U = \frac{p}{2} y^2 + \operatorname{Re} \left\{ a_0 \lg \sin \pi z + a_2 \frac{d^2}{dz^2} \lg \sin \pi z + \dots + b_1 y \frac{\partial}{\partial y} \lg \sin \pi z + b_3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \lg \sin \pi z + \dots \right\}.$$

Zde a_{2k} , b_{2k+1} ($k = 0, 1, \dots$) jsou reálné konstanty, $z = x + iy$.

U desky s mříží otvorů je nutné volit Airyho funkci, dávající napětí se dvěma periodami. Protože složky napětí jsou úměrné druhým derivacím této funkce, stačí, když se Airyho funkce při vzrůstu argumentu o periodu sice změní, ale pouze o lineární funkci proměnných x , y . Jako nejprostší se nabízí superposice nekonečně mnoha předchozích řešení s řadami otvorů, posunutých o celistvé násobky druhé periody $i\omega$. Pro čtvercové mříže, tj. pro $\omega = 1$, na které se v dalším omezíme, dostaneme tedy

$$(1,2) \quad U = \frac{p}{2} y^2 + \operatorname{Re} \left\{ a_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\lg \sin \pi(z + in) - \left(\frac{\pi}{2} i - i\pi z + \pi n \right) \operatorname{sign} n \right] + a_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dz^2} \lg \sin \pi(z + in) - \dots + ib_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y + n) [\cotg \pi(z + in) + i \operatorname{sign} n] + ib_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (y + n) \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\cotg \pi(z + in) + i \operatorname{sign} n] + \dots \right\}.$$

Členy se $\operatorname{sign} n$ jsou lineárními funkcemi z , které ve vztazích pro napětí vymizí; připojeny jsou zde proto, že zajišťují konvergenci řad v (1,2). Reálná část funkce $\lg \sin \pi(z + in)$ u faktorů a_0 má ve směru osy (x) periodu 1. Skutečně platí

$$\lg \sin \pi(z + in + 1) = \lg \sin \pi(z + in) + i\pi.$$

Změní-li se z o 1, jednotliví sčítanci se buďto nezmění, nebo změní o konstantu (jako např. $\lg \sin \pi(z + in)$ nebo $i\pi z \operatorname{sign} n$). Změní-li se z o i (tj. y o 1), přejdou pouze sčítanci s indexem n ve sčítanci s indexem $n + 1$; přebýt mohou pouze některé členy

¹⁾ O konstrukci funkcí tohoto typu viz též MICHLIN [11].

s faktorem $\sin n$, což jsou lineární funkce. Protože pak, nabývá-li n postupně všech hodnot celých čísel, platí totéž o $n + 1$, nekonečné součty se záměnou n na $n + 1$ nezmění až na zmíněné přebývající lineární členy. Sestrojená Airyho funkce má tedy potřebné vlastnosti vůči oběma periodám.

Dalšího zjednodušení výpočtu dosáhneme, když místo součtů trigonometrických funkcí použijeme theta-funkci. Theta-funkce mají celou mříž nulových bodů (na rozdíl od trigonometrických funkcí s řadou nulových bodů) a dovolují proto uvažovat všechny otvory současně bez nutnosti sčítání řad.

Konkrétně použijeme funkci²⁾

$$\vartheta_1(z) = 2(h^{1/4} \sin \pi z - h^{9/4} \sin 3\pi z + h^{25/4} \sin 5\pi z - \dots),$$

kde

$$h = e^{-\pi}.$$

Zřejmě platí

$$\vartheta_1(z + 1) = -\vartheta_1(z)$$

a

$$\lg \vartheta_1(z + 1) = \lg \vartheta_1(z) + i\pi;$$

derivace funkce $\lg \vartheta_1(z)$ mají pak vůči ose (x) periodu 1. Vzroste-li argument o i , platí

$$\vartheta_1(z + i) = -\frac{1}{h} e^{-2\pi iz} \vartheta_1(z) \quad (\text{viz [6]})$$

a

$$\lg \vartheta_1(z + i) = \lg \vartheta_1(z) + \pi + i(\pi - 2\pi z).$$

Při změně argumentu o i vzroste $\lg \vartheta_1(z)$ o lineární funkci z ; všechny derivace $\lg \vartheta_1(z)$ počínaje druhou jsou pak periodické i vůči druhé periodě. Mají tedy funkce $\lg \vartheta_1(z)$ a její derivace vlastnosti periodičnosti potřebné pro hledanou Airyho funkci. Pro čtvercovou mříž musí kromě požadovaných vlastností dvojperiodičnosti být členy funkce napětí čtvercově symetrické. Tato podmínka je splněna, jestliže k $\lg \vartheta_1(z)$ přičteme $\frac{1}{2}\pi \cdot z^2$. Skutečně platí

$$\operatorname{Re} \left[\lg \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 \right] = \operatorname{Re} \left[\lg \vartheta_1(iz) - \frac{\pi}{2} z^2 \right].$$

Důkaz. Zkoumejme funkci

$$f(z) = \frac{\vartheta_1(iz) e^{-\frac{1}{2}\pi z^2}}{\vartheta_1(z) e^{\frac{1}{2}\pi z^2}}.$$

Z vlastností theta-funkcí plyne

$$f(z + 1) = \frac{\vartheta_1(iz + i) e^{-\frac{1}{2}\pi(z+1)^2}}{\vartheta_1(z + 1) e^{\frac{1}{2}\pi(z+1)^2}} = \frac{e^\pi e^{2\pi z} \vartheta_1(iz) e^{-\frac{1}{2}\pi(z^2 + 2z + 1)}}{\vartheta_1(z) e^{\frac{1}{2}\pi(z^2 + 2z + 1)}} = \frac{\vartheta_1(iz) e^{-\frac{1}{2}\pi z^2}}{\vartheta_1(z) e^{\frac{1}{2}\pi z^2}} = f(z).$$

²⁾ O definici a vlastnostech theta-funkcí viz [6] nebo [8].

Podobně

$$\begin{aligned} f(z+i) &= \frac{\vartheta_1(iz-1) e^{-\frac{1}{2}\pi(z+i)^2}}{\vartheta_1(z+i) e^{\frac{1}{2}\pi(z+i)^2}} = \frac{-\vartheta_1(iz) e^{-\frac{1}{2}\pi(z^2+2iz-1)}}{-e^{-\pi} \cdot e^{-2\pi iz} \vartheta_1(z) e^{\frac{1}{2}\pi(z^2+2iz-1)}} = \\ &= \frac{\vartheta_1(iz) e^{-\frac{1}{2}\pi z^2}}{\vartheta_1(z) e^{\frac{1}{2}\pi z^2}} = f(z). \end{aligned}$$

Je tedy $f(z)$ eliptická s periodami 1 a i .

V případě čtvercové mříže má funkce $\vartheta_1(z)$ kořeny stálé násobnosti v bodech $z = m + in$ ($m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) a proto $f(z)$ nemá pólů ani nulových bodů. Eliptická funkce nemající singulárních bodů je však konstanta. Tudíž $f(z) \equiv A_0$. Hodnotu A_0 stanovíme rozvojem $f(z)$ v okolí $z = 0$

$$\begin{aligned} A_0 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\vartheta_1(iz) e^{-\frac{1}{2}\pi z^2}}{\vartheta_1(z) e^{\frac{1}{2}\pi z^2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi z^2} (h^{1/4} \sin i\pi z - h^{9/4} \sin 3i\pi z + h^{25/4} \sin 5i\pi z - \dots)}{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} (h^{1/4} \sin \pi z - h^{9/4} \sin 3\pi z + h^{25/4} \sin 5\pi z - \dots)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2} i\pi z \left\{ h^{1/4} \left[1 - \frac{(i\pi z)^2}{3!} + \dots \right] - h^{9/4} \left[3 - \frac{(3i\pi z)^2}{3!} + \dots \right] + \right. \\ &\quad \left. + h^{25/4} \left[5 - \frac{(5\pi iz)^2}{3!} + \dots \right] - \dots \right\}}{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} \pi z \left\{ h^{1/4} \left[1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \dots \right] - h^{9/4} \left[3 - \frac{(3\pi z)^2}{3!} + \dots \right] + \right. \\ &\quad \left. + h \left[5 - \frac{(5\pi z)^2}{3!} + \dots \right] - \dots \right\}} = i. \end{aligned}$$

Označíme-li $\vartheta_1(z) e^{\frac{1}{2}\pi z^2} = g(z)$, plyne přímo z definice funkce $f(z)$, že

$$g(iz) = i g(z)$$

a dále

$$\lg g(iz) = i \frac{\pi}{2} + \lg g(z)$$

a tedy

$$\operatorname{Re} \lg g(iz) = \operatorname{Re} \lg g(z).$$

Z toho plyne, že funkce $\lg \vartheta_1(z) + \frac{1}{2}\pi \cdot z^2$ rozvinuta v mocninnou řadu musí obsahovat pouze mocniny z dělitelné čtyřmi; vlastnosti čtvercové symetrie mají tedy také čtvrtá, osmá, dvanáctá a další derivace funkce $\lg \vartheta_1(z) + \frac{1}{2}\pi \cdot z^2$, jejichž řád je dělitelný čtyřmi.

Při konstrukci funkce napětí postupujeme dále takto: Na přímkách a, b resp. a', b' , omezujících libovolné pásy periodicity, zvolme dva body A, B resp. A', B' se stejnými pořadnicemi resp. ordinátami a spojme tyto body spojitou křivkou α resp. α' , ležící úplně v páscech periodicity a neprotínající hranici pružné oblasti (viz obr. 1).

Požadujeme, aby výslednice složek napětí působících v těchto řezech byla nulová.

Vyjádřeme hledanou funkci napětí U v komplexní rovině Goursatovým tvarem (1,3)

$$U = \operatorname{Re} \{ \bar{z} \varphi(z) + \chi(z) \},$$

kde $\varphi(z)$, $\chi(z)$ jsou analytické funkce.

Předpokládejme, že $\varphi(z) = Az$ (A = reálná konstanta) a

$$\chi(z) = \lg \vartheta_1(z) + \varphi_0(z),$$

přičemž $\varphi_0(z) = cz^2$ (c = komplexní konst.). Druhá derivace $\varphi_0(z)$ podle x resp. podle y představuje konstantní napětí σ_y nebo σ_x . Prvá derivace funkce U v komplexní rovině tedy je

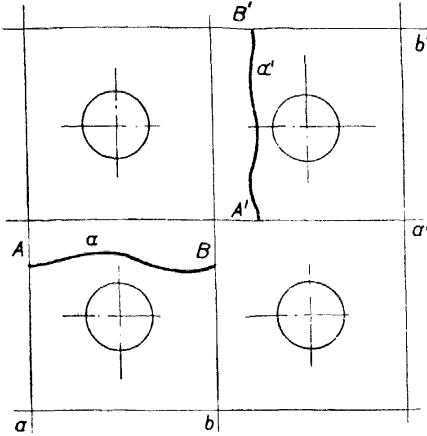
$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z \varphi'(z) + \overline{\psi(z)},$$

kde

$$\psi(z) = \frac{d\chi(z)}{dz}.$$

Po dosazení za $\varphi(z)$ a $\chi(z)$ dostáváme

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = 2Az + \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} + 2c\bar{z}.$$



Obr. 1.

Zkoumejme, jak se chová funkce $\vartheta_1'(z)/\vartheta_1(z)$, roste-li z nade všechny meze.

Změní-li se z o reálnou periodu 1, je

$$\lg \vartheta_1(z + 1) = \lg \vartheta_1(z) + i\pi$$

a prvá derivace

$$\frac{\vartheta_1'(z + 1)}{\vartheta_1(z + 1)} = \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)}.$$

Roste-li tedy reálná část z , zůstává prvá derivace konečná a je periodická.

Vzroste-li z o libovolnou imaginární periodu τ , je

$$\lg \vartheta_1(z + i\tau) = \pi i(1 - \tau) - 2\pi iz + \lg \vartheta_1(z)$$

a prvá derivace

$$\frac{\vartheta_1'(z + i\tau)}{\vartheta_1(z + i\tau)} = \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} - 2\pi i;$$

funkce $\vartheta_1'(z + iy)/\vartheta_1(z + iy)$ roste pro $|y| \rightarrow \infty$ lineárně a konstanta u $|y|$ je $-2\pi : |\tau| \cdot i$. Pro $|y| \rightarrow \infty$ tedy platí

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = 2Ai|y| - \frac{2\pi i|y|}{|\tau|} - 2\bar{c}i|y|$$

a pro $|x| \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = 2A|x| + 2\bar{c}|x|.$$

Vzhledem k tomu, že je zapotřebí, aby složky tensoru napětí

$$\sigma_x \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(2A - \frac{2\pi}{|\tau|} - 2\bar{c} \right),$$

$$\sigma_y \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2A + 2\bar{c},$$

byly pro $|x| \rightarrow \infty$ resp. $|y| \rightarrow \infty$ nulové, musí platit

$$2A - \frac{2\pi}{|\tau|} - 2\bar{c} = 0,$$

$$2A + 2\bar{c} = 0.$$

Odtud

$$A = \frac{\pi}{2|\tau|}$$

a

$$\bar{c} = c = -\frac{\pi}{2|\tau|}.$$

Pro čtvercovou mříž o rozteči $|\tau| = 1$ je $A = +\frac{1}{2}\pi$ a $c = \bar{c} = -\frac{1}{2}\pi$.

Podle (1,3) můžeme tedy funkci U vyjádřit ve tvaru

$$U = \operatorname{Re} \lg \left[\vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 \right] - \frac{\pi}{2} r^2.$$

Je zřejmé, že člen $\frac{1}{2}\pi \cdot r^2$ neporušuje ani dvojperiodičnost ani čtvercovou symetrii napětí.

Funkce $\lg \vartheta_1(z) + \frac{1}{2}\pi \cdot z^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot r^2$ mají v počátku singularitu odpovídající singularitám funkce $\lg \sin \pi z$ a příslušných derivací a mohou proto při sestrojování funkce napětí nastoupit místo u faktorů a_i .

Abychom dostali výraz odpovídající členu u b_1 v (1,2), utvořme funkci

$$(1.3a) \quad \frac{1}{4} \frac{\vartheta_1''(z)}{\vartheta_1(z)} + \pi \frac{z - \bar{z}}{2} \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)}.$$

Tento výraz je ve směru reálné osy (x) periodický s periodou 1. Dále platí vztahy

$$(1.4) \quad \frac{\vartheta_1'(z+i)}{\vartheta_1(z+i)} = \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} - 2\pi i,$$

$$\frac{\vartheta_1''(z+i)}{\vartheta_1(z+i)} = \frac{\vartheta_1''(z)}{\vartheta_1(z)} - 4\pi i \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} - 4\pi^2.$$

Dosadíme-li do výrazu (1,3a) $z + i$ za z , $\bar{z} - i$ za \bar{z} , vidíme, že s použitím vztahů (1,4) se výraz (1,3a) změní jen o lineární funkci. Přitom součinitel $u \frac{z - \bar{z}}{2}$ má v počátku ku pól prvního řádu, tak jako součinitel $u b_1$ ve výrazu (1,2).

Sama funkce (1,3a) čtvercovou symetrií nemá, nabývá jí však její druhá, šestá, desátá atd. derivace, pokládáme-li při derivování podle $z \bar{z}$ za druhou nezávisle proměnnou. Tak dospíváme k Airyho funkci

$$(1,5) \quad U = \frac{P}{2} y^2 + \operatorname{Re} \left\{ a_0 \left[\operatorname{Ig} \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} r^2 \right] + a_4 \frac{d^4}{dz^4} \left[\operatorname{Ig} \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} r^2 \right] + \dots + b_2 \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{4} \frac{\vartheta_1''(z)}{\vartheta_1(z)} + \pi \frac{z - \bar{z}}{2} \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} \right] + b_6 \frac{d^6}{dz^6} \left[\frac{1}{4} \frac{\vartheta_1''(z)}{\vartheta_1(z)} + \pi \frac{z - \bar{z}}{2} \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} \right] + \dots \right\}.$$

K určení konstant a_{4k}, b_{4k+2} ($k = 0, 1, 2, \dots$) slouží okrajové podmínky. Tak v případě volných otvorů, kdy jde o prvou úlohu pružnosti s předepsaným rozložením napětí na hranici oblasti, je

$$\sigma_r|_{r=R} = 0, \quad \tau_{r\varphi}|_{r=R} = 0.$$

Protože

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right),$$

musí na okraji otvoru o poloměru $r = R$ platit $U = \text{konst}$, $\partial U / \partial r = 0$.

2. PŘÍKLAD

V této kapitole předvedeme použití theta-funkcí při určení teplotního napětí v perforované desce. Jak již bylo popsáno v úvodu, jde o stanovení ustáleného teplotního pnutí v desce s čtvercovou mříží kruhových otvorů, jejímiž válcovými povrchy je přiváděno teplo o konstantní hustotě toku a odváděno oběma jejími rovinnými povrchy při konstantním součiniteli přestupu.

Při řešení úlohy je předně nutno stanovit rozložení teploty; budeme uvažovat jedno pole, mající tvar čtvercové desky s kruhovým otvorem a tepelně izolovaným vnějším obvodem.

Označme proměnný poloměr r , úhel průvodiče φ , průměr otvoru $2b$ a stranu čtverce $2a$ (viz obr. 2).

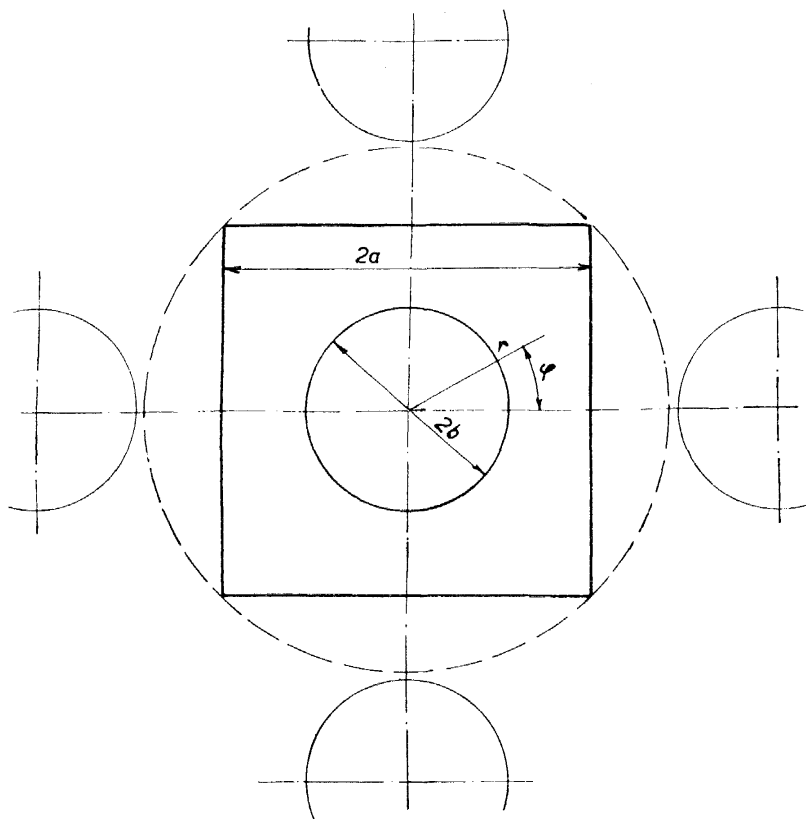
Základní rovnice ustáleného vedení tepla je

$$(2,1) \quad \Delta T - \gamma^2 T = 0.$$

Zde Δ je Laplaceův operátor, T je teplotní rozdíl mezi materiálem desky a okolním prostředím,

$$\gamma^2 = \frac{2\bar{\alpha}}{\lambda t},$$

λ je tepelná vodivost materiálu, t je tloušťka desky, $\bar{\alpha}$ je součinitel přestupu.



Obr. 2.

Teplotní pole stanovme kombinací řešení

$$(2,2) \quad T(r, \varphi) = T_1(r) + T_2(r, \varphi) + T_3(r, \varphi) + \dots$$

$T_1(r)$ je teplotní pole v nekonečné desce s jedním kruhovým otvorem, $T_2(r, \varphi)$ atd. jsou teplotní pole korigující předepsané okrajové podmínky střídavě na vnitřním a vnějším obrysu desky.

Rozložení teploty v okolí osamělého otvoru při předepsané stálé hustotě tepelného toku na okraji otvoru v nekonečné desce je dáno řešením Besselovy rovnice

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} - \gamma^2 T_1 = 0.$$

Její obecným integrálem je

$$T_1 = A K_0(\xi) + B I_0(\xi),$$

kde $\xi = \gamma r$ a $I_0(\xi)$ resp. $K_0(\xi)$ jsou Besselovy funkce prvního a druhého druhu imaginárního argumentu s indexem nula. Protože se vzrůstajícím poloměrem zůstává teplota konečná, je $B = 0$ a

$$T_1 = A K_0(\xi).$$

Protože na poloměru b má být

$$-\lambda t \frac{dT_1}{dr} = q,$$

je

$$A = \frac{q}{\gamma \lambda t K_1(\beta)}$$

a

$$(2,3) \quad T_1 = q \frac{K_0(\xi)}{\gamma \lambda t K_1(\beta)}.$$

Zde $\beta = \gamma b$; $K_0(\xi)$, $K_1(\xi)$ jsou Besselovy funkce druhého druhu, imaginárního argumentu s indexem 0 a 1.

Rozložení teploty T_1 nesplňuje na obrysu čtverce podmínku $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ a proto je nutno připojit vně čtverce tepelné zdroje, které by toto splnily alespoň přibližně. Umístíme na kružnici o poloměru $a\sqrt{2}$ (na obr. 2 čárkovaně) tepelné zdroje o hustotě tepelného toku

$$(2,4) \quad q = \kappa_0 + \kappa_4 \cos 4\varphi + \kappa_8 \cos 8\varphi + \dots$$

(čtyřnásobky argumentu trigonometrických funkcí jsou voleny vzhledem k symetrii čtverce).

Rotačně nesymetrické rozložení teploty s odvodem tepla povrchem desky určíme řešením rovnice (2,1) pro T_2 . Jejím integrálem s ohledem na (2,4) je

$$(2,5) \quad T_2 = \bar{\kappa}_0 I_0(\xi) + \bar{\kappa}_4 I_4(\xi) \cos 4\varphi + \bar{\kappa}_8 I_8(\xi) \cos 8\varphi + \dots$$

Omezíme-li se na první dva členy řady (2,2), je

$$(2,6) \quad T = q \frac{K_0(\xi)}{\lambda \gamma \lambda t K_1(\beta)} + \frac{\alpha \sqrt{2}}{\gamma \lambda t} [\bar{\kappa}_0 I_0(\xi) + \bar{\kappa}_4 I_4(\xi) \cos 4\varphi + \bar{\kappa}_8 I_8(\xi) \cos 8\varphi + \dots],$$

kde

$$\bar{\kappa}_n = \kappa_n K_n(\alpha \sqrt{2}).$$

Z podmínky tepelné izolace vnějších obrysů čtverce stanovíme konstanty κ_i ($i = 0, 4, 8, \dots$). Vezmeme-li do počtu prvé tři členy řady (2,4), je možno splnit podmínku

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} \cos \varphi - \frac{1}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \sin \varphi = 0$$

ve třech bodech poloviny strany čtverce. Necht' tyto body jsou pravidelně rozmístěny tak, jak je patrné na obr. 3. Jejich souřadnice jsou:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1,015\alpha, & \xi_2 &= 1,119\alpha, & \xi_3 &= 1,300\alpha, \\ \varphi_1 &= 0,1653, & \varphi_2 &= 0,464, & \varphi_3 &= 0,695\alpha. \end{aligned}$$

Položíme-li prvé derivace T ve směru normály ke straně čtverce pro ξ_i, φ_i ($i = 1, 2, 3$) rovny nule, dostáváme soustavu rovnic pro $\bar{\kappa}_0, \bar{\kappa}_4, \bar{\kappa}_8$:

$$(2,7) \quad \begin{aligned} &\bar{\kappa}_0 I_1(\xi_i) \cos \varphi_i + \bar{\kappa}_4 \left\{ [I_3(\xi_i) + I_5(\xi_i)] \frac{1}{2} \cos 4\varphi_i \cos \varphi_i + 4 \frac{I_4(\xi_i)}{\xi_i} \sin 4\varphi_i \sin \varphi_i \right\} + \\ &+ \bar{\kappa}_8 \left\{ \frac{1}{2} [I_7(\xi_i) + I_9(\xi_i)] \cos 8\varphi_i \cos \varphi_i + 8 \frac{I_8(\xi_i)}{\xi_i} \sin 8\varphi_i \sin \varphi_i \right\} = q \frac{K_1(\xi_i)}{K_1(\beta) \alpha \sqrt{2}} \cos \varphi_i. \end{aligned}$$

Při výpočtu napětí je vhodné rozložit úlohu na dvě části:

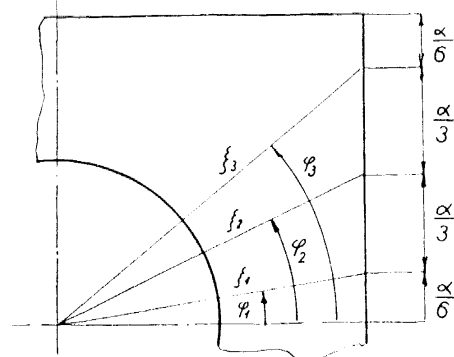
a) určit partikulární integrál (příslušné složky napětí budou označeny jedním pruhem);

b) řešit okrajovou úlohu (složky napětí budou označena dvěma pruhy).

Ad a): Základem řešení jsou rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0,$$



Obr. 3.

z nichž po dosazení rovnic závislosti napětí na poměrném prodloužení

$$(2,8) \quad \sigma_r = \frac{2G}{1-\nu} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi - (1+\nu) \varepsilon T],$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{1-\nu} [\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r - (1+\nu) \varepsilon T],$$

$$\tau_{r\varphi} = 2G\gamma_{r\varphi}$$

a zavedením termoelastického potenciálu ψ (viz [12]) formulemi

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{a} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

dostáváme diferenciální rovnici

$$(2,9) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = (1 + \nu) \varepsilon T.$$

u, v jsou posuvy v radiálním a tečném směru, E, G modul pružnosti, ν Poissonovo číslo a ε součinitel tepelné roztažnosti.

Vzhledem k platnosti rovnice (2,1) je zřejmé, že partikulárním integrálem rovnice (2,9) je

$$(2,10) \quad \psi = (1 + \nu) \frac{\varepsilon}{\gamma^2} T.$$

Protože

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \quad \varepsilon = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

je po dosazení těchto vztahů současně s (2,10) do (2,8) a s ohledem na (2,9)

$$(2,11) \quad \bar{\sigma}_r = -E\varepsilon \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = -E\varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad \bar{\tau}_{r\varphi} = +E\varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right).$$

Na rozdíl od požadovaných volných okrajů otvorů nám toto řešení dává pro $\xi = \beta$ nenulové složky radiálního a smykového napětí. Provedeme-li se vztahem (2,6) operace podle (2,11), dostáváme na vnitřním okraji

$$(2,12) \quad \bar{\sigma}_r|_{r=b} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{4n} \cos 4n\varphi, \quad \bar{\tau}_{r\varphi}|_{r=b} = \sum_{n=1}^{\infty} t_{4n} \sin 4n\varphi,$$

kde

$$(2,13) \quad p_0 = \frac{E\varepsilon}{\gamma\lambda t} \left[\frac{q}{\beta} - \frac{\alpha \sqrt{2} \bar{\kappa}_0 I_1(\beta)}{\beta} \right],$$

$$p_4 = -\frac{E\varepsilon}{\gamma\lambda t} \kappa_4 \alpha \sqrt{2} \left[\frac{1}{2\beta} I_3(\beta) - \frac{16I_4(\beta)}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta} I_5(\beta) \right],$$

$$p_8 = -\frac{E\varepsilon}{\gamma\lambda t} \kappa_8 \alpha \sqrt{2} \left[\frac{1}{2\beta} I_7(\beta) - \frac{64I_8(\beta)}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta} I_9(\beta) \right],$$

$$t_4 = \frac{4E\varepsilon}{\gamma\lambda t} \kappa_4 \alpha \sqrt{2} \left[\frac{I_3(\beta) + I_5(\beta)}{2\beta} - \frac{I_4(\beta)}{\beta^2} \right],$$

$$t_8 = \frac{8E\varepsilon}{\gamma\lambda t} \kappa_8 \alpha \sqrt{2} \left[\frac{I_7(\beta) + I_9(\beta)}{2\beta} - \frac{I_8(\beta)}{\beta^2} \right].$$

Pro volné okraje pak musí platit

$$\bar{\bar{\sigma}}_r + \bar{\sigma}_r|_{\xi=\beta} = 0, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\varphi} + \bar{\tau}_{r\varphi}|_{\xi=\beta} = 0.$$

Ad b): Řešení okrajové úlohy. Zde použijeme vztahů odvozených v kap. 1 a ponecháme rovněž tатаž označení.

Řešme tedy úlohu nekonečné desky oslabené čtvercovou mříží kruhových otvorů o poloměru $R < \frac{1}{2}$ a rozteči 1, jejíž okraje jsou zatíženy složkami radiálního a smykového napětí

$$(2,14) \quad \bar{\bar{\sigma}}_r = -\bar{\sigma}_r, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\varphi} = -\bar{\tau}_{r\varphi}.$$

Tyto složky, jak je patrné z (2,12), tvoří rovnovážnou soustavu sil a proto Airyho funkce popisující příslušný stav napjatosti je dána vztahem

$$(2,15) \quad U = \operatorname{Re} \left\{ a_0 \left[\log \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} r^2 \right] + a_4 \frac{d^4}{dz^4} \left[\log \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} r^2 \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + b_2 \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{4} \frac{\vartheta_1''(z)}{\vartheta_1(z)} + \pi \frac{z - \bar{z}}{2} \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} \right] + b_6 \frac{d^6}{dz^6} \left[\frac{1}{4} \frac{\vartheta_1''(z)}{\vartheta_1(z)} + \pi \frac{z - \bar{z}}{2} \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} \right] + \dots \right\}.$$

V dalším postupujeme tak, že rozvineme funkce u faktorů a_{4k} a b_{4k+2} ($k = 0, 1, 2, \dots$) v mocninné řady proměnné z . Tak platí:

$$\begin{aligned} \lg \vartheta_1(z) &= \lg 2 + \lg \left[e^{-1\pi/4} \sin \pi z - e^{-9\pi/4} \sin 3\pi z + e^{-25\pi/4} \sin 5\pi z - \dots \right] = \\ &= \lg 2 + \lg \left\{ e^{-1\pi/4} \left[\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - \dots \right] - \right. \\ &- e^{-9\pi/4} \left[3\pi z - \frac{(3\pi z)^3}{3!} + \frac{(3\pi z)^5}{5!} - \dots \right] + e^{-25\pi/4} \left[5\pi z - \frac{(5\pi z)^3}{3!} + \frac{(5\pi z)^5}{5!} - \dots \right] = \\ &= \lg 2 + \lg \pi z \Sigma_1 + \lg \left[1 + \frac{(\pi z)^2 \Sigma_3}{3! \Sigma_1} \right] + \lg \left[1 + \frac{(\pi z)^4}{5!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\pi z)^2 \Sigma_3}{3! \Sigma_1} \right] + \\ &\quad + \lg \left[1 + \frac{(\pi z)^6}{7!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\pi z)^2 \Sigma_3}{3! \Sigma_1} + \frac{(\pi z)^4 \Sigma_5}{5! \Sigma_1} \cdot \frac{\Sigma_7}{\Sigma_1} \right] + \\ &\quad + \lg \left[1 + \frac{(\pi z)^8}{9!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\pi z)^2 \Sigma_3}{3! \Sigma_1} + \frac{(\pi z)^4 \Sigma_5}{5! \Sigma_1} + \frac{(\pi z)^6 \Sigma_7}{7! \Sigma_1} \cdot \frac{\Sigma_9}{\Sigma_1} \right] + \dots \end{aligned}$$

Rozvineme-li logaritmy dvojčlenů opět v mocninné řady, dostáváme konečně

$$\lg \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} r^2 = c_0 + \lg z + c_4 z^4 + c_8 z^8 + \dots,$$

kde

$$c_0 = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + r^2 \right) + \lg 2\pi \Sigma_1, \quad c_4 = \left[-\frac{1}{2 \cdot 3!^2} \left(\frac{\Sigma_3}{\Sigma_1} \right)^2 + \frac{1}{5! \Sigma_1} \right] \pi^4,$$

$$c_8 = \left[-\frac{1}{4 \cdot 3!^4} \left(\frac{\Sigma_3}{\Sigma_1} \right)^4 + \frac{1}{5! 3!^2} \frac{\Sigma_5}{\Sigma_1} \left(\frac{\Sigma_3}{\Sigma_1} \right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 5!^2} \left(\frac{\Sigma_5}{\Sigma_1} \right)^2 - \frac{1}{3!7!} \frac{\Sigma_3 \Sigma_7}{\Sigma_1^2} + \frac{1}{9! \Sigma_1} \right] \pi^8$$

a

$$\Sigma_m = e^{-4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)^m e^{-\pi(n^2-n)} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Reálná část výrazu (2,16) je

$$(2,16) \quad \operatorname{Re} \left[\lg \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} r^2 \right] = c_0 + \lg r + c_4 r^4 \cos 4\varphi + c_8 r^8 \cos 8\varphi + \dots$$

Podobně dostáváme

(2,17)

$$\operatorname{Re} \frac{d^4}{dz^4} \left[\lg \vartheta_1(z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} r^2 \right] = -\frac{6}{r^4} \cos 4\pi + 4! c_4 + \binom{8}{4} c_8 r^4 \cos 4\varphi + \dots$$

Stejně postupujeme při rozvoji funkcí u faktorů b : tak u b_2 dostáváme

$$(2,18) \quad \operatorname{Re} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{4} \frac{\vartheta_1''(z)}{\vartheta_1(z)} + \pi \frac{z - \bar{z}}{2} \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} \right] = \left(\frac{3}{2} \pi^2 + 8c_4 - 12\pi c_4 r^2 \right) +$$

$$+ \left[-\frac{\pi}{r^2} + 30(18c_8 + 4c_4^2) r^4 - 168\pi c_8 r^6 \right] \cos 4\varphi + \dots \text{ atd.}$$

Dosadíme-li (2,16), (2,17) a (2,18) do (2,15), dostáváme po srovnání faktorů u stejného násobku úhlu

$$(2,19) \quad U = L_0(r) + L_4(r) \cos 4\varphi + \dots,$$

kde

$$L_0(r) = \text{konst} + a_0 \left(\lg r + \frac{\pi}{2} r^2 \right) - b_2 \cdot 12\pi c_4 r^2,$$

$$L_4(r) = a_0 c_4 r^4 + b_2 \left[-\frac{\pi}{r^2} + 30(18c_8 + 4c_4^2) r^4 - 168\pi c_8 r^6 \right] +$$

$$+ a_4 \left[-\frac{6}{r^4} + \binom{8}{4} c_8 r^4 \right].$$

Po dosažení výrazu (2,19) do závislosti mezi složkami napětí a Airyho funkcí

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \quad \bar{\sigma}_\varphi = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}$$

dostáváme

$$(2,20) \quad \bar{\sigma}_r = \frac{L'_0}{r} + \left(\frac{L'_4}{r} - \frac{16L_4}{r^2} \right) \cos 4\varphi, ^3)$$

$$(2,21) \quad \bar{\sigma}_\varphi = L''_0 + L''_4 \cos 4\varphi,$$

$$(2,22) \quad \bar{\tau}_{r\varphi} = 4 \left[\frac{L_4}{r} \right]' \sin 4\varphi.$$

Přejdeme-li nyní k původním rozměrům mříže o rozteči $\xi = 2\alpha$, přísluší kraji otvoru hodnota $R = \beta/2\alpha$ a proměnná $r = \xi/2\alpha$.

Nyní zbývá dosadit do krajové podmínky (2,14) výrazy (2,12), (2,20) a (2,22) a srovnat koeficienty u cosinů stejného násobku úhlu.

Tak dostáváme

$$(2,23) \quad \left. \frac{L'_0}{r} \right|_{r=R} = -p_0, \quad \left. \frac{L'_4}{r} - \frac{16L_4}{r^2} \right|_{r=R} = -p_4, \quad 4 \left[\frac{L_4}{r} \right]' \Big|_{r=R} = -t_4.$$

Řešením rovnic (2,23) stanovíme koeficienty a_0 , b_2 a b_4 a po jejich dosažení do vztahů (2,20), (2,21) a (2,22) dostáváme spolu s výrazy (2,11) a (2,6) řešení úlohy, neboť složky výsledného napětí jsou

$$(2,24) \quad \sigma_r = \bar{\sigma}_r + \bar{\bar{\sigma}}_r, \quad \sigma_\varphi = \bar{\sigma}_\varphi + \bar{\bar{\sigma}}_\varphi, \quad \tau_{r\varphi} = \bar{\tau}_{r\varphi} + \bar{\bar{\tau}}_{r\varphi}.$$

Počtení postup je převeden na tomto příkladě: Má se stanovit teplotní pole a napětí v desce, oslabené čtvercovou mříží otvorů o průměru $2b = 12$ cm, rozteči $2a = 24$ cm, tloušťce $t = 8$ cm. Tepelná vodivost materiálu je $\lambda = 39$ kcal/m, hod, °C, součinitel přestupu tepla z povrchu desky do okolí $\alpha = 500$ kcal/m², hod, °C, intenzita tepelného toku na okraji otvorů $q = 3 \cdot 10^3$ kcal/m, hod, modul pružnosti materiálu $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm² a součinitel tepelné roztažnosti $\varepsilon = 13 \cdot 10^{-6}$ m/m°C. Na základě vztahu pro γ dostáváme $\gamma = 17,9$ 1/m. Dále $\beta = 1,075$, $\alpha = 2,15$ a souřadnice bodů na okraji jednoho pole

$$\xi_1 = 2,18, \quad \xi_2 = 2,4, \quad \xi_3 = 2,79, \\ \varphi_1 = 0,1653, \quad \varphi_2 = 0,464, \quad \varphi_3 = 0,695.$$

Po vyčíslení koeficientů soustavy (2,7) a jejím řešením dostáváme

$$\kappa_0 = 0,0373 \frac{q}{K_1(\beta) \alpha \sqrt{2}}, \quad \kappa_4 = 0,289 \frac{q}{K_1(\beta) \alpha \sqrt{2}}, \quad \kappa_8 = 22,5 \frac{q}{K_1(\beta) \alpha \sqrt{2}}.$$

Dosadíme-li tyto faktory do vztahu (2,6), můžeme stanovit teplotní rozdíl v kterémkoliv místě desky. Výpočet byl proveden pro tři řezy: $\varphi = 0, \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{4}\pi$ (viz obr. 4).

³⁾ Čárkami jsou označeny derivace podle r .

Číselné výsledky jsou uvedeny v tab. I. Dosadíme-li konstanty κ_i do vztahu (2,13), dostaneme řešením soustavy (2,23) koeficienty a_i a b_i pro rozvoj (2,15). Nyní je možno pomocí vztahu (2,24) stanovit průběh napětí. V tab. II jsou uvedeny hodnoty tečného a radiálního napětí ve dvou řezech čtvrtiny pole desky. Průběhy jsou zakresleny na obr. 5.

Tabulka I
 $T [^{\circ}\text{C}]$

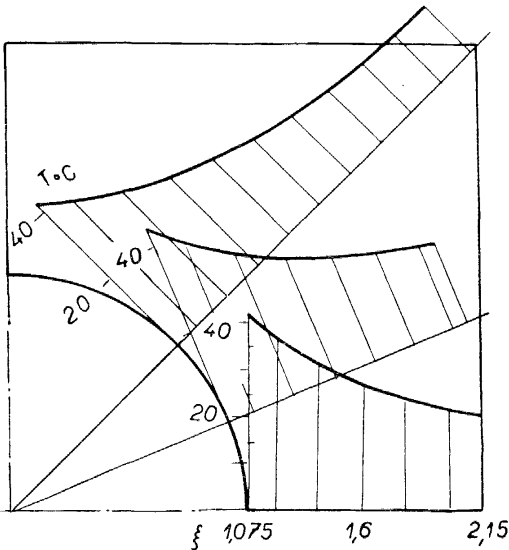
$\xi \backslash \varphi$	0	$\pi/8$	$\pi/4$
1,2	38	37,6	37,4
1,4	30,8	30,5	30,1
1,6	26,3	25,7	25,1
1,8	23,3	22,4	21,5
2,0	21,8	20,2	18,9
2,2	—	19,0	16,0
2,4	—	—	15,7
2,6	—	—	15,0
2,8	—	—	14,7
3,0	—	—	14,7

Tabulka rozdílu teploty povrchu desky a okolního prostředí

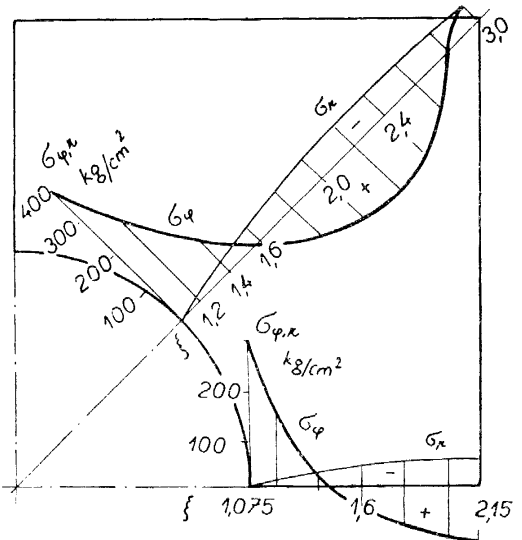
Tabulka II

ξ	$\sigma_{\varphi} [\text{kg}/\text{cm}^2]$		$\sigma_r [\text{kg}/\text{cm}^2]$	
	$\varphi = 0$	$\varphi = \pi/4$	$\varphi = 0$	$\varphi = \pi/4$
1,075	-320	-412	0	0
1,2	-130	-209	-22	-19
1,4	-20	-90	-46	-29
1,6	50	-15	-52	-34
1,8	80	68	-56	-38
2,0	110	105	-58	-42
2,5	—	105	—	-43
3,0	—	-45	—	-45

Tabulka obvodového a radiálního napětí



Obr. 4.



Obr. 5.

ZÁVĚR

Použití theta-funkcí při výpočtu napjatosti perforované desky bylo předvedeno na často se vyskytujícím případě čtvercové mříže. Lze je však zobecnit i pro jiné tvary, jako např. mříž obdélníkovou, šesticelovou atd. Tehdy by bylo nutno vybrat pro vztahy (2,4), (2,6) a (2,15) členy s jinými násobky úhlů a příslušně upravit i rozvoj theta-funkce.

Přesnost výpočtu teplotního napětí v perforované desce závisí na počtu uvažovaných členů v rozvoji (2,15), jehož konvergence zatím nebyla analyticky zjišťována.

Bez větších komplikací lze řešit i případy s jednostranně nebo oboustranně vyztuženými otvory a při výpočtu teplotního pnutí takové úlohy, kdy je předepsána teplota kruhového okraje, nebo součinitel přestupu tepla z okolí do válcového povrchu otvoru. Při aplikaci tohoto způsobu výpočtu v úlohách termoelastivity je nutno posoudit, zda jde o tenkou desku s malou proměnlivou teplotou po tloušce.

Literatura

- [1] *G. H. Cavin*: Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, Москва 1951.
- [2] *H. Neuber*: Kerbspannungslehre. Springer Verlag, Berlin 1958.
- [3] *R. C. J. Howland*: Phil. Trans. Royal Soc., London 1939.
- [4] *R. C. J. Howland*: Proc. Royal Soc., London 1935.
- [5] *A. Hütter*: ZAMM, Vol. 22, 1942.
- [6] *В. Й. Смирнов*: Курс высшей математики, том III/2. Гостехиздат, Москва 1951.
- [7] *H. Saito*: ZAMM, Vol. 37, 1957.
- [8] *Ю. С. Сикорский*: Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ, Москва 1936.
- [9] *Н. И. Мухелишвили*: Некоторые основные задачи математической теории упругости. Физматгиз, Москва 1951.
- [10] *Б. Г. Корнев*: Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в Бесселевых функциях. Физматгиз, Москва 1960.
- [11] *S. G. Michlin*: Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fyziky a techniky. Praha 1952.
- [12] *Е. Мелан. Г. Паркус*: Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, Москва 1958.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЕ В ПЛАСТИНЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКОЙ ИЗ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

ЯН ДВОРЖАК (Jan Dvořák)

В работе была решена задача напряженности в бесконечной однородной изотропной пластине с квадратной решеткой из свободных круглых отверстий.

Для построения функции напряжения был применен логарифм тэта-функции и его производные, у которых во всей исследуемой области регулярна решетка сингулярных точек, и которые позволяют учитывать все отверстия одновременно без необходимого подсчитывания рядов.

В работе было доказано, что выбранная функция является квадратно-симметричной и что составляющие напряжения, принадлежащие частям функции Эйри, которые удовлетворяют условиям по краям отверстий, дают при возрастании x и y сверх всех пределов нулевые величины. Любая внешняя нагрузка пластины была учтена подходящим выбором первого члена в разложении функции напряжения.

Способ применения расчета был показан на числовом примере температурного напряжения в тонкой перфорированной пластине. Предполагалось, что тепло с постоянной интенсивностью подводится через края отверстий и отводится через поверхность пластины при постоянном коэффициенте теплопередачи.

Summary

STRESSES IN A PLATE WITH A SQUARE GRID OF CIRCULAR OPENINGS

JAN DVOŘÁK

The paper presents a solution of the problem of stress in an infinite homogeneous isotropic plate with a square grid of unstressed circular openings. The stress function is constructed using the logarithm of the theta-function and its derivatives, all of which have a uniform grid of singular points and so enable us to treat all the openings simultaneously (i.e. without summing series).

It is proved in the paper that the function constructed has the required symmetry properties, and that those stress components corresponding to parts of the Airy function which satisfy the boundary conditions at the openings, tend to zero as x and y increase. Arbitrary external loads of the plate are taken into account by a suitable choice of the first term in the series expansion of the stress function.

The application of the method is illustrated on a numerical example of thermal stress in a thin perforated plate. It is assumed that heat with constant flux density is applied at the openings, and conducted away at constant heat transfer coefficient at the plate surface.

Adresa autora: Ing. Jan Dvořák C. Sc., Státní výzkumný ústav tepelné techniky, Husova 8, Praha 1.